

# 骨組構造物の非保存的弾性安定解析

會 田 忠 義\*・波 木 健 一\*\*

Analysis of Nonconservative Elastic Stability of Framed Structures.

Tadayoshi AIDA and Kenichi NAMIKI

## Abstract

In this paper an analytical method of nonconservative elastic stability of framed structures is proposed using the linearized finite displacement method and dynamic analysis method, where the effect of damping is disregarded.

The critical loads calculated by the proposed method show good agreement with those obtained by the theory of continuum mechanics for the columns.

The proposed method can equally be applied to the analysis of nonconservative problems of various kinds of framed structures.

## 1. ま え が き

これまでに、骨組構造物の弾性安定解析で取り扱われてきた問題は、ほとんどが保存系であったが、外力の作用方向が構造物の変形に依存する場合の安定問題などは、非保存系の問題として取り扱われなければならないことは周知の通りである。

弾性安定解析について、非保存系の問題として取り扱う力学系を H. Ziegler<sup>1)</sup>は次の三つに分類している。

- 1 散逸系 (減衰力などが作用する系)
- 2 循環系 (従動力などの循環力が作用する系)
- 3 非定常系 (周期力などが作用する系)

これらの系について、連続体の力学を用いた研究<sup>2)~6)</sup>、集中質量系の一種である Ziegler の標準モデルによる研究<sup>7)~11)</sup>、差分法を適用した研究<sup>12)~14)</sup>あるいはアナログ計算機を用いた研究<sup>15)</sup>など、多くの研究がなされている。しかし、トラス、アーチあるいはラーメンなどの一般的な骨組構造物についての、非保存系としての弾性安定解析は、あまり行なわれていない。本研究は、これらの骨組構造物を対象とし、循環系、特に、Fig. 1 の一部のような従動力あるいは、従動トルクの非保存力を受ける系について、弾性安定解析を試みたものである。

上記のような非保存系の弾性安定解析には動的解析法を用いなければならないことは周知の通りである。

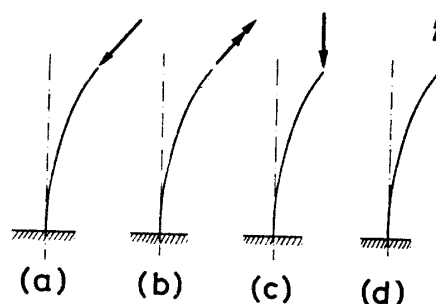


Fig. 1 Columns subjected to the forces and torques.

本研究も、これに従い、不安定状態の運動方程式を表わすのに線形化した有限変形理論を用いている。さらに、解析に当たって次の仮定を入れた。

- ① 外力はすべて構造物の節点に作用する。
- ② 構造物に作用する外力はすべて一定の割合で漸増する。
- ③ 外力は質量をもたない。
- ④ 内力はすべて弾性限度内にある。
- ⑤ 局所的な不安定現象は生じない。
- ⑥ 構造物の質量はすべて節点に集中する。

以下、節点総数 $m$ の立体剛節構造物について、解析法を示し、最後に、二三の適用例を示す。(Fig. 2)

\* 土木工学科

\*\* 大学院工学研究科土木工学専攻

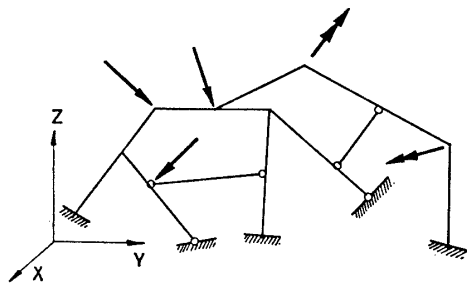


Fig. 2 Framed structure subjected to the follower forces and torques.

2. 運動方程式

安定な状態では微小な外乱に対して、微小振巾の運動方程式が成立するが、外力の強度を変化させ、ある大きさに達すると、微小な外乱により生じていた微小の振動変位が時間の経過とともに増大し、微小振巾の運動方程式が成立せず、有限振巾の運動方程式をたてねばならない状態が起る。ここで、不安定な状態とは、振動変位が時間の経過とともに無限大になる状態を指示することとする。

2・1 微小振巾時の運動方程式

節点*i*に作用する外力ベクトルを  $P_{oi}$ 、節点*i*の変位ベクトルを  $d_i$ 、この中で、外力による変位ベクトルを  $d_{oi}$ 、振動変位ベクトルを  $\bar{d}_i$  とする。(Fig. 3 参照)

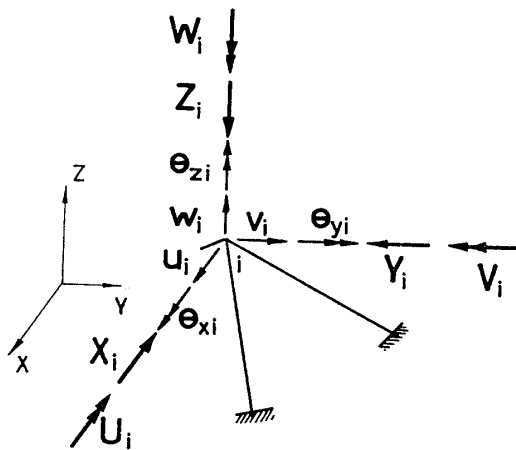


Fig. 3 Nodal displacements and forces.

$$P_{oi} = \{X_{oi}, Y_{oi}, Z_{oi}, U_{oi}, V_{oi}, W_{oi}\}^T \dots (1)$$

$$d_i = \{u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}\}^T \dots (2)$$

$$d_{oi} = \{u_{oi}, v_{oi}, w_{oi}, \theta_{xoi}, \theta_{yoi}, \theta_{zoi}\}^T \dots (3)$$

$$\bar{d}_i = \{\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i, \bar{\theta}_{xi}, \bar{\theta}_{yi}, \bar{\theta}_{zi}\}^T \dots (4)$$

さらに、節点*i*の座標ベクトルを  $f_i$ 、部材*ij*の節点*i*における断面の主軸の回転角を  $\alpha_{ij}$  とする。

$$f_i = \{x_i, y_i, z_i\}^T \dots (5)$$

節点*i*の微小振巾時の運動方程式は

$$W_i \frac{d^2 \bar{d}_i}{dt^2} = - \sum_{j=1}^m T_{ij}(f_i, f_j, \alpha_{ij}) N'_{ij}(d_{oi} + \bar{d}_i, d_{oj} + \bar{d}_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) - P_{oi} \dots (6)$$

ここで、 $W_i$  は次に示す対角マトリックスで表わされる質量マトリックスである。対角要素中、 $M_i$  は節点*i*の集中質量、 $J_{xi}$ 、 $J_{yi}$  および  $J_{zi}$  はそれぞれ、節点*i*を通り、*x*、*y* および *z* 軸に平行な軸まわりの節点*i*の質量慣性モーメントである。

$$W_i = \text{diag} (M_i, M_i, M_i, J_{xi}, J_{yi}, J_{zi}) \dots (7)$$

$T_{ij}$  は局部座標軸方向の量を全体座標軸方向の諸量に変換するための座標変換マトリックス<sup>16)</sup>である。

$N'_{ij}$  は部材*ij*の*i*端における局部座標に関する材端力ベクトル<sup>16)</sup>である。

式(7)を構造物の各節点に適用することにより、一連の運動方程式が得られ、マトリックス表示すると、

$$W \frac{d^2 \bar{d}}{dt^2} + K_1 (d_0 + \bar{d}) = -P_0 \dots (8)$$

ここで

$$W = \begin{pmatrix} W_1 & & 0 \\ & W_2 & \\ 0 & \vdots & \\ & & W_m \end{pmatrix}, \quad d_0 = \begin{pmatrix} d_{01} \\ d_{02} \\ \vdots \\ d_{0m} \end{pmatrix},$$

$$d = \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \vdots \\ \bar{d}_m \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} P_{01} \\ P_{02} \\ \vdots \\ P_{0m} \end{pmatrix} \dots (9)$$

$K_1$ : 剛性マトリックス、

2・2 有限振巾時の運動方程式

作用外力がある大きさに達し、微小な外乱に対して安定な振動状態にあったものが、外力の微小な増加により、急に不安定な振動状態になった場合を想定する。この状態に有限振巾時の運動方程式を適用する。

節点*i*の変位の増加量(付加変位)を  $\Delta \bar{d}_i$  とするとき、節点*i*の運動方程式は近似的であるが、次式で表わされる。

$$W_i \frac{d^2}{dt^2} (d_i + \Delta \bar{d}_i) = - \sum_{j=1}^m T_{ij}(f_i + \Delta f_i, f_j + \Delta f_j, \alpha_{ij} + \Delta \alpha_{ij}) N'_{ij}(d_{oi} + \bar{d}_i + \Delta \bar{d}_i, d_{oj} + \bar{d}_j + \Delta \bar{d}_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) - P_{oi} - A_i P_{oi} \dots (10)$$

ここで、 $\Delta f_i = \Delta d_i$ 、 $\Delta f_j = \Delta \bar{d}_j$

$$\Delta\alpha_{ij} = \lambda_{ij}\Delta\theta_{xi} + \mu_{ij}\Delta\theta_{yi} + \nu_{ij}\Delta\theta_{zi}$$

$\lambda_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  おおよび  $\nu_{ij}$  は  $ij$  軸の方向余弦である。マトリックス  $\mathbf{A}_i$  は外力が従動力あるいは、従動トルクの場合、次の値をもつ。(Fig. 4 参照)

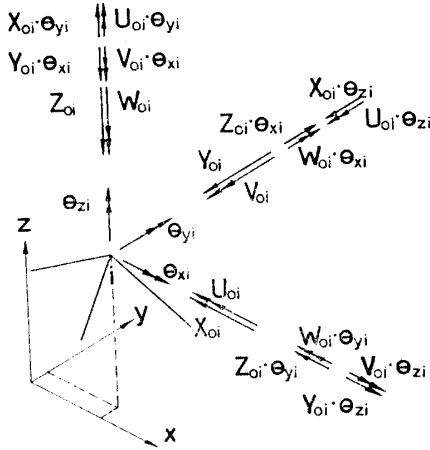


Fig. 4 Nodal follower forces and torques.

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\theta_{zi} & \Delta\theta_{yi} & 0 & 0 & 0 \\ \Delta\theta_{zi} & 0 & -\Delta\theta_{xi} & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta\theta_{yi} & \Delta\theta_{xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta\theta_{zi} & \Delta\theta_{yi} \\ 0 & 0 & 0 & \Delta\theta_{zi} & 0 & -\Delta\theta_{xi} \\ 0 & 0 & -\Delta\theta_{yi} & \Delta\theta_{xi} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

外力が従動力でない場合、 $\mathbf{A}_i$  は  $\mathbf{0}$  になる。これより明らかなように  $\mathbf{A}_i \mathbf{P}_{oi}$  は次のように書き直せる。

$$\mathbf{A}_i \mathbf{P}_{oi} = \mathbf{B}_i \Delta \mathbf{d}_i \dots \quad (12)$$

ここで、 $\mathbf{B}_i$  は外力が従動力あるいは従動トルクの場合は次の値をもつ。

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{oi} & -Y_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & -Z_{oi} & 0 & X_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & Y_{oi} & -X_{oi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_{oi} & -V_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & -W_{oi} & 0 & U_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & V_{oi} & -U_{oi} & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

外力が従動力でない場合  $\mathbf{B}_i = \mathbf{0}$  となる。

式(10)において、 $\mathbf{T}_{ij}$  および  $\mathbf{N}'_{ij}$  を展開して  $\Delta \mathbf{d}_i$  の2次以上の項を無視し、さらに、微小振動時の運動方程式(6)を考慮し、 $\Delta \mathbf{d}_i$  を新たに  $\mathbf{d}_i$  とおくと、式(10)は次のように整理される。

$$\mathbf{W}_i^T \frac{d^2 \mathbf{d}_i}{dt^2} = - \sum_{j=1}^m \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j, \alpha_{ij}) \mathbf{N}'_{ij}(\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j, \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j, \alpha_{ij}) - \sum_{j=1}^m \{ \mathbf{H}_{ij}(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j, \alpha_{ij}, \mathbf{N}'_{oij} + \mathbf{N}'_{ij}) \mathbf{d}_i + \mathbf{H}_{jij}(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j, \alpha_{ij}, \mathbf{N}'_{oij} + \mathbf{N}'_{ij}) \mathbf{d}_j \} - \mathbf{B}_i \mathbf{d}_i \dots \quad (14)$$

式中、 $\mathbf{N}'_{oij}$  は荷重  $\mathbf{P}_o$  が作用したときの部材  $ij$  の  $i$  端の材端力ベクトルである。 $\mathbf{N}'_{ij}$  は微小振動時の同部材端の材端力ベクトルであるが、 $\mathbf{N}'_{ij}$  は一般に極く小さいので、ここでは無視する。

$$\mathbf{N}'_{oij} = \mathbf{N}'_{ij}(\mathbf{d}_{oi}, \mathbf{d}_{oj}, \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j, \alpha_{ij}) \\ \mathbf{N}'_{ij} = \mathbf{N}'_{ij}(\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j, \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j, \alpha_{ij}) \quad (15)$$

$\mathbf{H}_{ij}$  および  $\mathbf{H}_{jij}$  は次に示すマトリックスである。

$$\mathbf{H}_{ij}(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j, \alpha_{ij}, \mathbf{N}'_{oij} + \mathbf{N}'_{ij}) = \left\{ \frac{\partial \mathbf{T}_{ij}}{\partial x_i} (\mathbf{N}'_{oij} + \mathbf{N}'_{ij}), \frac{\partial \mathbf{T}_{ij}}{\partial y_i} (\mathbf{N}'_{oij} + \mathbf{N}'_{ij}), \frac{\partial \mathbf{T}_{ij}}{\partial z_i} (\mathbf{N}'_{oij} + \mathbf{N}'_{ij}), \lambda_{ij} \frac{\partial \mathbf{T}_{ij}}{\partial \alpha_{ij}} (\mathbf{N}'_{oij} + \mathbf{N}'_{ij}), \mu_{ij} \frac{\partial \mathbf{T}_{ij}}{\partial \alpha_{ij}} (\mathbf{N}'_{oij} + \mathbf{N}'_{ij}), \nu_{ij} \frac{\partial \mathbf{T}_{ij}}{\partial \alpha_{ij}} (\mathbf{N}'_{oij} + \mathbf{N}'_{ij}) \right\}, \dots \quad (16)$$

$$\mathbf{H}_{jij}(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j, \alpha_{ij}, \mathbf{N}'_{oij} + \mathbf{N}'_{ij}) = \left\{ \frac{\partial \mathbf{T}_{ij}}{\partial x_j} (\mathbf{N}'_{oij} + \mathbf{N}'_{ij}), \frac{\partial \mathbf{T}_{ij}}{\partial y_j} (\mathbf{N}'_{oij} + \mathbf{N}'_{ij}), \frac{\partial \mathbf{T}_{ij}}{\partial z_j} (\mathbf{N}'_{oij} + \mathbf{N}'_{ij}), 0, 0, 0 \right\} \dots \quad (17)$$

今、骨組構造物の基準荷重作用状態における節点  $i$  の荷重ベクトル  $\tilde{\mathbf{P}}_{oi}$  とすると、

$$\tilde{\mathbf{P}}_{oi} = \{ \tilde{X}_{oi}, \tilde{Y}_{oi}, \tilde{Z}_{oi}, \tilde{U}_{oi}, \tilde{V}_{oi}, \tilde{W}_{oi} \} \dots \quad (18)$$

臨界荷重作用状態における同じ節点の荷重ベクトル  $\mathbf{P}_{oi}$  は  $\tilde{\mathbf{P}}_{oi}$  の  $P_o$  倍で表わされる。すなわち、

$$\mathbf{P}_{oi} = P_o \tilde{\mathbf{P}}_{oi} \dots \quad (19)$$

同じように、基準荷重作用状態における  $ij$  部材の  $i$  端の材端力ベクトルを  $\tilde{\mathbf{N}}'_{oij}$  とするとき、臨界荷重作用状態の同部材端の材端力ベクトル  $\mathbf{N}'_{oij}$  は次の線形関係をもつ。

$$\mathbf{N}'_{oij} = P_o \tilde{\mathbf{N}}'_{oij} \dots \quad (20)$$

さらに、基準荷重作用状態における  $\mathbf{B}_i$  を  $\tilde{\mathbf{B}}_i$  とすると次の関係を満す。

$$\mathbf{B}_i = P_o \tilde{\mathbf{B}}_i \dots \quad (21)$$

$\tilde{\mathbf{B}}_i$  は外力が従動力あるいは従動トルクの場合、次の値をもつ。

$$\tilde{\mathbf{B}}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{Z}_{oi} & -\tilde{Y}_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{Z}_{oi} & 0 & \tilde{X}_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{Y}_{oi} & -\tilde{X}_{oi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{W}_{oi} & -\tilde{V}_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{W}_{oi} & 0 & \tilde{U}_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{V}_{oi} & -\tilde{U}_{oi} & 0 \end{pmatrix} \dots (22)$$

以上の関係より、式(14)は次のように整理される。

$$\mathbf{W}_i \frac{d^2 \mathbf{d}_i}{dt^2} = - \sum_{j=1}^m \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j, \alpha_{ij}) \mathbf{N}'_{ij}(\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j, \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j, \alpha_{ij}) - P_o \sum_{j=1}^m \{ \mathbf{H}_{ij}(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j, \alpha_{ij}, \tilde{\mathbf{N}}'_{oij}) \mathbf{d}_i + \mathbf{H}_{jj}(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j, \alpha_{ij}, \tilde{\mathbf{N}}'_{oij}) \mathbf{d}_j \} - P_o \tilde{\mathbf{B}}_i \mathbf{d}_i \dots (23)$$

上式が有限振幅時の節点  $i$  の運動を表わす方程式である。これを骨組構造物のすべての節点に適用し、マトリックス表示すると、

$$\mathbf{W} \frac{d^2 \mathbf{d}}{dt^2} + P_o \mathbf{K}_3 \mathbf{d} + P_o \mathbf{K}_4 \mathbf{d} + \mathbf{K}_1 \mathbf{d} = 0 \quad (24)$$

ここで、 $\mathbf{W}$  および  $\mathbf{K}_1$  は式(8)と同じであり、 $\mathbf{K}_3$  は基準荷重 ( $\tilde{P}_{oi}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ) 作用時の初期応力マトリックスである。 $\mathbf{K}_4$  は基準荷重を含む次式で表わされるマトリックスである。

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_4 = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 & & 0 \\ & \tilde{\mathbf{B}}_2 & \\ 0 & \vdots & \\ & & \tilde{\mathbf{B}}_m \end{pmatrix} \dots (25)$$

### 3. 臨界荷重の算定

付加変位  $\mathbf{d}$  を次に示す関数で表わすと、

$$\mathbf{d} = \tilde{\mathbf{d}} e^{\omega t} \dots (26)$$

式(24)は次式となる。

$$\{ \omega^2 \mathbf{W} + P_o (\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) + \mathbf{K}_1 \} \tilde{\mathbf{d}} = 0 \dots (27)$$

したがって、 $\tilde{\mathbf{d}} = 0$  以外の解をもつことより、次の特性方程式が得られる。

$$| \mathbf{K}_1 + P_o (\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) + \omega^2 \mathbf{W} | = 0 \dots (28)$$

与えられた  $P_o$  に対して式(28)を満す  $\omega^2$  を求める。その結果、 $\omega^2$  が正の実根であるとき、 $\mathbf{d}$  は周期関数でなくなり、時間の経過とともに変位は増大し不安定 (divergence) となる。 $\omega^2$  が負の実根の場合、 $\mathbf{d}$  は周期関数となり、与えられた初期外乱に対して非減衰の自由振動となり安定である。一方、 $\omega^2$  が複素数の場合は、 $\omega = r + i\delta$  ( $r > 0$ ) で表わされるため、 $\mathbf{d}$  は  $e^{rt}$  の項を含み、時間の経過とともに振動しながら、振幅

は増大する。したがって、不安定 (flutter) である。不安定となる最小の臨界荷重は式(28)において、 $\omega^2$  が負の実根から正の実根があるいは、複素根に変化する臨界の  $P_o$  値を算出すればよいことになる。

## 4. 適用例

### 4.1 従動力を受ける柱

柱長60cm、断面4cm×0.2cmのアルミニウム柱に本研究の解析法を適用した結果を示す。解析に当たり、柱を10等分割し、Fig. 5のように集中質量系に置換する。



Fig. 5 Lumped mass system of column.

#### 4.1.1 Beckの問題

一端固定他端自由の柱の自由端に接線方向の集中荷重が作用する場合 (Fig. 1 (a)) の安定問題における1次および2次の固有値曲線を Fig. 6 に示す。最小臨界荷重を Table 1 に示す。比較のため Beck の解<sup>4)</sup> および差分法 (F. D. M.) の解<sup>13)</sup> をともに表示し

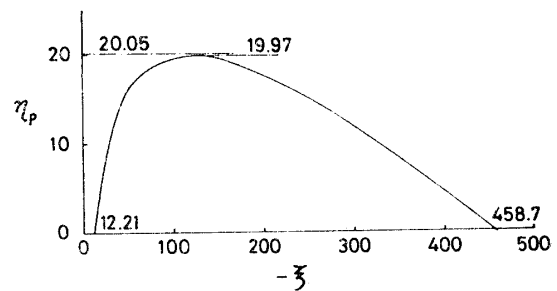


Fig. 6 Eigenvalue curve of Beck's problem.

Table 1 Minimum critical loads  $\eta_{per}$

Prop sed method	19.97
Beck's solution <sup>4)</sup>	20.05
F. D. M. <sup>13)</sup> k=10	19.89
k=50	20.04
k=100	20.05

F. D. M. = finite difference method,  
k = number of division.

ている。

Fig. 6 および Table 1 には次に示す無次元化した荷重と固有値を用いている。

無次元荷重  $\eta_p = Pl^2/EI$

無次元固有値  $\xi = \mu l^2 \omega^2 / EI$

ここで、P: 荷重, l: 柱長,  $\omega$ : 固有値,

EI: 曲げ剛性,  $\mu$ : 柱の単位長当りの質量

4・1・2 等分布接線荷重を受ける柱の問題

Fig. 7 に示す四種類の境界条件をもつ柱の等分布の接線方向従動力が作用する場合の最小臨界荷重を Table 2 に示す。1次および2次の固有値曲線は、Fig. 8の通りである。これらの図表には次の無次元荷重を用いている。

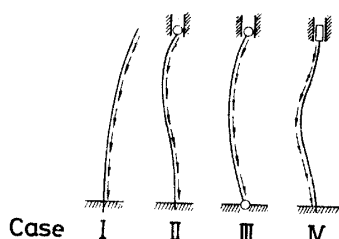


Fig. 7 Columns subjected to the uniformly distributed follower force.

Table 2 Minimum critical load  $\eta_{qcr}$

Boundary condition	Proposed method	F. D. M <sup>(3)</sup> .			Galerkin's method
		k=10	k=50	k=100	
Case I	** 40.17	39.53	40.03	40.05	40.7 <sup>5)</sup>
Case II	* 58.95	54.96	56.92	56.99	57.95 <sup>6)</sup>
Case III	* 19.14	18.78	18.95	18.95	18.96 <sup>5)</sup>
Case IV	83.71	76.34	80.09	80.22	81.37 <sup>6)</sup>

\*...divergence, \*\*...flutter.

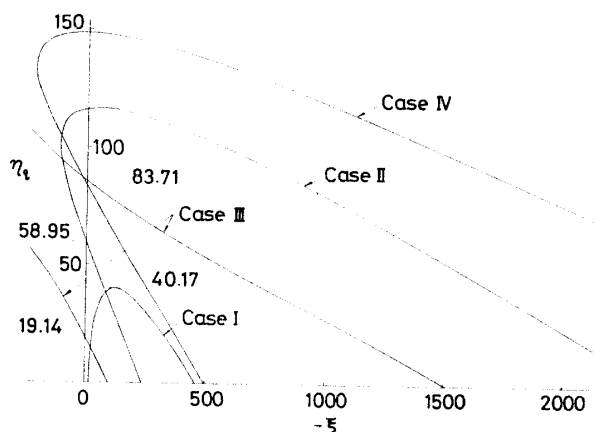


Fig. 8 Eigenvalue curve of columns subjected to the uniformly distributed follower force.

無次元荷重  $\eta_q = ql^3/EI$

ここで、q: 等分布荷重強度

4・2 トルクを受ける柱の問題

Table 3 に示す四種類の断面をもつ、柱長 60cm の一端固定他端自由の柱に、垂直トルク (Fig. 1 (d)) および従動トルク (Fig. 1 (b)) が作用する場合を本研究の方法で解析した結果を示す。解析に当り、Fig. 5 に示すように柱を10等分割し、集中質量系に置換する。

最小臨界トルクを Table 3 に、垂直トルク作用時の固有値曲線を Fig. 9 に示す。従動トルク作用時の固有値曲線は Fig. 9 とほとんど同じであるので、ここでは図示していない。

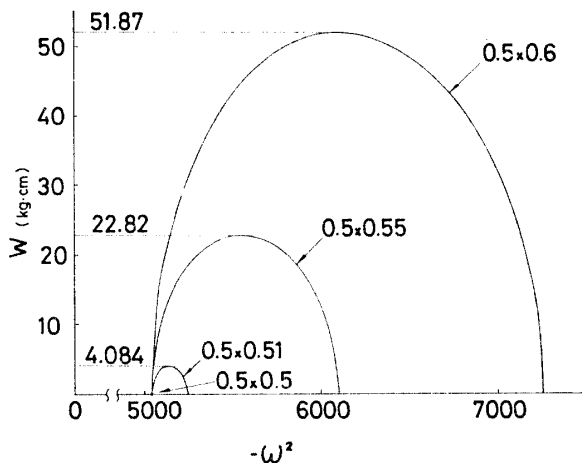


Fig. 9 Eigenvalue curve of columns subjected to the torque.

Ziegler は Fig. 1 (d) の柱について、柱の断面の主軸が直交し、両主軸に関する曲げ剛性が等しい場合、ゼロに等しくない微小のトルクにより不安定になることを明らかにしている<sup>1)</sup>。

Table 3 Minimum critical torque  $W_{cr}$  (kg · cm)

Cross Section (cm×cm)	Vertical torque	Follower torque
0.5×0.5	0.0	0.0
0.5×0.51	4.084	4.100
0.5×0.55	22.82	23.06
0.5×0.6	51.87	51.41

4・3 従動力を受けるアーチの問題

Fig. 10 に示す共通の軸線形をもち、Fig. 11 に示す断面をもつ2種類のアルミニウム製の放物線アーチの解析結果を示す。解析に当り、アーチをy軸方向に10等分割し、各節点に質量を集中させる。

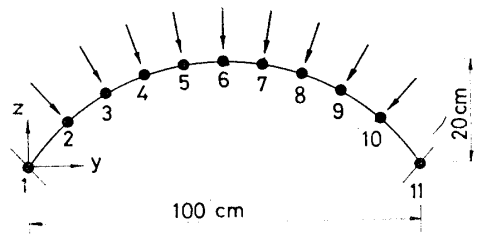


Fig. 10 Arch subjected to the normal follower forces.

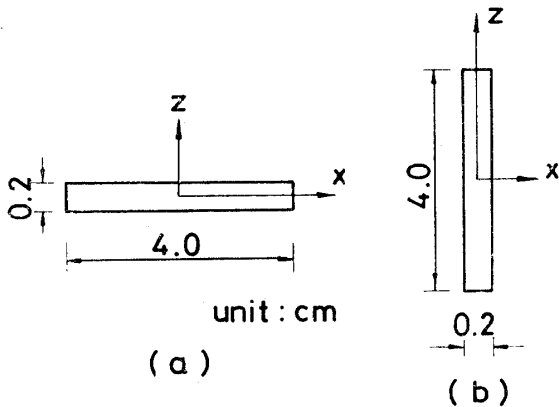


Fig. 11 Cross sections of arches.

4.3.1 面内変形アーチ

Fig. 11(a) に示す断面をもつ両端ヒンジおよび両端固定アーチに Fig. 10に示すようなアーチ軸に垂直に作用する従動力が作用する場合の固有値曲線を Fig. 12に示す。比較のため、荷重作用方向の変化しない保存力の作用時の固有値曲線も示している。いずれも、ダイバージェンス型不安定を起すことが、また、保存力作用時の方が安定であることが図より明らかである。

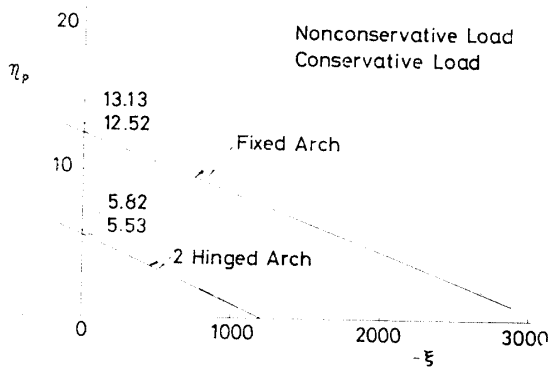


Fig. 12 Eigenvalue curve of arch deforming in its plane.

4.3.2 面外変形アーチ

Fig. 11(b) に示す断面をもつ両端固定アーチに、アーチ変形前は鉛直下向きであるが、アーチの変形にしたがって、荷重作用点の回転変位に等しいだけ、作用方向を変える従動力が作用する場合の固有値曲線を Fig. 13に示す。図には、比較のため、作用方向を変えない鉛直下向の保存力が作用するときの固有値曲線も示している。

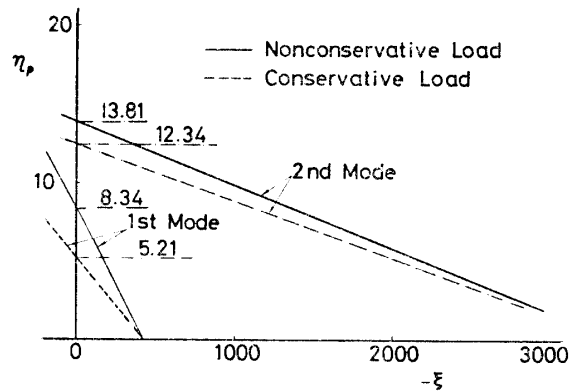


Fig. 13 Eigenvalue curve of arch deforming out of its plane.

図より明らかなように、ダイバージェンス型不安定を起し、Beck の問題と同様、非保存力作用時の方が安定である。

5. 結 び

これまで例の非常に少ない、一般的骨組構造物の非保存的弾性安定問題の解析法を、動的解析法と骨組構造物の解析に一般的である変形法を用いて示した。

適用例で示したように、本解析結果は連続体の力学を用いた解析結果と比較的よく一致した。これより、本解析法を用いることにより、任意骨組構造物に任意の従動力が作用する場合の安定解析が可能となった。

本研究の非保存的弾性安定問題には減衰力の影響を無視している。この影響は非常に重要である。この影響を考慮した場合の解析法については稿を改める。

本研究の数値計算には、九州大学大型計算機センターの FACOM 230-75のおよび山口大学電子計算機室のFACOM 230-28 を用いた。

非保存的弾性安定問題について、鳥取大学工学部杉山吉彦助教授より数多くの貴重な助言をいただいた、ここに付記し謝意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) Ziegler, H. : Principles of Structural Stability, Blaisdel Publishing Co. Massachusetts, 1968. (日本語版, 砂川訳, 構造安定の原理. 培風館, 昭和48年12月)
- 2) Bolotin, V.V. : Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, Pergamon Press, N.Y., (1963)
- 3) Leipholz, H. : Stabilitätstheorie, P.G. Teubner, Stuttgart, 1968 (英語版, Stability Theory, Academic Press, N.Y., 1970)
- 4) Beck, M. : Z. Angew. Math. u. Phys., 3, 225 (1952)
- 5) Leipholz, H. : Z. Angew. Math. u. Phys., 13, 4, 359 (1962)
- 6) Hauger, W. : Ing.—Arch., 35, 221 (1966)
- 7) Ziegler, H. : Ing.—Arch., 20, 49 (1952)
- 8) Herrmann, G. and Bungay, R.W. : Trans. ASME., Ser. E, J. Appl. Mech., 31, 435 (1964)
- 9) Herrmann, G. and Jong, I.—C. : Trans. ASME., Ser. E, J. Appl. Mech., 32, 592 (1965)
- 10) Herrmann, G. and Jong, I.—C. : Trans. ASME., Ser. E, J. Appl. Mech., 33, 125 (1966)
- 11) Sugiyama, Y., Maeda, S. and Kawagoe, H. : Theo. Appl. Mech., 22, 33 (1972)
- 12) Leirhelz, H. : Z. Angew. Math. Phys., 13, V, 581 (1962)
- 13) 杉山吉彦, 片山忠一, 関谷壮 : 機械学会論文集, 37, 295, 455 (1971)
- 14) Sugiyama, Y. and Kawagoe, H. : J. Sound and Vibration, 38, 3, 341 (1975)
- 15) 杉山吉彦, 藤原直史, 関谷 壮 : 機械学会論文集, 37, 297, 931 (1971)
- 16) 會田忠義, 窪田彰, 佐伯博三 : 土木学会論文報告集, 249, 217 (1976)

(昭和50年10月15日受理)