

内歯車の固有振動数と剛性等価円環厚さ

日 高 照 晃*・杉 本 信 行*

Equivalent Ring Thickness with Stiffness on Internal Gear

Teruaki HIDAHA and Nobuyuki SUGIMOTO

Abstract

Studying dynamic behavior of planetary gear that has an internal gear whose rim is thin (for example Stoeckicht type planetary gear), we have to consider the deformation of the internal gear. Present report describes the results of an investigation about the influence of the internal teeth on its rim stiffness.

Two kinds of experiments were done using twenty-eight steel internal gears (standard spur gear, operating pressure angle 20°) which had different number of teeth, module, rim thickness and radius of center line of rim. On the one hand we took the effect that the teeth increased the stiffness of its rim from measuring the natural frequency of the internal gear in its own plane, on the other we took it from the relationship between the magnitude of the force and deflection when static force was applied to the radial direction of the internal gear. So the internal gears were replaced by rings of equivalent stiffness. Therefore the stiffness of the rim section in the internal gear including the teeth was described as the equivalent ring thickness with stiffness. This thickness was expressed by one experimental equation as the function of number of teeth and ratio of radius of center line of rim to rim thickness.

1. 緒 言

遊星歯車装置における各遊星歯車の荷重つり合わせ方法はいろいろと考案されており、そのいくつかを組み合わせて実用化されている場合が多い。シュテキヒト型遊星歯車装置では、太陽歯車および内歯車をギヤカップリングで浮動支持するとともに、内歯車を薄肉円環に歯切りし、内歯車の円環としての弾性変形を利用して荷重配分の均一化を図っている。しかしこの反面、内歯車の弾性たわみを大きくすると歯先縁のかみあいが大きくなる。また内歯車の固有振動数にかみあい周波数が一致すると共振を起こすなど、運転性能への影響が懸念される。¹⁾ それゆえ設計段階において内歯車の適切な剛性が要求されるので、内歯車の円環としての剛性を十分把握しておく必要がある。

そこで本研究では、シュテキヒト型遊星歯車装置に用いられている比較的リム部肉厚の薄い内歯車を研究の対象として、内歯車の歯が円環としてのリム部剛性に与える影響を明らかにすることを目的とした。内歯がリム剛性に与える影響に関しては、すでに Sinke-

vich and Sholomov²⁾が内歯車の半径方向に静荷重をかける実験的研究によって、たわみと荷重の関係から内歯車を同じ剛性を持つ円環に置き換えた場合の円環厚さとして論じている。彼らがいわゆる静力学的な実験から内歯車の剛性等価円環厚さを求めていることに対し、著者らは動力的な方法、すなわち内歯車の面内固有振動数から内歯車の剛性等価円環厚さを求めるとともに、内歯車の固有振動数についても検討した。このため内歯車の面内固有振動数の計算式を、内歯車を質量的に等価な質量等価円環と剛性的に等価な剛性等価円環とに分けて理論的に導いた。

試験試料としてかみあい圧力角 20° でモジュール・歯数、リム肉厚の異なった標準内歯車28個を製作し、これらの振動モード $n=2$ および $n=3$ による面内固有振動数を加振器を用いて計測した。また Sinkevichらと同様な静的実験も行い、動的および静的実験から求めた内歯車の剛性等価円環厚さの比較を行ったところ、両者ともほぼ一致することが明らかとなった。さらにこの2種類の実験から、内歯車の剛性等価円環厚さのリム肉厚に対する増加の割合は、歯数とリム部円環の中心半径に対するリム肉厚の比に反比例することを明らかにし、内歯車の剛性等価円環厚さの実験式を

* 生産機械工学科

示した。

2. 主な記号

- R : 内歯車のリム部円環の中心半径
 h : 内歯車のリム肉厚
 B : 内歯車のリム幅
 W : 内歯車の重量
 γ : 内歯車の材質の比重量
 E : 内歯車の材質の縦弾性係数
 Z : 歯数
 m : モジュール
 u : リム部円環要素中心の半径方向変位
 w : リム部円環要素中心の接線方向変位
 ϕ : リム部円環要素中心の回転角
 M : リム部に働くモーメント
 T : リム部に働く接線方向の力
 F : リム部に働く半径方向のせん断力
 t : 時間
 θ : リム部の中心角
 x : リム部肉厚に対する質量等価円環厚さの増加量
 m_a : 内歯車の単位角度当りの平均質量
 J : 内歯車の単位角度当りの平均慣性モーメント
 h_e : 剛性等価円環厚さ
 I : 剛性等価円環の断面二次モーメント
 ω_n : 内歯車の角固有振動数
 f_n : 内歯車の固有振動数の実験値
 n : 振動モード数
 P : 半径方向の荷重
 δ_1 : 荷重と同方向の円環の最大たわみ
 δ_1' : 荷重と同方向の内歯車の最大たわみの実験値
 δ_2 : 荷重と垂直方向の円環の最大たわみ
 δ_2' : 荷重と垂直方向の内歯車の最大たわみの実験値

3. 実験装置と実験方法

実験に使用した内歯車28個の諸元を Table 1 に示す。これらの内歯車は一般構造用炭素鋼板を用い、ピニオンカッタで歯切りしたものである。歯幅とリム幅は同一寸法とし、実際のシュテキヒト型遊星歯車装置における内歯車のリム部中心半径に対するリム肉厚の比 h/R が 0.1 前後程度であることを考慮して、同一モジュール・歯数の内歯車についてそれぞれリム肉厚を 4 種類にとって製作した。なおこれらの内歯車のリム部中心半径 R をほぼ同一寸法にとったのは、使用する加振器の制約によるためである。

Fig. 1 に内歯車の面内固有振動数測定のプロック線図を示す。前報³⁾ で円環の面内固有振動数の測定法に

Table 1 Dimensions of internal gear

Module m	Number of teeth Z	Mean radius of rim section R mm	Rim thickness h mm	Rim width B mm
1	180	94.30	5.858	10.00
		95.30	7.848	10.00
		96.29	9.837	9.99
		97.31	11.824	10.00
2	90	95.62	5.655	10.02
		96.64	7.667	9.99
		97.64	9.669	9.99
		98.63	11.659	10.02
3	60	97.66	7.181	9.95
		98.92	9.627	10.05
		100.14	12.163	10.00
		101.41	14.695	9.96
4	45	98.17	5.563	10.00
		99.17	7.566	10.02
		100.18	9.552	10.02
		101.18	11.555	10.01
5	36	99.34	5.723	10.01
		100.36	7.729	10.02
		101.36	9.733	10.03
		102.36	11.725	10.00
6	30	100.63	5.641	10.00
		101.64	7.631	10.00
		102.65	9.652	9.98
		103.66	11.627	9.97
7	26	102.83	5.782	10.04
		103.84	7.767	10.02
		104.84	9.774	10.01
		105.85	11.758	10.01

Standard gears

Operating pressure angle 20°

については説明したが、これとまったく同様な方法で内歯車の振動モード $n=2$ と $n=3$ による固有振動数の測定を行った。また内歯車の質量等価円環厚さは、個々の内歯車の重量を測定することによって求めた。Fig. 2 は内歯車の半径方向に 180° 間隔で圧縮および引張り荷重をかけた場合の最大たわみの測定方法とその測定位置を示す。圧縮荷重による最大たわみの測定は荷重点直下の荷重方向のたわみを、また引張り荷重の場合は装置の制約上荷重方向に対して垂直方向の最大たわみをダイヤルゲージでそれぞれ測定した。なお

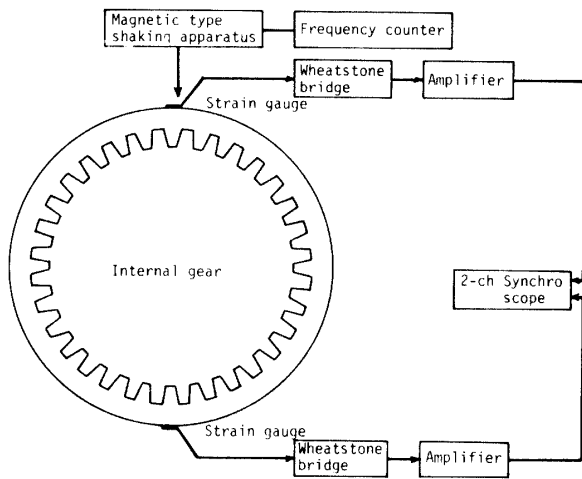


Fig.1 Measuring natural frequency of internal gear

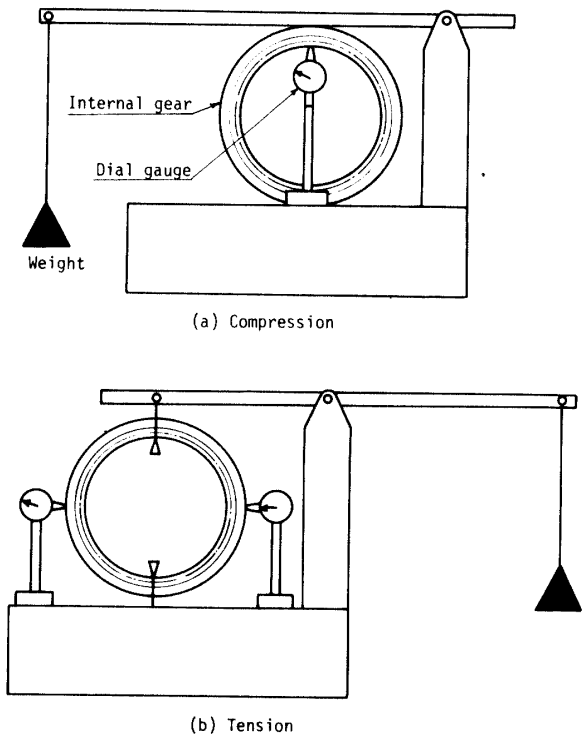


Fig.2 Measuring radial deflection of internal gear

圧縮荷重によるたわみの測定値にはヘルツ接触によるくぼみ量⁴⁾も測定されるが、ヘルツ接触によるたわみを計算すると0.6 μ m程度であり、全たわみ量の0.5%以内であるのでこれを無視した。一つの内歯車について荷重を段階的に10種類の大きさにとり、荷重とたわみの関係から最小二乗法によりその内歯車の2方向荷重に対する剛性を求めた。

4. 剛性等価円環厚さの算出方法

4.1 内歯車の固有振動数と剛性等価円環厚さの関係
内歯車の面内固有振動数を算出するに際して、内歯

の質量による並進ならびに回転慣性力は、内歯車のリム部円環の内周に内歯の質量を等分布させたと仮定した質量等価円環厚さを用いて表し、また内歯車の円環としての剛性は、内歯車を内歯車と剛性の等しい円環に置き換えた場合の剛性等価円環厚さを用いて表すことにより、内歯車の面内固有振動数の計算を行った。

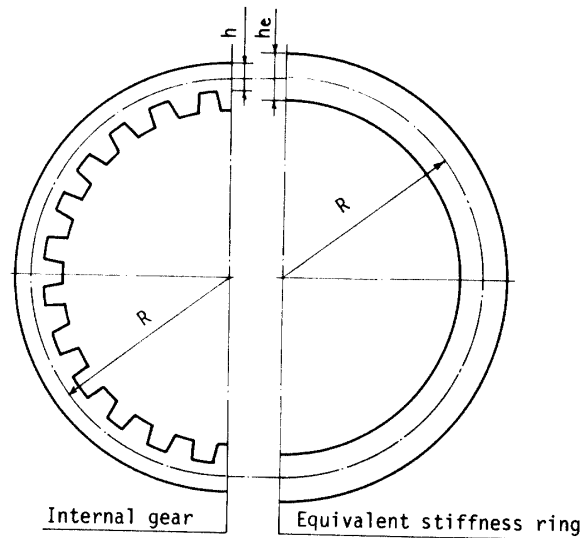


Fig.3 Replace internal gear by equivalent stiffness ring

Fig.3 に示すようにリム肉厚 h の内歯車を、中心半径が内歯車のリム部中心半径 R と同一寸法である肉厚 h_e ($h_e > h$) の剛性等価円環に置き換える。また内歯車のリム部円環の内周に内歯の質量を等分布させた場合、質量等価円環厚さのリム部円環厚さに対する増加量 x は、内歯車全体の重量 W より次式で求められる。

$$x = \frac{1}{2} \left\{ 2R - h - \sqrt{(2R - h)^2 - 4 \left(\frac{W}{\pi B \gamma} - 2Rh \right)} \right\} \quad (1)$$

これより剛性等価円環厚さ h_e と質量等価円環厚さ $h + x$ を使って内歯車の面内固有振動数を、円環要素の回転慣性も考慮した S.S. Rao and V. Sundararajan による円環の面内振動方程式⁴⁾から誘導すると、

$$\left. \begin{aligned} m_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial F}{\partial \theta} + T \\ m_a \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial T}{\partial \theta} - F \\ J \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial M}{\partial \theta} + RF \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし m_a , J はそれぞれ内歯車の単位角度当りの質

量, 慣性モーメントである. この m_a は質量等価円環厚さ $(h+x)$ とリム幅 B から次式で表される.

$$m_a = \frac{B\gamma}{2g} \{-x^2 + (2R-h)x + 2Rh\} \quad (3)$$

また内歯車の単位角度当りの平均慣性モーメント J を内歯車の形状を考慮して求めるのは容易でない. したがって慣性モーメント J も質量等価円環厚さを用いて近似的に表すと

$$J = \frac{\gamma B}{g} \left[\frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{h}{2} \right)^4 - \left(\frac{h}{2} + x \right)^4 \right\} + \frac{R}{3} \left\{ \left(\frac{h}{2} \right)^3 + \left(\frac{h}{2} + x \right)^3 \right\} \right] \quad (4)$$

内歯車のリム部円環の任意断面のモーメント M を, 剛性等価円環の断面二次モーメント I を用いて表すと,

$$M = \frac{EI}{R^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (5)$$

中心線が伸びないと仮定すると

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = u \quad (6)$$

リム部円環要素の回転角 ϕ は

$$\phi = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (7)$$

(5)~(7) 式から (2) 式は w について 6 次の偏微分方程式となるが, 円環の振動条件から $w(\theta, t) = e^{i\omega_n t} \cdot A \sin(n\theta + B)$ とおくことにより角固有振動数 ω_n は

$$\omega_n^2 = \frac{n^2(n^2-1)^2 EI}{(n^2+1)m_a R^3 + n^2(n^2-1)JR} \quad (8)$$

剛性等価円環の断面を矩形断面であるとすれば(8)式は

$$\omega_n^2 = \frac{n^2(n^2-1)^2 EBh_e^3}{12\{(n^2+1)m_a R^3 + n^2(n^2-1)JR\}} \quad (9)$$

となる. (9) 式に実験から求めた内歯車の固有振動数 f_n を代入すると, 内歯車の剛性等価円環厚さ h_e は

$$h_e = \left[\frac{12\{(n^2+1)m_a R^3 + n^2(n^2-1)JR\}}{BE n^2(n^2-1)^2} \cdot (2\pi f_n)^2 \right]^{\frac{1}{3}} \quad (10)$$

で表される.

4.2 荷重とたわみによる剛性等価円環厚さ

2 方向荷重による円環のたわみ理論式において, 厚肉理論値⁵⁾ に対する薄肉理論値⁶⁾ の比を, 円環の中心半径に対する円環厚さの比 h/R について求めると Fig. 4 のようになる. 実験に使用した内歯車の h/R の最大なもので 0.14, 大半は 0.1 以下であり, この時のたわみの厚肉理論値に対する薄肉理論値の差は 1.1% 以内であることから, 以下薄肉理論を使って内歯車の剛性等価円環厚さを求めることとした.

2 方向荷重による薄肉円環のたわみは次式で表され

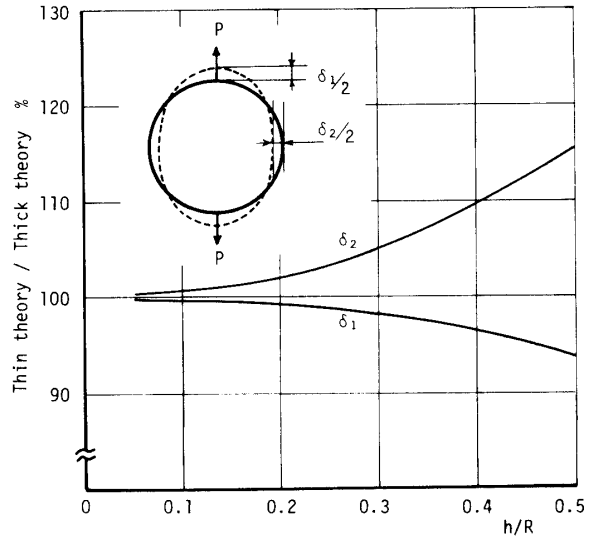


Fig.4 Ratio of thin theory to thick theory about deflection of ring

る⁷⁾.

$$\delta_1 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) \frac{PR^3}{EI} \quad (11)$$

$$\delta_2 = \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \frac{PR^3}{EI} \quad (12)$$

ここで δ_1 は荷重と同方向の最大たわみ, δ_2 は荷重と垂直方向の最大たわみを表す. (11), (12) 式の断面二次モーメント I を剛性等価円環厚さを用いて表し, 圧縮および引張り実験によって求めた内歯車のたわみ量 δ_1', δ_2' を (11), (12) 式に代入することによって剛性等価円環厚さ h_e は

$$h_e = \left\{ 12 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) \frac{PR^3}{EB\delta_1'} \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (13)$$

$$h_e = \left\{ 12 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \frac{PR^3}{EB\delta_2'} \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (14)$$

となる.

5. 実験結果と考察

実験から求めた内歯車の振動モード $n=2$ および $n=3$ による面内固有振動数 f_2, f_3 と内歯車に圧縮および引張り荷重をかけた時のたわみ量 δ_1', δ_2' から, (10), (13), (14) 式を使って28個の内歯車の剛性等価円環厚さ h_e を求めた. その一例としてモジュール 2, 歯数90枚の4個の内歯車について Table 2 に示す. これより個々の内歯車について固有振動数 f_2, f_3 から求めた剛性等価円環厚さ h_e の平均値と, たわみ δ_1', δ_2' から求めた h_e の平均値を比較すると, 剛性等価円環厚さの算出方法がまったく違うにもかかわらずほぼ同一の値を示していることが考察される. ところが Table 2

Table 2 Example of equivalent ring thickness with stiffness

hmm	h_e mm				$h_e - h$ mm			
	f_2	f_3	δ_1'	δ_2'	f_2	f_3	δ_1'	δ_2'
5.655	6.079	6.045	6.055	6.083	0.424	0.390	0.400	0.428
7.667	8.061	8.008	8.022	8.078	0.394	0.341	0.355	0.411
9.669	10.038	9.975	10.044	10.087	0.369	0.306	0.375	0.418
11.659	11.997	11.909	11.875	12.067	0.338	0.250	0.216	0.408

$m=2, Z=90$

に示した4個の内歯車の歯形形状はそれぞれ同じであるのに、剛性等価円環厚さのリム肉厚に対する増加量

($h_e - h$) は内歯車のリム肉厚 h の大きさによってそれぞれ異なっている。すなわち剛性等価円環厚さの増加

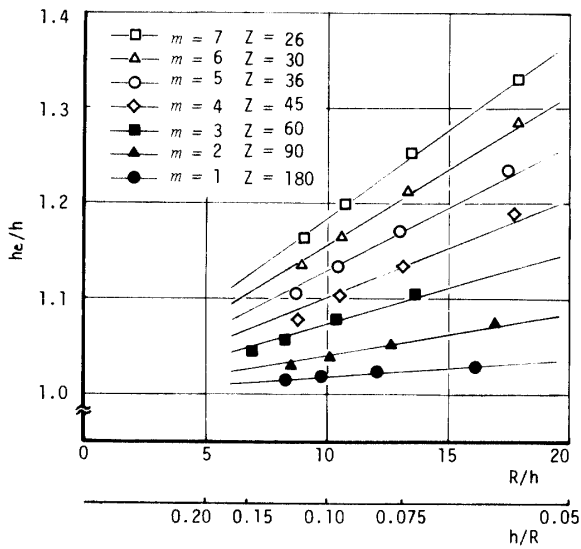


Fig.5 Variation of ratio of h_e to h for R/h (from f_2)

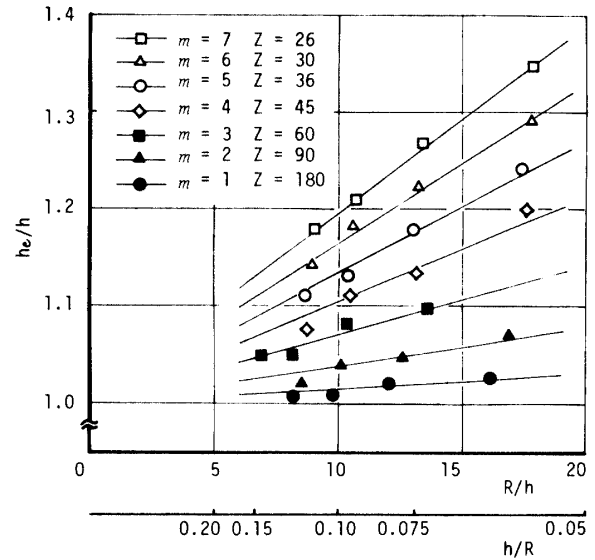


Fig.7 Variation of ratio of h_e to h for R/h (from δ_1')

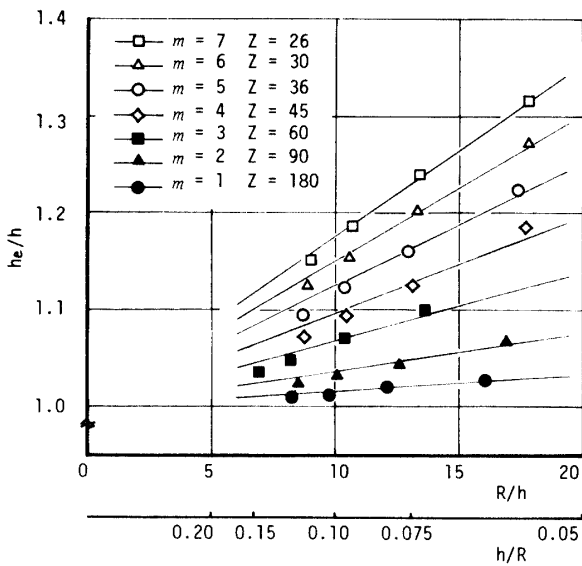


Fig.6 Variation of ratio of h_e to h for R/h (from f_3)

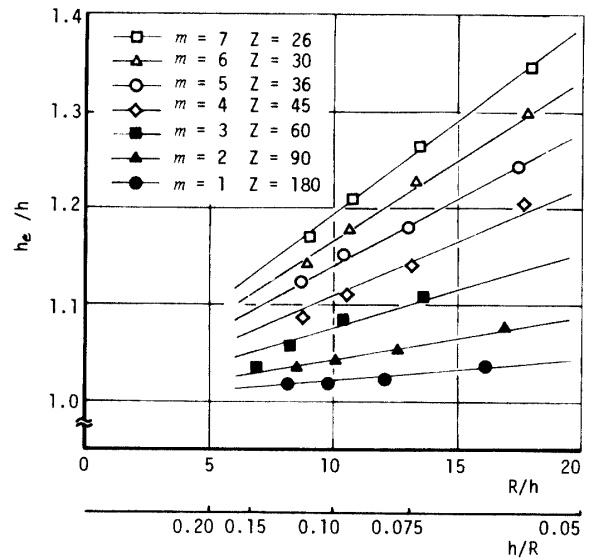


Fig.8 Variation of ratio of h_e to h for R/h (from δ_2')

量 ($h_e - h$) は、リム肉厚が厚くなるにつれて減少していく傾向が考察された。歯数・モジュールの異なる他の内歯車についても同様の傾向がみられた。そこで剛性等価円環厚さ h_e を内歯車のリム肉厚 h で除した無次元量 h_e/h の値について以下考察を行った。

歯数・モジュールの同じ内歯車では、ピッチ円直径が同じであるのでリム肉厚 h を厚くするとリム部中心半径 R も若干ではあるが大きくなる。また薄肉円環のたわみはリム肉厚 h に対するリム部中心半径 R の比 R/h の3乗に比例する。それゆえ内歯車の形状量を表す無次元量 R/h と、内歯車の剛性等価円環厚さを示す無次元量 h_e/h との関係を、歯数・モジュールをパラメータにして Fig.5~Fig.8 に示す。Fig.5 は振動モード $n=2$ による内歯車の固有振動数 f_2 から求めた h_e/h と R/h の関係を横軸に R/h 、縦軸に h_e/h をとり示したものであるが、同一歯数・モジュールの内歯車においては剛性等価円環厚さの増加の割合 $(h_e/h - 1)$ は R/h の値にほぼ比例していることが考察された。なお横軸の R/h は内歯車の形状を表す無次元量であるので、内歯車の形状の相似性から歯数が一定であればリム部中心半径 R 、リム肉厚 h 、モジュール m を比例的に変えても R/h の値は同じ値となる。したがって Fig.5 はモジュールには無関係で歯数だけをパラメータにした7種類の内歯車の h_e/h と R/h の関係を示したものと考えることができる。それゆえ Fig.5 から内歯車の形状比 R/h の値が等しい内歯車では、歯数の少ない内歯車ほど剛性等価円環厚さのリム肉厚に対する比 h_e/h の値が大きいことも考察される。Fig.6, Fig.7, Fig.8 はそれぞれ内歯車の固有振動数 f_3 、圧縮および引張り荷重による内歯車のたわみ δ_1' 、 δ_2' から求めた h_e/h と R/h の関係を示したものであるが、これらのグラフからも Fig.5 の場合の関係と同様なことが考察される。

剛性等価円環厚さのリム肉厚に対する比 h_e/h は、 R/h の値のほか歯数にも関係するので、歯数と h_e/h との関係を R/h をパラメータにして、横軸に歯数 Z 、縦軸に h_e/h をとり Fig.9 に示した。Fig.9 は固有振動数 f_2 から求めた h_e/h と R/h の関係を示した Fig.5 の7本の直線から R/h の値の等しい内歯車の h_e/h の値を読みとり描いたものであるが、これより剛性等価円環厚さのリム肉厚に対する増加の割合 $(h_e/h - 1)$ は歯数 Z にほぼ反比例する関係が得られた。 $(h_e/h - 1)$ は R/h に比例し Z に反比例することから

$$\frac{h_e}{h} - 1 = \frac{aR}{Zh} \quad (a: \text{比例定数}) \quad (15)$$

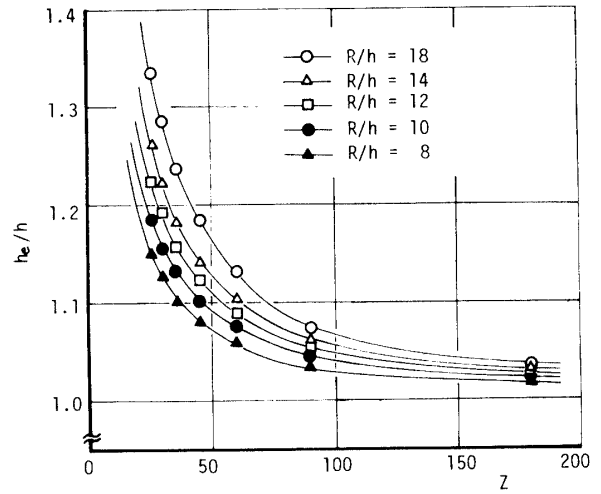


Fig.9 Variation of ratio of h_e to h for Z

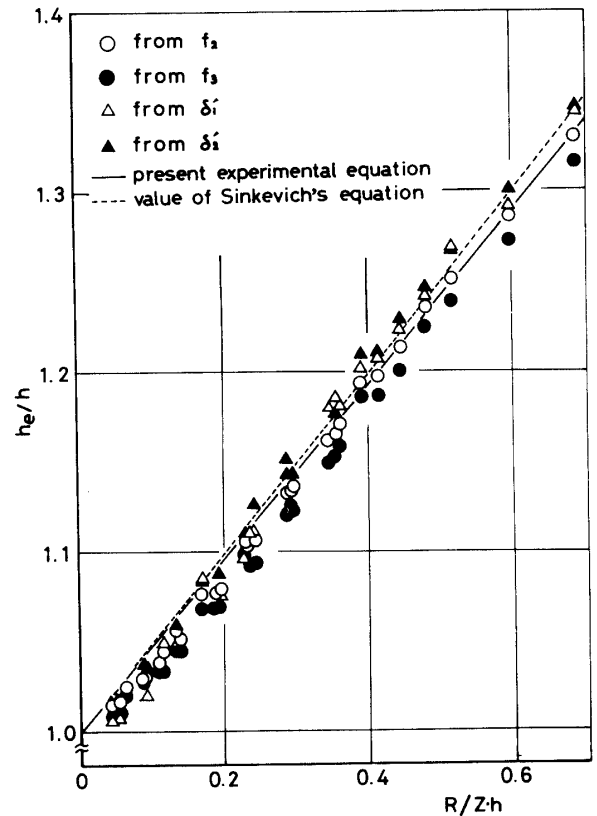


Fig.10 Variation of ratio of h_e to h for R/Zh

と表すことができる。したがって実験に使用した各内歯車の R/Zh の値と、 f_2 、 f_3 、 δ_1' 、 δ_2' の各実験値からそれぞれ求めた h_e/h の値との関係を横軸に R/Zh 、縦軸に h_e/h をとり Fig.10に示した。Fig.10 から (15) 式に示した比例定数 a を求めると、 $a=0.485$ となり内歯車の剛性等価円環厚さ h_e を実験式として (16) 式に示した。

$$h_e = h + \frac{0.485R}{Z} \quad (16)$$

なお(16)式の比例定数 $a=0.485$ はかみあい圧力角 20° 、歯元のたけ $1.25m$ 、歯末のたけ $1m$ の標準内歯車の場合であるが、かみあい圧力角の異なる内歯車、転位をしたあるいはバックラッシュをつけた内歯車などの剛性等価円環厚さは、この比例定数 a の値だけを変えることによって表すことができると思われる。

一方 Sinkevich らによる内歯車の剛性等価円環厚さを表す実験式は、著者らの実験式とは異なる形式で示されており、剛性等価円環厚さのリム肉厚に対する増加の割合が歯数と h/R に反比例することは示していない。しかし彼らの実験式を使って本実験に使用した内歯車の h_e/h と R/Zh の関係を求めた結果、Fig.10 の破線で示した直線となり、実線で示した著者らの実験式とほぼ一致した。

6. 結 言

かみあい圧力角 20° の標準内歯車28個を使って、2種類の実験方法からそれぞれ内歯車の剛性等価円環厚さを求めた結果、次のことが明らかになった。

- (1) 実験から求めた内歯車の面内固有振動数を用いて本研究で導いた内歯車の剛性等価円環厚さは、たわみと静荷重の関係から求めた剛性等価円環厚

さとほぼ一致した。

- (2) 内歯車の剛性等価円環厚さのリム肉厚に対する増加の割合は、円環の切込み数に相等する歯数とリム部円環の中心半径に対するリム肉厚の比に反比例することが明らかとなり、剛性等価円環厚さを示す実験式を表した。
- (3) 内歯車の面内固有振動数は、内歯車を剛性等価円環と質量等価円環のみかけ上2つの等価円環に置き換えることにより求めることができる。

参 考 文 献

- 1) 日高, 寺内, 野原, 大下: 日本機械学会論文集, **43**, 368 (1977)
 - 2) Yu. B. Sinkevich, N.M. Sholomov: Russian Engng. J., **51-6** (1971)
 - 3) 日高, 杉本: 山口大学工学部研究報告, **30**, 1 (1979)
 - 4) R.J. Roark: Formulas for Stress and Strain, McGraw-Hill (1965) p.320
 - 5) S.S. Rao, V. Sundararajan: Trans. ASME. Ser E (1965)
 - 6) 野口: 材料力学演習第2巻, 森北出版, (1976) p.103
 - 7) 湯浅: 材料力学上, コロナ社, (1969) p.213
- (昭和54年10月15日 受理)