

# 自動二輪車の走行運動特性に関する研究 (第1報 有限運動時の運動方程式)

遠藤 信康\*・會田 忠義\*\*

## Analysis of Running Characteristics of Motorcycles (1st Report, Equation of Motion with Finite Displacements)

Nobuyasu ENDO and Tadayoshi AIDA

### Abstract

Equation of motion of a motorcycle with finite motion are derived using a mathematical model of 4 degree of freedom in this paper. Behavior of a motorcycle at traffic accident is easily analyzed applying those basic equation. In analysis, movement of upper body of rider and rotation of steering handlebar are given as data at the traffic accident and sideslip, yawing and rolling of the motorcycle are estimated by numerical integration of basic equation.

#### 1. まえがき

二輪車は路面から二点で支持されているにもかかわらず、非常に低い走行速度を除けば安定かつ安全に走行をすることができ、車体が軽くて小さいことから燃料消費量も少なく、手軽で便利な乗り物として人気がある。しかし二輪車を取り巻く交通環境は、交通量の増加、道路の拡張、車両の高速化、大型車両との混合交通等、決してよい環境とはいえない。また二輪車は慣れると誰にも簡単に乗れるが、単純な操作ミスやわずかな不注意で不安定になり、バランスを崩して車体は転倒し、乗員は道路に投げ出されて非常に危険な状態になる。本研究はこのような二輪車を取り巻く環境や二輪車の特質に鑑み、走行中の二輪車の運動特性を理論的に解明し、二輪車の事故解析に資すること目的

とする。

走行中の二輪車の運動特性については、4自由度<sup>1)2)</sup>あるいは12自由度<sup>3)</sup>の力学モデルを使って解析されているが、いずれも二輪車の変数であるヨー角、ロール角、あるいはハンドル角等を微小なものとして線形化を行っている。従って走行中の微小振動については特性が解析されているが、二輪車の変位が大きくなり転倒するまでの運動については明らかにされていない。そこで本研究では4自由度の力学モデルを使い、線形化を行わずに大きな変位をともなう二輪車の運動に注目し、その特性について検討する。以下二輪車の力学モデル、運動方程式を示す。

#### 2. 二輪車の力学モデル

Fig. 1 に二輪車の力学モデルとその座標系を示す。車体は前輪、ハンドル系(前輪を含む)、乗員、フレーム、後輪の5つを考え、次のような仮定をする。

- 1) 車体のピッチング運動はないものとする。
- 2) 乗員はハンドル操作と上半身を左右に傾けるこ

\*山口県警察本部科学捜査研究所  
(建設工学科・研究生)

\*\*建設工学科

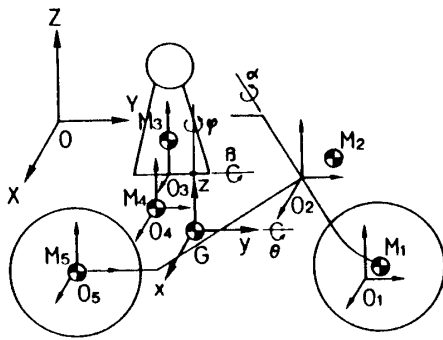


Fig. 1 Motorcycle model and coordinate systems

とができる。

3) 車体は横方向の幅がないものとする。

4) タイヤの変形はなく、一点で支えられているものとする。

座標系は地上に固定した静止座標系O-XYZ, 二輪車の重心に固定した動座標系G-xyz, 車体の各部に動座標系O<sub>i</sub>-x<sub>i</sub>y<sub>i</sub>z<sub>i</sub>を考える。動座標系G-xyzとO<sub>i</sub>-x<sub>i</sub>y<sub>i</sub>z<sub>i</sub>は平行しており、各座標原点の距離は変化せず一定である。用いる記号は次のとおりである (Fig. 2 参照)。

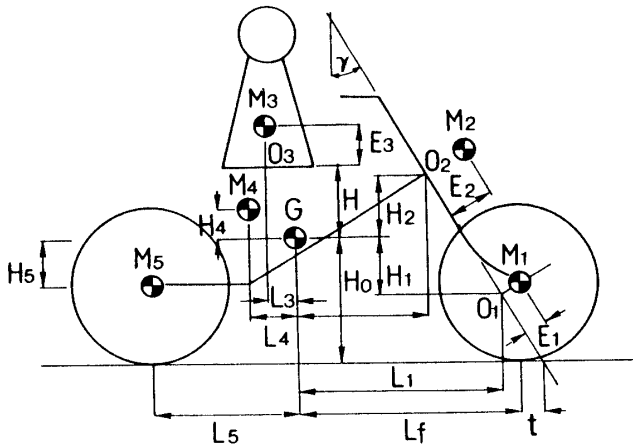


Fig. 2 Dimensions of motorcycle model

$\theta$  : 車体のロール角

$\varphi$  : 車体のヨー角

$\alpha$  : ハンドルの回転角

$\beta$  : 乗員の上半身の傾き角

$\gamma$  : キャスタ角

$\delta$  : 車輪のすべり角

$\zeta$  : 車輪の回転角

H<sub>0</sub> : 二輪車の重心Gの地上からの高さ

H<sub>i</sub> : 二輪車の重心Gから二輪車各部の座標原点O<sub>i</sub>までの垂直距離 (i=1~5)

L<sub>i</sub> : 二輪車の重心Gから二輪車各部の座標原点O<sub>i</sub>までの水平距離 (i=1~5)

L<sub>r</sub> : 二輪車の重心Gから前輪接地部までの水平距離

L<sub>r</sub> : 二輪車の重心Gから後輪接地部までの水平距離

E<sub>i</sub> : 前輪, ハンドル系, 乗員の重心とそれぞれの回転軸の垂直距離

t : トレール

M<sub>0</sub> : 二輪車の総質量

M<sub>i</sub> : 二輪車各部の質量 (i=1~5)

W<sub>f</sub>, W<sub>r</sub> : 前後輪の接地荷重

S<sub>f</sub>, S<sub>r</sub> : 前後輪のサイド・フォース

D<sub>f</sub>, D<sub>r</sub> : 前後輪のドラッグ

C<sub>f</sub>, C<sub>r</sub> : 前後輪のキャンバ・スラスト

F<sub>c</sub> : コーナリング・フォース

F<sub>r</sub> : ころがり抵抗

J<sub>x</sub>, J<sub>y</sub>, J<sub>z</sub> : 二輪車の各軸まわりの慣性モーメント

J<sub>ix</sub>, J<sub>iy</sub>, J<sub>iz</sub> : 二輪車各部の各軸まわりの慣性モーメント (i=1~5)

I<sub>xy</sub>, I<sub>yz</sub>, I<sub>zx</sub> : 二輪車の重心Gに関する慣性乗積

I<sub>ixy</sub>, I<sub>iyz</sub>, I<sub>izx</sub> : 二輪車各部の重心O<sub>i</sub>に関する慣性乗積

### 3. 二輪車の運動方程式

#### 3.1 基礎方程式

ある慣性系 (静止座標系) とそれに対して運動している加速度系 (動座標系) を考え、質量dmの質点Qの慣性系での位置ベクトルをR, 加速度系での位置ベクトルをR', また慣性系からみた加速度系の原点の位置ベクトルをR<sub>0</sub>とすると,

$$R = R_0 + R' \tag{1}$$

である。ここで加速度系の慣性系に対する角速度ベクトルを $\omega$ とすると、位置ベクトルRの時間微分は次のとおりである。

$$\dot{R} = \dot{R}_0 + \dot{R}' + \omega \times R' \tag{2}$$

$$\ddot{R} = \ddot{R}_0 + \ddot{R}' + 2\omega \times \dot{R}' + \dot{\omega} \times R' + \omega \times (\omega \times R') \tag{3}$$

系全体がもつ運動量をP, 角運動量をL, 作用する外力をF<sub>i</sub>とすると,

$$\dot{P} = \sum_i F_i \quad P = \int \dot{R} dm \tag{4}$$

$$\dot{L} = \sum_i (R \times F_i) \quad L = \int (R \times \dot{R}) dm \tag{5}$$

が成り立つ。運動量の時間微分 $\dot{P}$ は(4)式から,

$$\dot{P} = \int \ddot{R} dm = \sum_i F_i \tag{6}$$

となり、(3)式を代入すると,

$$\int \{ \dot{R}_0 + \dot{R}' + \dot{\omega} \times R' + 2\omega \times \dot{R}' + \omega \times (\omega \times R') \} dm$$

$$= \sum_i F_i \quad (7)$$

となる。また角運動量の時間微分は(5)式から、

$$\dot{L} = \int \{ (\dot{R} \times \dot{R}) + (R \times \dot{R}) \} dm = \sum_i (R \times F) i \quad (8)$$

となり、(1)(3)(6)式を代入して整理すると、

$$\int [ R' \times \{ \dot{R}_0 + \dot{R}' + \dot{\omega} \times R' + 2\omega \times \dot{R}' + \omega \times (\omega \times R') \} ] dm = \sum_i (R' \times F) i \quad (9)$$

となる。すなわち(4)(5)式は(7)(9)式のように書きかえられる。

### 3.2 運動方程式の誘導

二輪車の車体の中で最も複雑な運動をする前輪について、その運動方程式を考える。Fig. 3 に示すようにハンドルの回転軸の延長線と、これに垂直で前輪の重心を通る直線の交点を原点とする動座標系  $O_1-x_1y_1z_1$  を考え、さらに前輪の重心を原点とする動座標系  $O_1'-x_1'y_1'z_1'$  を考える。

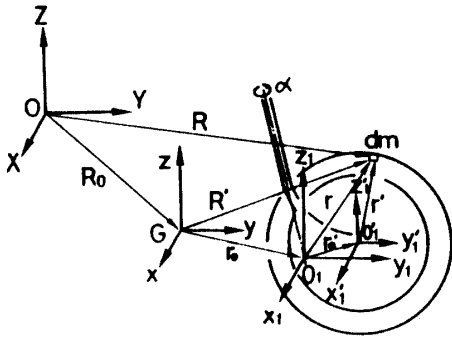


Fig. 3 Coordinate system of front wheel

今、座標系  $G-xyz$  の座標系  $O-XYZ$  に対する角速度を  $\omega_R$ 、座標系  $O_1-x_1y_1z_1$  の座標系  $G-xyz$  に対する角速度を  $\omega_r$ 、さらに座標系  $O_1'-x_1'y_1'z_1'$  の座標系  $O_1-x_1y_1z_1$  に対する角速度を  $\omega_r'$  とするとき、ベクトル  $r_0, r_0', r'$  は、それぞれの座標系  $G-xyz, O_1-x_1y_1z_1, O_1'-x_1'y_1'z_1'$  において時間的変化はなく、その時間微分がゼロになることを考慮すると、位置ベクトル  $R, R', r$  とそれぞれの時間微分は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} R &= R_0 + R' \\ \dot{R} &= \dot{R}_0 + \dot{R}' + \omega_R \times R' \\ \dot{R}' &= \dot{R}'_0 + \dot{R}'_1 + \omega_R \times R' + 2\omega_r \times R' + \omega_r \times (\omega_r \times R') \end{aligned} \right\} (10)$$

$$\left. \begin{aligned} R' &= r_0 + r \\ \dot{R}' &= \dot{r} + \dot{\omega}_r \times r + 2\omega_r \times r + \omega_r \times (\omega_r \times r) \end{aligned} \right\} (11)$$

$$\left. \begin{aligned} r &= r_0' + r' \\ \dot{r} &= \dot{r}_0' + \dot{r}' + \omega_r' \times r' + \omega_r' \times (\omega_r' \times r') \end{aligned} \right\} (12)$$

(10)(11)(12)式を(7)に代入し、重心の性質により、

$$\int r' dm = 0 \quad (13)$$

であることを考慮すると次のようになる。

$$\int \{ \dot{R}_0 + \dot{\omega} \times r_1' + \omega_r \times (\omega_r \times r_0') + \dot{\omega}_r \times R' + 2\omega_r \times (\omega_r \times r_0') + \omega_r \times (\omega_r \times R') \} dm = \sum_i F_i \quad (14)$$

同様にして(9)式は次のようになる。

$$\int R' \times \{ \dot{\omega}_r' \times r' + \omega_r' \times (\omega_r' \times r') + \dot{\omega}_r \times r + 2\omega_r \times (\omega_r \times r) + \omega_r \times (\omega_r \times R') + 2\omega_r \times (\omega_r \times r_0') \} dm = \sum_i (R' \times F) i \quad (15)$$

位置ベクトル  $R_0, R', r_0, r_0', r'$  は各座標系の単位ベクトルを用いて次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= Xi + Yj + Zk \\ R' &= X'e_1 + Y'e_2 + Z'e_3 \\ r_0 &= xe_1 + ye_2 + ze_3 \\ r_0' &= x'e_1' + y'e_2' + z'e_3' \\ r' &= x''e_1'' + y''e_2'' + z''e_3'' \end{aligned} \right\} (16)$$

上式において  $(i, j, k), (e_1, e_2, e_3), (e_1', e_2', e_3')$  及び  $(e_1'', e_2'', e_3'')$  は、それぞれ座標系  $O-xyz, G-xyz, O_1-x_1y_1z_1$  及び  $O_1'-x_1'y_1'z_1'$  における単位ベクトルであり、これらの間には次の関係がある。

$$\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vn & -m & un \\ vm & n & um \\ -u & 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'n' & v'm' & -u' \\ -m' & n' & 0 \\ u'n' & u'm' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} e_1'' \\ e_2'' \\ e_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'n' & v'm' & -u' \\ -m'q + u'n'p' & n'q' + u'm'p' & v'p' \\ m'p' + u'n'q' & -n'p' + u'm'q' & v'q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} u &= \sin\theta & v &= \cos\theta & m &= \sin\varphi & n &= \cos\varphi \\ u' &= \sin\theta' & v' &= \cos\theta' & m' &= \sin\varphi' & n' &= \cos\varphi' \end{aligned}$$

$$\theta' = -\alpha \sin \gamma \quad \varphi' = \alpha \cos \gamma \quad p' = \sin \zeta \quad q' = \cos \zeta$$

一方、角速度ベクトル $\omega_R, \omega_r, \omega_r'$ は、 $\omega_R$ が車体全体のローリング $\dot{\theta}$ とヨーイング $\dot{\varphi}$ で、 $\omega_r'$ はハンドルの回転角速度 $\dot{\alpha}$ 、 $\omega_r$ が前輪の回転角速度 $\dot{\zeta}$ で表されることから、それぞれ次のようになる。

$$\omega_R = \dot{\theta} e_2 + \dot{\varphi} e_3 \tag{20}$$

$$\omega_r = \dot{\theta}' e_2' + \dot{\varphi}' e_3' = -p \dot{\alpha} e_2' + q \dot{\alpha} e_3' \tag{21}$$

$$\omega_r' = -\dot{\zeta} e_1'' \tag{22}$$

ここで $\theta', \varphi'$ は座標系 $O-x_1y_1z_1$ の $y_1$ 軸、 $z_1$ 軸まわりの角速度を表わし、 $p = \sin \gamma, q = \cos \gamma$ である。

(16), (20)~(22)式を(14)式に代入して積分を実行すると(14)式の左辺は次のようになる。ただし、(16)式においてベクトル $r_0$ は座標系 $G-xyz$ の $yz$ 平面内にあることから $x = 0$ 、ベクトル $r_0'$ は座標系 $O_1-x_1y_1z_1$ の $y_1z_1$ 平面内にあることから $x' = 0$ である。また前輪はその幅が小さいので $x'' = 0$ とし、車体の横方向( $e_1$ 方向)及び前後方向( $e_2$ 方向)の積分結果について記述する。

左辺第1項

$$\int \dot{R} \, dm = (\ddot{X}_i + \ddot{Y}_j) M_1 \\ = (n\ddot{X} + m\ddot{Y}) v M_1 e_1 + (-m\ddot{X} + n\ddot{Y}) M_1 e_2 \tag{23}$$

左辺第2項

$$\int \dot{\omega}_r \times r_0 \, dm = -n'v'E_1 \dot{\alpha} M_1 e_1 - m'v'E_1 \dot{\alpha} M_1 e_2 \tag{24}$$

左辺第3項

$$\int \omega_r \times (\omega_r \times r_0') \, dm = (-u'n'p + m'q) E_1 \dot{\alpha}^2 M_1 e_1 \\ - (u'm'p + n'q) E_1 \dot{\alpha}^2 M_1 e_2 \tag{25}$$

左辺第4項

$$\int \dot{\omega}_R \times R' \, dm \\ = \{\dot{\theta}(H_1 + v'E_1 p) - \ddot{\varphi}(L_1 + n'E_1 q + u'm'E_1 p)\} \\ M_1 e_1 + \ddot{\varphi}(-m'q + u'n'p) E_1 M_1 e_2 \tag{26}$$

左辺第5項

$$\int 2\omega_R \times (\omega_r \times r_0') \, dm = 2(u'\dot{\theta} + m'v'\dot{\varphi}) E_1 \dot{\alpha} M_1 e_1 \\ - 2n'v'E_1 \dot{\varphi} \dot{\alpha} M_1 e_2 \tag{26}$$

左辺第6項

$$\int \omega_R \times (\omega_R \times R') \, dm \\ = -(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)(-m'q + u'n'p) E_1 M_1 e_1 \\ + \{\dot{\varphi} \dot{\theta}(H_1 + v'E_1 p) \\ - \dot{\varphi}^2(L_1 + n'E_1 q + u'm'E_1 p)\} M_1 e_2 \tag{27}$$

(16), (20)~(22)式を(15)式に代入して積分を実行すると(15)式の左辺は次のようになる。ただし、車体のローリング( $y$ 軸まわりの回転)及びヨーイング( $z$ 軸まわりの回転)の積分結果について記述する。

左辺第1項

$$\int R' \times (\dot{\omega}_r \times r') \, dm = -v'm'J_{1x} \dot{\zeta} e_2 + u'J_{1x} \dot{\zeta} e_3 \tag{28}$$

左辺第2項

$$\int R' \times \{(\omega_r' \times (\omega_r' \times r'))\} \, dm = 0 \tag{30}$$

左辺第3項

$$\int R' \times (\dot{\omega}_r \times r) \, dm \\ = \{m'u'qE_1 - n'(v'H_1 + E_1 p)\} E_1 M_1 \\ + \{m'u'(pI_{1yz} + qI_{1zz}) - n'(pI_{1zz} + qI_{1yz})\} \\ \ddot{\alpha} e_2 + [v'(n'L_1 + qE_1) E_1 M_1 \\ + v'(pI_{1yz} + qI_{1zz})] \ddot{\alpha} e_3 \tag{31}$$

左辺第4項

$$\int 2R' \times \omega_r \times (\omega_r' \times r') \, dm \\ = 2[p(n'I_{1yz} - m'u'I_{1yy}) \\ - q(n'I_{1zz} - m'u'qI_{1yz})] \dot{\alpha} \dot{\zeta} e_2 \\ - 2[(pI_{1yy} - qI_{1yz})] v' \dot{\alpha} \dot{\zeta} e_3 \tag{32}$$

左辺第5項

$$\int R' \times \omega_r \times (\omega_r \times r) \, dm \\ = [(qm' - pn'u')H_1 E_1 M_1 + v'm' \\ \{(q^2 - p^2)I_{1yz} + pq(I_{1zz} - I_{1yy})\}] \dot{\alpha}^2 e_2 \\ + [-(qm' - pn'u')L_1 E_1 M_1 - u' \\ \{(q^2 - p^2)I_{1yz} \\ + pq(I_{1zz} - I_{1yy})\}] \dot{\alpha}^2 e_3 \tag{33}$$

左辺第6項

$$\int R' \times (\dot{\omega}_r \times R') \, dm \\ = \dot{\theta} [\{(H_1 + v'pE_1)^2 + (m'q - u'n'p)^2 E_1^2\} M_1 \\ + \{v'^2 + m'^2 + u'^2 n'^2\} I_{1zz} - Zm'n'u'I_{1yz}] e_2 \\ - \ddot{\varphi} [\{(H_1 L_1 + (n'q + u'm'p)(E_1 H_1 + pv'E_1^2) \\ + v'pE_1 L_1)\} M_1 + v' \{n'I_{1yz} + u'm'I_{1zz}\}] e_2 \\ - \dot{\theta} [\{(H_1 L_1 + (n'q + u'm'p)(E_1 H_1 + pv'E_1^2) \\ + v'pE_1 L_1)\} M_1 + v' \{n'I_{1yz} + u'm'I_{1zz}\}] e_3 \\ + \ddot{\varphi} [\{(L_1^2 + (q^2 + u'^2 p^2) E_1^2 + 2L_1 E_1 (n'q + u'm'p)\} \\ M_1 + \{I_{1yy} + u'^2 I_{1zz}\}] e_3 \tag{34}$$

左辺第7項

$$\int 2R' \times \omega_R \times (\omega_r' \times r') \, dm \\ = 2\dot{\zeta} [\dot{\theta}(m'^2 - v'^2 u'^2 n'^2) I_{1yz} + u'n'm'(I_{1yy} - I_{1zz}) \\ - \dot{\varphi} \{-u'm'v'I_{1yz} + v'n'I_{1zz}\}] e_2 \\ + 2\dot{\zeta} [\dot{\theta} v' \{n'I_{1yy} + u'm'I_{1yz}\} \\ + \dot{\varphi} \{I_{1yz} - u_1^2 I_{1yz}\}] e_3 \tag{35}$$

左辺第8項

$$\int 2R' \times \omega_R \times (\omega_r \times r) \, dm \\ = 2\dot{\alpha} \dot{\theta} [\{u'(H_1 + v'pE_1) E_1 + (m'q - u'n'p) E_1^2\}$$

$$\begin{aligned}
 & M_1 + u'v'(pI_{1zz} + qI_{1yz}) + v'n' \\
 & \{m'qI_{1yy} - u'n'I_{1zz} + (m'p - u'n'q)I_{1yz}\} e_2 \\
 & + 2\dot{\alpha}\dot{\varphi} [(H_1 + v'pE_1)E_1M_1 + v'(pI_{1zz} + qI_{1yz})v'm'e_2 \\
 & - 2\dot{\alpha}\dot{\theta} [(L_1 + n'qE_1 + u'm'pE_1)E_1M_1 \\
 & + n'qI_{1yy} + u'm'I_{1zz} + (n'q + u'm'p)I_{1yz}] u'e_3 \\
 & - 2\dot{\alpha}\dot{\varphi} \{ [L_1 + n'qE_1 + m'q(q^2 - p^2)E_1 \\
 & + u'p(m' + n')E_1] E_1M_1 + (m' + n')qI_{1yy} \\
 & + u'(m' + n')pI_{1zz} + \{(n' - m')p + (m' + n')u'q\} \\
 & I_{1yz}\} v'm'e_3 \quad (36)
 \end{aligned}$$

以上により、車体の中で最も複雑な運動をする前輪の運動方程式が誘導されたので、同様にして他の部分の運動方程式を誘導した結果を次に示す。なおハンドル系は前輪の回転がないだけで、他は前輪と同じであるので省略する。

車体の横方向 (x 方向) の慣性力

乗員系：

$$\begin{aligned}
 & (n\ddot{X} + m\ddot{Y})vM_3 - \cos\beta \cdot E_3M_3\ddot{\beta} - \sin\beta \cdot E_3M_3\dot{\beta}^2 \\
 & + \{\dot{\theta}(H_3 + \cos\beta \cdot E_3) - \dot{\varphi} \cdot L_3\} M_3 + 2\sin\beta \\
 & \cdot E_3M_3\dot{\theta}\dot{\beta} - (\theta^2 + \varphi^2)\sin\beta \cdot E_3M_3 \quad (37)
 \end{aligned}$$

フレーム系：  $(n\ddot{X} + m\ddot{Y})vM_4 + (\dot{\theta}H_4 - \dot{\varphi}L_4)M_4$  (38)

後輪系：  $(n\ddot{X} + m\ddot{Y})vM_5 + (\dot{\theta}H_5 - \dot{\varphi}L_5)M_5$  (39)

車体の前後方向 (y 方向) の慣性力

乗員系：

$$\begin{aligned}
 & (-m\ddot{X} + n\ddot{Y})M_3 + \sin\beta \cdot E_3M_3\ddot{\varphi} - 2\cos\beta \cdot E_3M_3 \\
 & \dot{\varphi}\dot{\beta} + \{\theta\dot{\varphi}(H_3 + \cos\beta \cdot E_3) - \varphi^2L_3\} M_3 \quad (40)
 \end{aligned}$$

フレーム系：

$$(-m\ddot{X} + n\ddot{Y})M_4 + \theta\dot{\varphi}H_4M_4 - \varphi^2L_4M_4 \quad (41)$$

後輪系：  $(-m\ddot{X} + n\ddot{Y})M_5 + \theta\dot{\varphi}H_5M_5 - \varphi^2L_5M_5$  (42)

ローリング (y 軸まわりの回転) の慣性モーメント

乗員系：

$$\begin{aligned}
 & - \{(H_3\cos\beta + E_3)E_3M_3 + I_3zz\} \ddot{\beta} \\
 & - H_3E_3\sin\beta M_3\dot{\beta}^2 + \{ (H_3 + E_3\cos\beta)^2 \\
 & + \sin^2\beta \cdot E_3^2 \} M_3 + \sin^2\beta \cdot I_3zz \} \dot{\theta} \\
 & - \{ (H_3 + E_3\cos\beta)L_3M_3 + I_3yz \} \ddot{\varphi} \\
 & + \{ (H_3 + E_3\cos\beta)E_3\sin\beta - \sin^2\beta E_3^2 \} M_3\dot{\beta}\dot{\theta} \quad (43)
 \end{aligned}$$

フレーム系：  $(H_4^2 \cdot M_4 + I_4zz)\ddot{\theta} - (H_4L_4M_4 + I_4yz)\ddot{\varphi}$  (44)

後輪系：

$$\begin{aligned}
 & (H_5^2 \cdot M_5 + I_5zz)\ddot{\theta} - (H_5L_5M_5 + I_5yz)\ddot{\varphi} \\
 & - 2\zeta\theta I_5yz - 2\zeta\varphi I_5zz \quad (45)
 \end{aligned}$$

ヨーイング (z 軸まわりの回転) の慣性モーメント

乗員系：

$$\begin{aligned}
 & (E_3L_3M_3 + I_3yz)\cos\beta \cdot \ddot{\beta} + (E_3L_3M_3 + I_3yz)\sin\beta \\
 & \cdot \dot{\beta}^2 - \{ (H_3 + E_3\cos\beta)L_3M_3 + I_3yz \} \dot{\theta} \\
 & + \{ (L_3^2 + E_3^2\sin^2\beta)M_3 + \sin^2\beta I_3zz \} \ddot{\varphi} \quad (46)
 \end{aligned}$$

フレーム系：

$$-(H_4L_4M_4 + I_4yz)\ddot{\theta} + (L_4^2M_4 + I_4zz)\ddot{\varphi} \quad (47)$$

後輪系：

$$\begin{aligned}
 & -(H_5L_5M_5 + I_5yz)\ddot{\theta} + (L_5^2M_5 + I_5zz)\ddot{\varphi} \\
 & + 2\zeta\theta I_5yz - 2\zeta\varphi I_5zz \quad (48)
 \end{aligned}$$

以上の結果から、二輪車全体の運動方程式をマトリックス表示すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & A_1(\theta, \varphi)\dot{d} + A_2 \begin{Bmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\varphi}^2 \\ \dot{\theta}\dot{\varphi} \end{Bmatrix} + A_3\dot{\beta} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} + A_4\dot{\zeta} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \\
 & + A_5 \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\zeta} \end{Bmatrix} + A_6 \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\alpha}^2 \end{Bmatrix} + A_9\dot{\alpha} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\zeta} \end{Bmatrix} = F \quad (48)
 \end{aligned}$$

$d = \{X, Y, \theta, \varphi\}^T$ ,  $F$ : 外力のベクトル  
各マトリックスの詳細は付録に記載したとおりである。

### 3.3 作用する外力とモーメント

路面から作用する外力として、前後輪に作用するサイド・フォース  $S_r, S_f$ , ドラグ  $D_r, D_f$ , キャンバ・スラスト  $C_r, C_f$  を考える。車体に走行抵抗として作用する空気力は小さいので省復する。(Fig. 4 参照)

x 方向の力：

$$\{(S_f + C_f)\cos\alpha_q - D_f\sin\alpha_q + (S_r + C_r)\}\cos\theta \quad (50)$$

y 方向の力：

$$-(S_f + C_f)\sin\alpha_q - D_f\cos\alpha_q - D_r \quad (51)$$

y 軸まわりのモーメント：

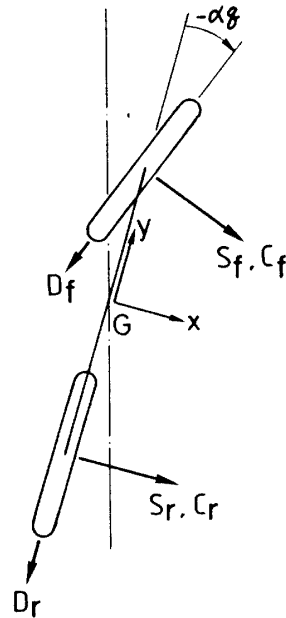


Fig. 4 Side forces, drag forces and camber thrusts acting on wheels

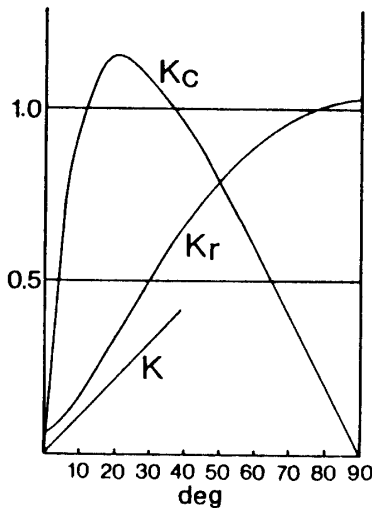


Fig. 5

$K_c$  : Cornering force per unit load  
 $K_r$  : Rolling resistance per unit load  
 $K$  : Camber thrust per unit load

$$\begin{aligned}
 &-(S_r + C_r) \cos \alpha q \cdot H_0 \cos \theta + D_r \sin \alpha q \cdot H_0 \cos \theta \\
 &-(S_r + C_r) H_0 \cos \theta + (W_r + W_r) H_0 \sin \theta \\
 &+ M_3 g \{ H_3 \sin \theta + E_3 \sin (\theta + \beta) \} \\
 &-\{ W_r \cdot tq \cdot \sin \alpha q + M_2 q E_2 \sin \alpha q \} \sin \theta \quad (52)
 \end{aligned}$$

z軸まわりのモーメント:

$$\begin{aligned}
 &\{ -(S_r + C_r) \cos \alpha q + D_r \sin \alpha q \} L_r \cdot \cos \theta \\
 &+ (S_r + C_r) \cdot L_r \cdot \cos \theta \quad (53)
 \end{aligned}$$

ここでサイド・フォース  $S_r$ ,  $S$  及びドラッグ  $D_r$ ,  $D_r$  は,

$$\left. \begin{aligned} S_r &= F_c \cos \delta_r - F_r \sin \delta_r \\ S_r &= F_c \cos \delta_r - F_r \sin \delta_r \end{aligned} \right\} (54)$$

$$\left. \begin{aligned} D_r &= F_r \cos \delta_r + F_c \sin \delta_r \\ D_r &= F_r \cos \delta_r + F_c \sin \delta_r \end{aligned} \right\} (55)$$

で表わされ、コーナリング・フォース  $F_c$ , ころがり抵抗  $F_r$  は車輪の接地荷重  $W$  によって次のように表わされる。

$$F_c = K_c \cdot W \quad F_r = K_r \cdot W \quad (56)$$

付 録

運動方程式の各マトリックス

$$A_i = \begin{pmatrix} nvM_0 & mvM_0 & (H_2 + v'pE_2)M_2 + (H_3 + E_3 \cos \beta)M_3 + H_4 M_4 + H_5 M_5 & -(L_2 + n'qE_2 + u'm'pE_2)M_2 - L_3 M_3 - L_4 M_4 - L_5 M_5 \\ -mM_0 & nM_0 & 0 & (u'n'p - m'q)E_2 M_2 + E_3 \sin \beta M_3 \\ 0 & 0 & \left\{ (H_2 + v'pE_2)^2 + (m'q - u'n'p)^2 E_2^2 \right\} M_2 + (v^2 + m'^2 + u'^2 n'^2) I_2 z z & -\{ (H_2 L_2 + (n'q + u'm'p) (E_2 H_2 + v'pE_2^2) + v'pE_2 L_2 \} M_2 \\ 0 & 0 & \left( -2m'n'u' I_2 y z + \{ (H_3 + E_3 \cos \beta)^2 + E_3^2 \sin^2 \beta \} M_3 \right. & \left. -v'(n' I_2 y z + u'm' I_2 z z) - (H_3 + E_3 \cos \beta) L_4 M_3 - I_3 y z \right) \\ & & + \sin^2 \beta I_3 z z + H_4^2 M_4 + I_4 z z + H_5^2 M_5 + I_5 z z & -H_4 L_4 - I_4 y z - H_5 L_5 - I_5 y z \\ 0 & 0 & \left( -\{ (H_2 L_2 + (n'q + u'm'p) (E_2 H_2 + v'pE_2^2) + v'pE_2 L_2 \} M_2 \right. & \left. \{ L_2^2 + (q^2 + u'^2 p^2) E_2^2 + 2L_2 E_2 (n'q + u'm'p) \} M_2 + I_2 y y + u'^2 I_2 z z \right. \\ & & \left. -v'(n' I_2 y z + u'm' I_2 z z) - (H_3 + E_3 \cos \beta) L_4 M_3 - I_3 y z \right) & \left. + (L_3^2 + E_3^2 \sin^2 \beta) M_3 + \sin^2 \beta I_3 z z + L_4^2 M_4 + I_4 z z \right. \\ & & -H_4 L_4 - I_4 y z - H_5 L_5 - I_5 y z & \left. + L_5^2 M_5 + I_5 z z \right) \end{pmatrix}$$

またキャンバ・スラスト  $C_r$ ,  $C_r$  は,

$$C_r, C_r = K \cdot W \quad (57)$$

であり,  $K_r$ ,  $K_r$  の車輪の横すべり角  $\delta$  による変化及び  $K$  のキャンバ角による変化は Fig. 5 に示すとおりである。

4. 結 び

自動二輪車の走行運動特性を解析するため, 4 自由度の力学モデルを考え, その運動方程式を誘導した。ハンドルや車体の振動特性の解析が目的ではないので, ハンドル角や乗員の上半身の傾き角はデータとして与えることとし, 車輪に作用するセルク・アライニング・トルクは省略した。この方程式の数値解析を行うことによって, 事故時における自動二輪車の転倒にいたるまでの挙動を解析することが可能である。

最後に, 本研究にあたり資料の提供や御助言を下された日本自動車研究所 青木章氏, ヤマハ発動機(株) 長谷川晃氏に深く感謝するとともに, 研究の機会を与えて頂いた山口県警察本部科学捜査研究所長 鳥谷金久氏に厚く謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 近藤政市ほか: 二輪車の安定性に関する理論的研究, 自動車技術, Vol.17, No.1 (1963) p.8
- 2) 井口雅一: 二輪車の運動力学, 機械の研究, Vol. 14, No.7 (1962) p.34, No.8 (1962) p.37
- 3) Nishimi, Aoki, Katayama: Analysis of Straight Running Stability of Motorcycles, 10th Int. Tech. Conf. on ESV (1985)
- 4) 青木 章ほか: 二輪車の操安性の予測技術と CAE, 自動車技術, Vol.40, No.3 (1986) p.324
- 5) 景山克三: 二輪車の運動特性, 国際交通安全学会誌, Vol.3, No.1 (1977) p.15

(昭和63年 4 月14日 受理)

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \begin{pmatrix} (m'q-u'n'p)E_2M_3 & (m'q-u'n'p)E_2M_2 & 0 \\ -E_3\sin\beta M_3 & -E_3\sin\beta M_2 & \\ 0 & -(L_2+n'qE_2+u'm'pE_2)M_2 & (H_2+v'pE_2)M_2+(H_3+E_3\cos\beta)M_3 \\ & -L_3M_3-L_4M_4-L_5M_5 & +H_4M_4-H_5M_5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 A_3 &= \begin{pmatrix} 2E_3\sin\beta M_3 & 0 & -E_3\sin\beta M_3 \\ 0 & -2E_3\cos\beta M_3 & 0 \\ \{(H_3+E_3\cos\beta)E_3\sin\beta+E_3^2\sin^2\beta\}M_3 & 0 & -H_3E_3\sin\beta M_3 \\ 0 & 0 & (E_3L_3M_3+I_3yz)\sin\beta \end{pmatrix} \\
 A_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2\{(m'^2v'^2-u'^2n'^2)I_1yz+u'm'n'(I_1yy-I_1zz)\} & 2\{n'm'v'I_1yz-v'n'I_1zz\} \\ -2I_5yz & -2I_5zz \\ 2v'(n'I_1yy+u'm'I_1yz)+2I_5yy & 2(1-u'^2)I_1yz+2I_5yz \end{pmatrix} \\
 A_5 &= \begin{pmatrix} -E_3\cos\beta M_3 & -v'm'J_1x \\ 0 & u'J_1x \\ -\{(H_3\cos\beta+E_3)E_3M_3+I_3zz\} & 0 \\ (E_3L_3M_3+I_3yz)\cos\beta & 0 \end{pmatrix} \\
 A_6 &= \begin{pmatrix} -n'v'E_2M_2 & (m'q-u'n'p)E_2M_2 \\ -m'v'E_2M_2 & (n'q-u'm'p)E_2M_2 \\ \{(m'u'q'E_2-n'(v'H_2+E_2p)\}E_2M_2 & \{(qm'-pn'u')H_2E_2M_2 \\ +m'u'(pI_2yz+qI_2zz)-n'(pI_2zz+qI_2yz) & +v'm'\{(q^2-p^2)I_2yz+pq(I_2zz-I_2yy)\} \\ v'(n'L_2+qE_2)E_2M_2+v'(pI_2yz+qI_2zz) & \{(qm'-pn'u')L_2E_2M_2 \\ & -u'\{(q^2-p^2)I_2yz+pq(I_2zz-I_2yy)\} \end{pmatrix} \\
 A_7 &= \begin{pmatrix} 2u'E_2M_2 & 0 & 0 \\ 0 & -2n'v'E_2M_2 & 0 \\ 2\{(u'(H_2+v'pE_2)E_2+(m'q-u'n'p)E_2^2)M_2 & 2\{(H_2v'pE_2)E_2M_2+v'(pI_2zz+qI_2yz)\}v'm' & 2p(nI_1yz-m'u'I_1yy) \\ +v'n'\{n'qI_2yy-u'n'I_2zz+(m'p-u'n'q)I_2yz\} & & -2q(n'I_1zz-m'u'I_1yz) \\ -2\{(L_2+n'qE_2+u'm'pE_2)E_2M_2 & -2\{(L_2+n'qE_2+m'q(q^2-p^2)E_2+u'p(m'+n')E_2)E_2M_2 & \\ +n'qI_2yy+u'm'I_2zz+(n'p+u'm'q)I_2yz\}u' & +\{(m'+n')qI_2yy+u'(m'+n')pI_2zz+\{(n-m')p+(n'+m')qu'\}I_2yz\}v'm' & -2v'(pI_1yy-qI_1yz)v' \end{pmatrix} \\
 F &= \begin{pmatrix} \{(S_r+C_r)\cos\alpha q-D_r\sin\alpha q+(S_r+C_r)\}\cos\alpha \\ -(S_r+C_r)\sin\alpha q-D_r\cos\alpha q-D_r \\ -(S_r+C_r)\cos\alpha q\cdot H_0\cos\theta+D_r\sin\alpha q\cdot H_0\cos\theta-(S_r+C_r)H_0\cos\theta \\ \{(W_r+W_r)H_0\sin\theta+M_3g\{H_3\sin\theta+E_3\sin(\theta+\beta)\} \\ -(W_r\cdot tq\cdot\sin\alpha q+M_2gE_2\sin\alpha q)\sin\theta \\ \{-(S_r+C_r)\cos\alpha q+D_r\sin\alpha q\}L_r\cdot\cos\theta+(S_r+C_r)L_r\cdot\cos\theta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$