

# 不感帯要素のある2次離散値制御系の有限整定時間応答

川 添 容 宏\*

## A Finite Settling Time Response of the 2nd Discrete-Data Control System with a Dead Zone Element

Yasuhiro KAWAZOE

### Abstract

In general, the settling time is infinite in continuous control systems which have the transient response without overshoots. However, in a discrete-data control system, we can obtain a finite settling time response. In this paper, the nonlinear discrete-data control system having 2nd order linear transfer function was considered about the response to a step-function input, and the state-transition method, which is more available for complicated problems, was used in the analysis or synthesis of the control system instead of the classical method with the aid of the Z-transform. The dead zone which has a general characteristic was picked up as an example of nonlinear elements, and the compensating method by a digital controller which was treated as a variable gain element with the nonlinear element, was used to settle the transient response in the minimum sampling numbers.

In consequence, it is shown that the gain of a system has no effect on the transient response, but has an effect on the pulse-transfer function of the digital controller.

### 1. 緒 言

一般に連続制御系においては、オーバーシュートすることなく過渡応答をさせるには無限大の時間を必要とするが、離散値制御系においては、有限なる時間で応答を完了させることができる<sup>1)</sup>。すなわち、有限整定時間応答といわれているのがこれであり、連続系には見られない離散値系の有用なる特徴の一つである。

本報告では、非線形離散値の2次制御系について、評価基準をステップ関数入力のもとで、最小サンプリング数にて有限整定時間応答をするように検討を行なう。

離散値系の解析、シンセシスのz変換による従来の方法は、特に、線形系の比較的簡単な系に対してはきわめて有効であるが、非線形要素を含んだ系や、多次元系になると、非常に複雑になってくる<sup>2)</sup>。一方、状態空間による状態推移による解析法によると、前記の比較的簡単な線形系に対しては、むしろ従来からのz変換による方法よりも複雑となるが、反面、非線形系

や多次元系においては従来の方法によるほど複雑にならず、かなり容易に、しかもデジタル計算機に適した組織的統一的な解を求めることができる<sup>3)</sup>。

ここでは、この状態空間による新しい手法に基いて、非線形要素として、一般化された不感帯要素を有する2次制御系について、最適な応答を得るように補償を行なう。

離散値系の補償法としては、大別して、等価線形近似法とデジタル制御器による方法があるが、ここではデジタル計算機により簡単に構成することのできる後者の方法について考察を行なう。また、非線形要素の取り扱いについては、デジタル補償要素と一緒に結合（これをD-N結合という）して、各サンプリング時点において各々異なった値をとる可変ゲイン要素とした。

### 2. 状態空間法について

#### 2.1 状態空間による系の記述<sup>4)</sup>

\*工業短期大学部電気工学教室

系に関する変数として、入力変数、状態変数、出力変数を考え、これらを各々  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  なるベクトル量で表わすと、ある時刻  $t$  における入力空間は  $\mathbf{m}$  がとり得るすべての値の集合で形成されることになる。  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  についても同様なことがいえる。これらの関係を図示すると Fig. 1 のようになる。

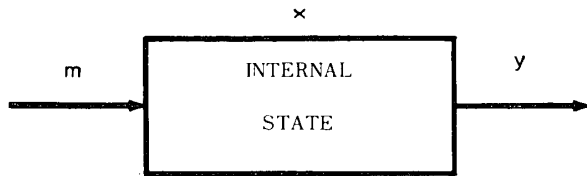


Fig. 1 State-variable representation of a system

$\mathbf{m}$ : The input state variable  
 $\mathbf{x}$ : The process state variable  
 $\mathbf{y}$ : The output state variable

いま、系の初期時刻を  $t_0$ 、任意の時刻を  $t$  とすると、系の状態は(1)式で表わされる。

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t_0); \mathbf{m}(t_0, t)] \quad (1)$$

ところで、一般に系の状態は、微分方程式で記述され、(1)式は(2)式のような一般形で表わされる。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t); \mathbf{m}(t)] \quad (2)$$

特に線形定常の系は、定係数線形連立一階微分方程式により記述されるつぎのようなベクトル形式で表示される。

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t) \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{v}(t)$  は入力量  $m_i$  と状態量  $x_i$  の列ベクトル、 $\mathbf{A}$  は係数行列を表わす。(3)式をラプラス変換すると、

$$s\mathbf{V}(s) - \mathbf{v}(0^+) = \mathbf{A}\mathbf{V}(s) \quad (4)$$

ただし、 $\mathbf{v}(0^+)$  は系の初期状態を表わす。(4)式より  $\mathbf{V}(s)$  を求めると(5)式となる。

$$\mathbf{V}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{v}(0^+) \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{I}$  は単位行列である。(5)式の逆変換をとると、時間領域で表わされる  $\mathbf{v}(t)$  は、

$$\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{v}(0^+) \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\} \quad (7)$$

となる。ただし  $\boldsymbol{\Phi}(t)$  は推移行列であり、(7)式で定義される。推移行列は、一般にはシルベスターの展開定理により求められるが、計算はかなり複雑になり、状態変数線図により求めた方が簡単である。

行列  $\boldsymbol{\Phi}(t)$  を(8)式にて表わすと、(6)式の関係から、単位ステップ関数入力に対して、 $\boldsymbol{\Phi}(t)$  の要素  $a_{ik}$  は、状態変数線図の  $k$  番目の積分器の初期値を全部零とし

た場合の状態  $x_i$  にて観測された値である。

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

ただし、 $n$  は入力信号の個数とプロセスの次数の和である。

## 2.2 離散値系の状態推移解析

任意の時刻  $t$  における線形定常離散値系の状態微分方程式は(9)式で表わすことができる。

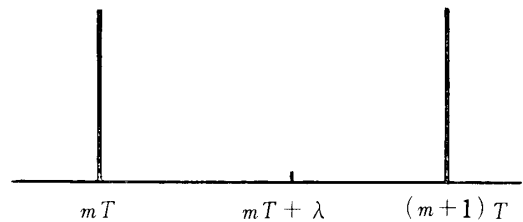


Fig. 2 The sampling period

$$\dot{\mathbf{v}}(\lambda) = \mathbf{A}\mathbf{v}(\lambda) \quad (9)$$

ここで  $\lambda$  は、

$$\lambda = t - nT \quad 0 < \lambda \leq T \quad (10)$$

初期条件を  $\mathbf{v}(nT^+)$  で表わすと、つぎのベクトル形式となる。

$$\mathbf{v}(nT^+) = \mathbf{B}\mathbf{v}(nT) \quad (11)$$

(11)式において  $\mathbf{B}$  は正方行列であり、この式によりサンプリング時点における系の状態推移の様子がわかる。

一方、(9)式のラプラス変換より、推移行列  $\boldsymbol{\Phi}(\lambda)$  は、

$$\boldsymbol{\Phi}(\lambda) = \mathcal{L}^{-1}\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\} \quad (12)$$

となり、 $\mathbf{v}(\lambda)$  は(13)式で表わされる。

$$\mathbf{v}(\lambda) = \boldsymbol{\Phi}(\lambda)\mathbf{v}(0^+) \quad (13)$$

よつて、 $nT < t \leq (n+1)T$  における状態方程式は、

$$\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t - nT)\mathbf{v}(nT^+) \quad (14)$$

$$= \boldsymbol{\Phi}(t - nT)\mathbf{B}\mathbf{v}(nT) \quad (15)$$

となる。また、サンプリング時点  $(n+1)T$  においては、

$$\mathbf{v}((n+1)T) = \boldsymbol{\Phi}(T)\mathbf{v}(nT^+) \quad (16)$$

$$= \boldsymbol{\Phi}(T)\mathbf{B}\mathbf{v}(nT) \quad (17)$$

ここで、

$$\boldsymbol{\Phi}(t - nT)\mathbf{B} = \mathbf{H}(t - nT) \quad (18)$$

とおくと、

$$\mathbf{v}(nT) = \mathbf{H}^n(T)\mathbf{v}(0) \quad (19)$$

をうる。

(19)式を  $z$  変換すると、

$$V(z) = [I - z^{-1}H(T)]^{-1} * \quad (20)$$

また、(16), (17)より逐次計算が可能となる。

### 3. 非線形離散値系の有限整定時間応答

#### 3.1 デジタル制御器による補償

Fig. 3 のブロックダイアグラムで図示される非線形離散値制御系において、ステップ関数入力のもとで、最適な有限整定時間応答をさせるべく、状態空間法により考察をすすめる。ここで、できるだけ少ないサンプリング回数で応答を整定させることを考える。

ブロック線図において、系への入力は  $r$  で、出力を  $c$  で示す。ここで、系は伝達関数  $G(s)$  の線形部分と、非線形要素  $N$  に分離可能なものとする。 $D(z)$  は有限整定時間応答をさせるための補償要素（デジタル制御器）のパルス伝達関数である。

いま  $G(s)$  を

$$G(s) = \frac{K/\tau}{s(s+1/\tau)} \quad (21)$$

で表わされる2次の系とする<sup>5)</sup>。ここで  $K$  は系のゲインで、 $\tau$  は時定数とする。

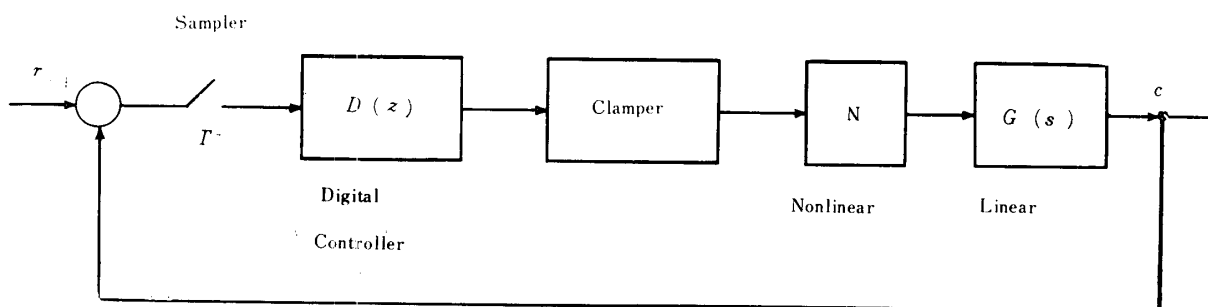


Fig. 3 Block diagram of a nonlinear discrete-data control system with a digital controller

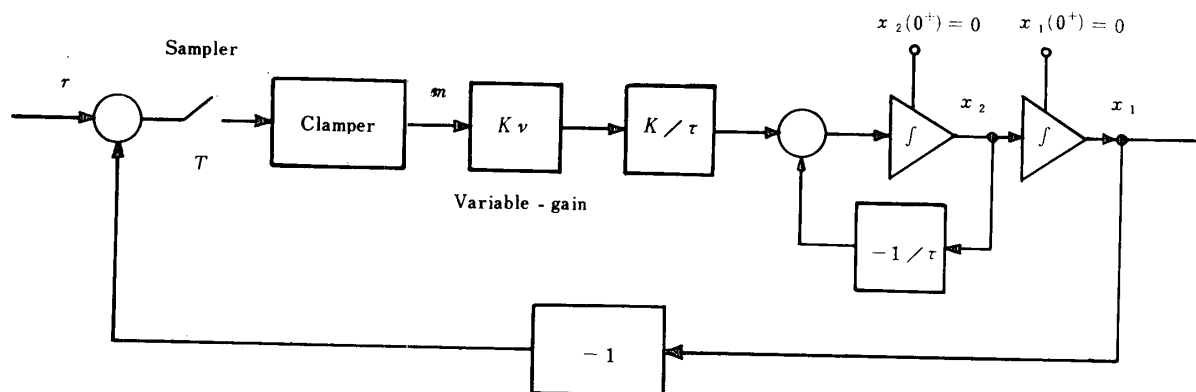


Fig. 4 State-variable diagram of the nonlinear discrete-data control system discussed in this paper

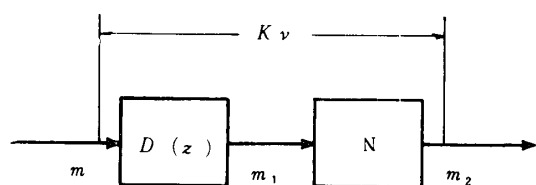


Fig. 5 Variable-gain description of the D-N combination

Fig. 3 のブロックダイアグラムより、状態変数線図は、Fig. 4 で表わされる。ここで、 $D(z)$  と  $N$  を結合して、そのゲインを  $k_n$  で表わすことのできる可変ゲ

イン要素として示した。（ $n$  はサンプル数を示す。） $K_v$  にはクランプされた誤差信号  $m$  が入力として入る。 $K_v$  の入出力関係は Fig. 5 に示してある。積分器の出力の状態量を  $x_1, x_2$  とし、 $x_1$  は系の出力をも表わすものとした。また、ここで、各積分器の初期値は零として考察をすすめていく。

非線形要素  $N$  としてはなんでもよく、 $K_v$  はその一般性を失うものではないが、ここでは具体的に歯車接続等において現われる「ガタ」<sup>6)</sup>、すなわち、不感帯要素について考察する。一般的な不感帯要素として、その特性を Fig. 6 に示す。

\*  $V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v(nT)z^{-n}$  で定義される。

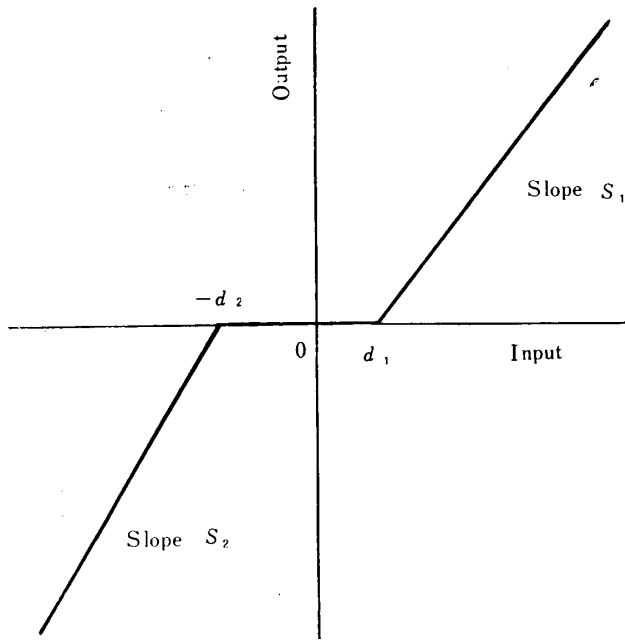


Fig. 6 The input-output characteristic of the nonlinear element (Dead zone)

Fig. 5 より,  $t=nT^+$  なる任意のサンプリング時点の可変ゲイン要素のゲインを  $k_n$  とすると次式が成立する.

$$m_2(nT^+) = k_n m(nT^+) \quad (22)$$

また, 系の状態ベクトルは, Fig. 4 より

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} r \\ x_1 \\ x_2 \\ m \end{bmatrix} \quad (23)$$

となり, (11), (16)両式において,  $n=0$  とおくと, つぎの二式がなりたつ.

$$\mathbf{v}(0^+) = \mathbf{B}\mathbf{v}(0) \quad (24)$$

$$\mathbf{v}(T) = \Phi_0(T)\mathbf{v}(0^+) \quad (25)$$

ここで,  $\Phi_0(T)$  は  $u=0$  のときの推移行列であるが, 明らかに可変ゲイン要素  $K_v$  の  $n=0$  における定数  $k_0$  の関数として表わせる. したがって, (25)式は次式で表わされる.

$$\mathbf{v}(T) = \Phi(k_0)\mathbf{v}(0^+) \quad (26)$$

いま, 入力ステップ関数の大きさを  $R$  とする.

$$r(t) = Ru(t) \quad (27)$$

実際に, Fig. 4 の状態変数線図より,  $\mathbf{B}$ ならびに  $\Phi(k_n)$  を求めると次式となる.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\Phi(k_n) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha\beta & k_n \\ 0 & 0 & r\delta & k_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \tau(1 - e^{-T/\tau}) \\ \beta &= K(T + \tau e^{-T/\tau} - \tau) \\ r &= e^{-T/\tau} \\ \delta &= K(1 - e^{-T/\tau}) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

したがって, (24), (25)両式は,

$$\mathbf{v}(0^+) = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\mathbf{v}(T) = \begin{bmatrix} R \\ R\beta k_0 \\ R\delta k_0 \\ R \end{bmatrix} \quad (32)$$

同様に,  $n=1$  とおくと

$$\mathbf{v}(T^+) = \mathbf{B}\mathbf{v}(T) = \begin{bmatrix} R \\ R\beta k_0 \\ R\delta k_0 \\ R(1 - \beta k_0) \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(2T) &= \Phi(k_1)\mathbf{v}(T^+) \\ &= \begin{bmatrix} R \\ R(\beta + \alpha\delta)k_0 + R\beta k_1(1 - \beta k_0) \\ R\gamma\delta k_0 + R\delta k_1(1 - \beta k_0) \\ R(1 - \beta k_0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

(34)式において, つぎの連立方程式が満足されればこれ以後の, すなわち,  $t \geq lT$  ( $l \geq 2$ ) に対する系の誤差は零となり応答は完了することになる.

$$\begin{cases} x_1(2T) = r(2T) & (35) \\ x_2(2T) = 0 & (36) \end{cases}$$

明らかに, (35), (36)の連立方程式が成立するということは, この系が最小のサンプル数にて有限整定時間応答をするための条件である. すなわち, 入力  $r=R \times u(t)$  なるステップ関数で, ゲイン, 時定数をそれぞれ,  $K, \tau$  とする系を, サンプリング周期  $T$  でオーバーシュートなく過渡応答を整理させるサンプル値制御は上の連立方程式を  $k_0, k_1$  について解いた次式が成立すればよい.

$$k_0 = \frac{1}{\beta(1 - \gamma) + \alpha\delta} = \frac{1}{KT(1 - e^{-T/\tau})} \quad (37)$$

$$k_1 = \frac{\gamma}{\beta\gamma - \alpha\delta} = \frac{e^{-T/\tau}}{K\{(T + \tau)e^{-T/\tau} - \tau\}} \quad (38)$$

したがって, (33)式より

$$x_1(T^+) = \frac{R}{1 - e^{-1/q}} - Rq \quad (30)$$

ここで、

$$q = \tau/T \quad (40)$$

また、(31)式と、(37)式の  $k_0$  の値を代入した(33)式より、最適制御列  $m(0^+)$ 、 $m(T^+)$  が決定される。

$$m(0^+) = R \quad (41)$$

$$m(T^+) = R(1 - \beta k_0) = \frac{R(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\beta(1 - \gamma) + \alpha\delta} \quad (42)$$

$$= R \left\{ q - \frac{e^{-1/q}}{1 - e^{-1/q}} \right\} \quad (43)$$

したがって、 $m(jT^+)$ 、ただし  $j = 0, 1$  の  $z$  変換は、(45)式となる。

$$M(z) = m(0^+) + m(T^+)z^{-1} = R + R \left\{ q - \frac{e^{-1/q}}{1 - e^{-1/q}} \right\} z^{-1} \quad (44)$$

そして、 $m_2(jT^+)$  の  $z$  変換  $M_2(z)$  は次式で表わされる。

$$M_2(z) = k_0 m(0^+) + k_1 m(T^+)z^{-1} = \frac{R}{KT(1 - e^{-1/q})} - \frac{Re^{-1/q}}{KT(1 - e^{-1/q})} z^{-1} \quad (45)$$

ところで、 $m(jT^+)$  は、(45)式で示されるところの  $m_2(jT^+)$  が既知であれば、たとえば、Fig. 7, Fig. 8 を用いて図式的に決定される。

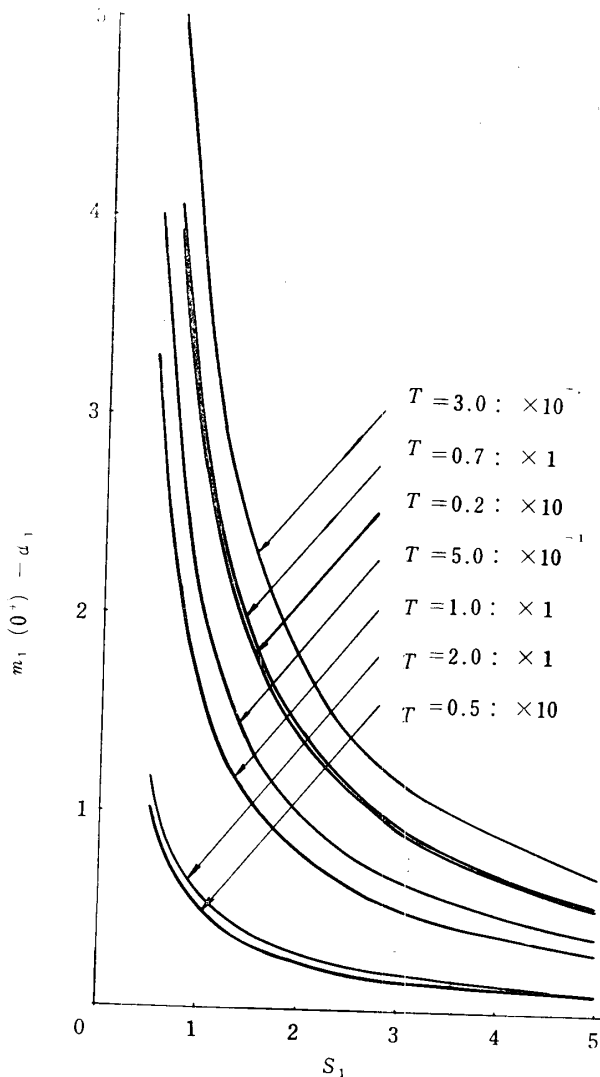


Fig. 7 Curves showing  $m_1(0^+)$  with respect to various values of sampling period  $T$

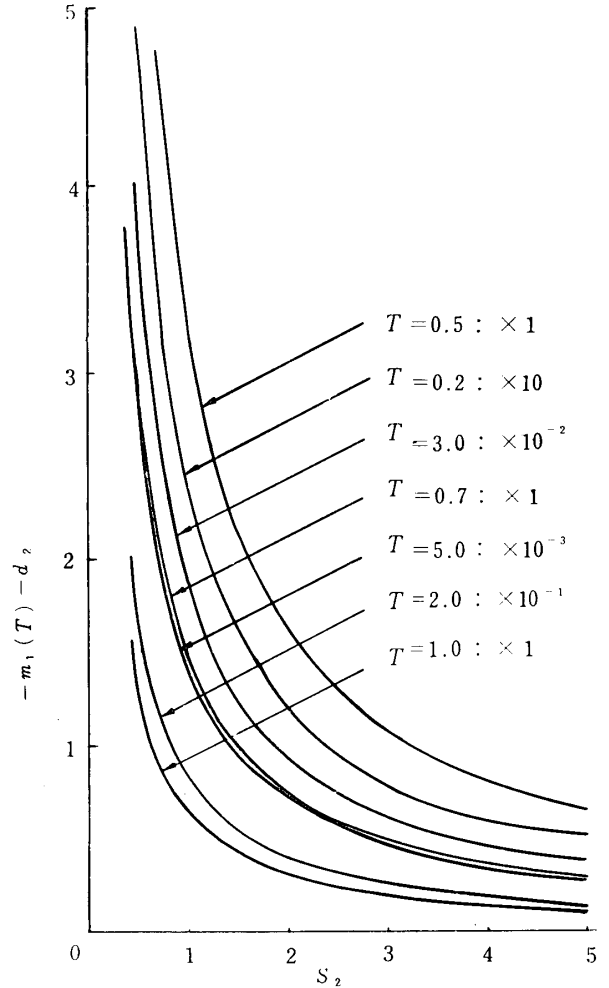


Fig. 8 Curves showing  $m_1(T^+)$  with respect to various values of sampling period  $T$

したがって、デジタル補償要素のパルス伝達関係は次式により求まる。

$$G(z) = \frac{M_1(z)}{M(z)} \quad (46)$$

$$= \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}} \quad (47)$$

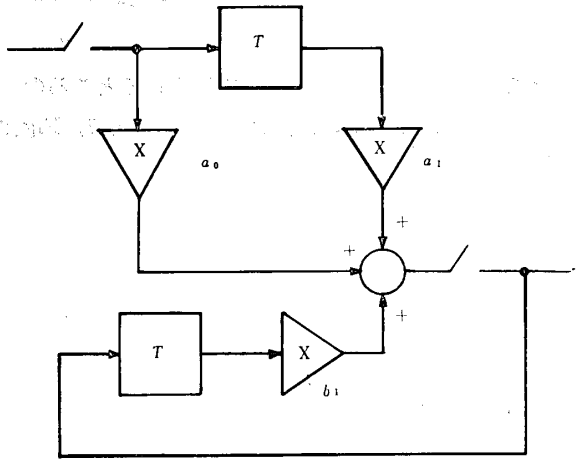
ここで、

$$a_0 = \frac{1}{S_1 K (1 - e^{-1/q})} + \frac{d_1}{R} \quad (48)$$

$$a_1 = -\frac{e^{-1/q}}{S_2 K T (1 - e^{-1/q})} - \frac{d_2}{R} \quad (49)$$

$$b_1 = q - \frac{e^{-1/q}}{1 - e^{-1/q}} \quad (50)$$

(47)式で表わされるパルス伝達関数は Fig. 9 により構成される<sup>7)</sup>.



- : COEFFICIENT MULTIPLIER
- : MEMORY OR DELAY CIRCUIT

Fig. 9 Digital Controller discussed in this paper

3.2 各定数のおよぼす影響

過渡応答は、(49)式から第1サンプリング時点での出力値が求まり、第2サンプリング時点では応答は整定している。(49)式において、 $R=1$ 、すなわち系への入力として、単位ステップ関数を取り、かつ系の時定数  $\tau=1$  (sec) とし、サンプリング周期をいろいろ変えたときの過渡応答を Fig.10に示す。ここで時定数 $\tau$

を1 (sec) としたのは、制御系の応答を時定数でもって正規化した時間軸の上で観測する場合には、 $K$ 、 $T$ をそれぞれ、

$$K \rightarrow K\tau$$

$$T \rightarrow T/\tau$$

のように置き換えることにより、 $\tau=1$  (sec) の場合の結果を、そのまま一般的に適用することができるからである<sup>8)</sup>。

ところで、第1サンプリング時点における出力の大きさは(49)式にて明らかなように、入力大きさ  $R$  に正比例している。したがって、任意の大きさのステップ関数入力ときには、出力軸のみ、入力大きさだけ乗じてやれば所望の過渡応答が求まることになる。また、(49)式は、系のゲインの大きさ  $K$  に対して無関係である。このように、第1サンプリング時点での出力値は  $q$ —一定のもとでは  $R$  に正比例し、 $K$  の大きさには無関係であることがわかったが、(46)~(50)式で示されるデジタル制御器のパルス伝達関数は  $K$ 、 $R$  を含んでおりこれらの値いかんにより Fig. 8 の係数器の係数は変化する。ここで、特に  $d_1=d_2=0$ 、すなわち不感帯がなければ(非線形要素が完全に除去されたわけではない)、(48)、(49)両式において  $a_0$ 、 $a_1$  はおのおの  $K$  に反比例するから、 $D(z)$  は  $K$  に反比例し、かつ入力大きさには無関係となる。

いま、系のゲイン  $K=1$ 、 $T=1$  (sec)、また、不感帯要素の特性を Fig.11 で表わされるものとしたときのデジタル制御器による補償後の過渡応答を Fig.1

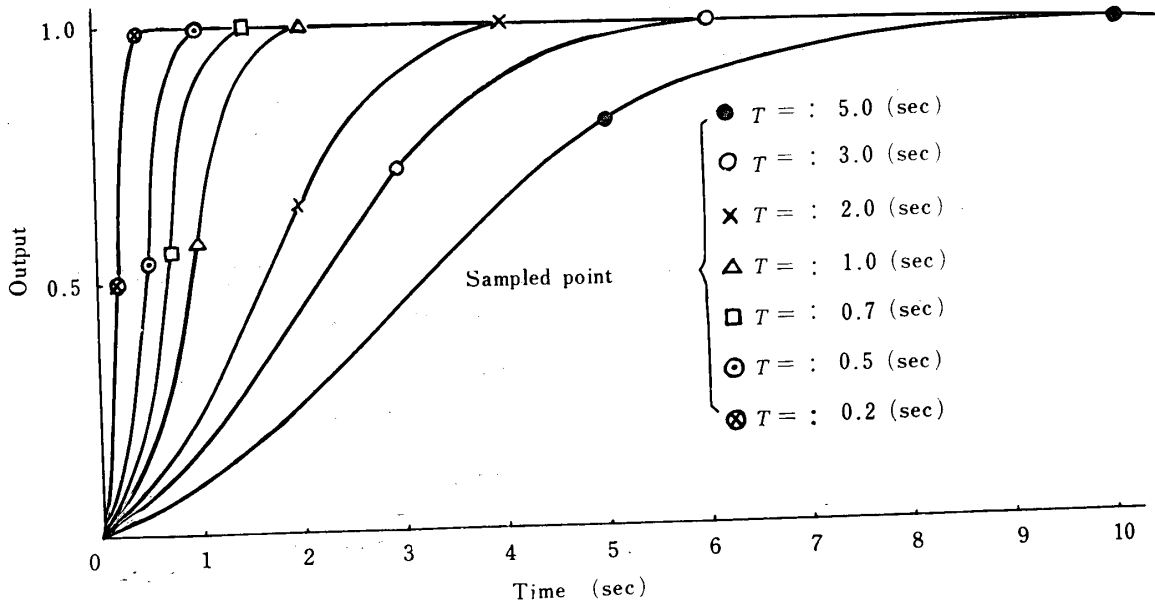


Fig.10 Unit step-function response of the compensated discrete-data control system discussed in this paper in respect to various sampling points T

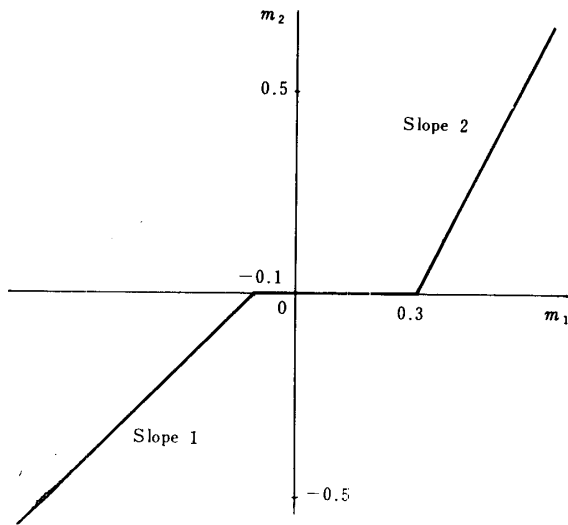


Fig. 11 Nonlinear characteristic curve discussed in this paper

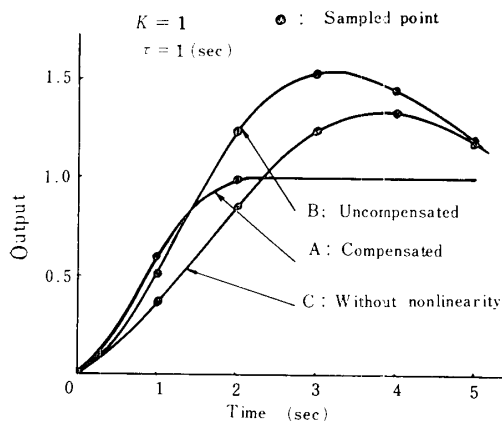


Fig. 12 The transient-response for the unit-step function of the system compensated with a digital-controller (Curve A), the system uncompensated (Curve B) and the system without nonlinearity (Curve C)

の曲線Aで示す。合わせて、補償要素のない過渡応答曲線と、非線形要素を含まない線形系の応答の模様をそれぞれ比較して示した。これによると、B、C曲線は減衰振動をしながら整定することがわかる。一方、デジタル制御器で補償された系の曲線Aは速やかに定常偏差なく2(sec)後に整定している。なお、このときのデジタル制御器のパルス伝達関数は

$$D(z) = \frac{1.09 - 0.682z^{-1}}{1 + 0.418z^{-1}} \quad (5)$$

となる。ここで、 $M_1(z)$ は、 $m_2(jT^+)$ から、Fig. 11を直接利用して図式的に算出してもよいし、あるいは、Fig. 7、Fig. 8からでもただちに求められる。

#### 4. む す び

線形系における離散値系の解析、シンセシスには、従来からのz変換法による方法でも簡単に扱える場合もあるが、多次元系や、非線形系では非常に複雑になってくる。一方、状態推移による解析では、デジタル計算機に適合した方法で解ける。本報告では、具体的な2次非線形系の有限整定時間応答について、系のゲイン、サンプリング周期、入力ステップ関数の大きさ、不感帯特性などの影響について考察した。その結果、応答特性そのものには系のゲインによる影響はなく、また、出力値は入力大きさに比例することがわかった。一方デジタル制御器のパルス伝達関数については直接上記定数の影響を受ける。ただし、 $S_1 \neq S_2$ で非線形ではあるがデッドゾーンがない場合には、 $D(z)$ は入力関数の大きさによる影響がなくなり、かつKに反比例することとなる。

Fig. 7、Fig. 8では一般的な不感帯特性から、 $m_2(jT^+)$ を求めずに、直接図式的に $m_1(jT^+)$ を求められることを示し、したがって、これから容易にパルス伝達関数が求められる。

本稿では、非線形として不感帯要素に限定し考察したが、D-N結合を可変ゲイン要素とする可変ゲイン変化法により同様な手法で補償を行なうことができる。ただし、リミッターの場合は $k_n$ が規制値を越えることができない点に注意しなければならない<sup>3)</sup>。

また、デジタル制御器としては、デジタル計算機、あるいは簡易な専用機で実現できる。

終りに臨み、日頃ご鞭撻いただいている牧元教授、非線形制御についてご教示を受けた神谷健児助教授、ならびにご援助いただいた許斐亮爾講師に謝意を表す。

#### 参 考 文 献

- 1) 増淵正美：“最適制御入門”，オーム社，p.92 (1964)
- 2) J. T. Tou：“Digital and Sampled-data Control Systems”，； McGraw-Hill (1959)
- 3) J. T. Tou：“Modern Control Theory”， McGraw-Hill (1964) p.118
- 4) 同 上，p.63
- 5) Thaler and Brown：“Analysis and Design of Feedback Control Systems”， McGraw-Hill (1960) p.395
- 6) E. Mishkin and L. Braun：“Adaptive Control Systems”， McGraw-Hill, Chapter 6 (1961)
- 7) 電気学会：“自動制御”，電気学会 (1965) p.74
- 8) 西村他：制御工学，5，235 (1966)

(昭和42年4月15日受理)