

厚みのない鉛直平板まわりの 自然・強制複合対流熱伝達に関する数値解析

加藤泰生*・宮本政英*

Numerical Analysis of Combined Free and Forced Convection Heat Transfer on a Thin Vertical Plate

Yasuo KATOH and Masahide MIYAMOTO

Abstract

This paper is concerned with numerical analysis of combined free and forced convection heat transfer on a thin vertical plate. Numerical results were obtained for $Pr=0.72$, $Gr=125$ and $Re=1\sim 25$ using the finite difference method.

The streamline and isotherm patterns which were calculated for several cases clarified the characteristics of the flow field.

It was found that the predicted values of overall convection heat transfer coefficient on a thin vertical plate agreed well with the previous results qualitatively.

It was also shown that the wall frictional drag coefficient distributions of heated surface seemed to be different from those of non-heated surface.

1. 緒 言

空調用熱交換器のコンパクト化や中低温レベルの排熱エネルギーの有効利用などのためプレート型フィンが応用される。このプレート型フィンは、自然・強制複合対流のもとでの高い熱伝達特性と低い圧力損失を同時に有することは知られているが、このメカニズムに関して、必ずしも十分説明されていない。

理論的には、単一平板上の複合対流のもとでの相似解⁽¹⁾、有限平板を過ぎる流れ⁽²⁾、流路に厚みのあるプレートフィンが千鳥配列の場合の層流域におけるこの厚みの熱伝達に及ぼす影響についての研究⁽³⁾、また、鈴木ら

による厚みのないプレート列上で楕円型偏微分方程式を用いた、二次元・三次元場の一連の数値解析^{(4)~(6)}がある。また鈴木らは、その実験モデルや、London-Shahの結果と比較し数値解析の妥当性を述べている。しかしながら彼らの対象領域は $Re>250$ であり、これより低いレイノルズ数での結果はない。

実験的にも、先の鈴木らのものも含め、かなりたくさん結果が得られているが、中田ら⁽⁷⁾の $Re=50\sim 400$ の範囲で、小さいストリップフィンまわりの強制対流熱伝達に関して調べているものが最も Re 数の小さい領域の結果のようである。

本研究の目的は、自然・強制複合対流下において、厚みのないプレートフィン上での対流熱伝達ならびにその流れ場の特性を数値解析により知ることである。このため、まず手始めに物理モデルをできうるかぎり

*機械工学科

簡略化し計算条件も、レイノルズ数、グラスホフ数とも無次元プレート長を代表長さとした値でそれぞれ1~25, 125と極めて小さい値に限定した。

結果は、その流れ場、温度場の特性を明らかにするとともに、他の研究者の結果との比較よりその妥当性が示されたので、ここに報告する。

2. 数値解法

2.1 基礎方程式と境界条件

Fig. 1は本解析に用いた物理モデル及び座標系を示す。本解析に際して以下の仮定を用いる。

- (1)流れは層流である。
- (2)流体は $P_r=0.72$ の空気、非圧縮性流体とする。
- (3)物性値は浮力項の密度を除き他は一定とおく。
浮力項の密度変化にはブジネスク近似を用いる。
- (4)粘性散逸は無視する。
- (5)伝熱面は一樣壁温とし、鉛直に配置する。
- (6)主流速として鉛直方向速度 u_∞ を無限遠点 ($y=\infty$)の位置に与える。

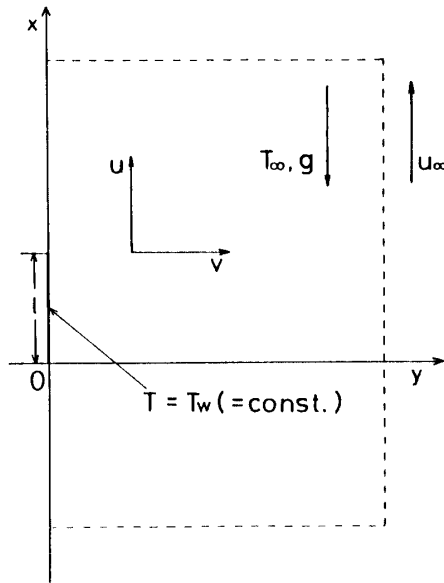


Fig. 1 Physical model and coordinate system.

以上の仮定に基づいて次の基礎方程式が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{連続の式}) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g\beta(T - T_\infty) + \nu \nabla^2 u \end{aligned} \quad (2)$$

(x方向運動方程式)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad (3)$$

(y方向運動方程式)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \nabla^2 T \quad (\text{エネルギー式}) \quad (4)$$

本報では定常状態のみを取扱うが、数値計算の便宜上、非定常項が加えられている。式(1)~(3)は流線関数 ϕ およびうず度 ξ を導入し圧力の項を消去すれば、次の様に書き換えられる。

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} = -g\beta \frac{\partial}{\partial y} (T - T_\infty) + \nu \nabla^2 \xi \quad (5)$$

$$\xi + \nabla^2 \phi = 0 \quad (6)$$

$$\text{ただし, } u = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (7)$$

従って基礎方程式は(4)(5)(6)(7)となる。これらの式に次の無次元量を導入して無次元化する。

$$\tau = \frac{(g\beta\Delta T)^{2/3}}{\nu^{1/3}} t \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} X &= \left(\frac{g\beta\Delta T}{\nu^2} \right)^{1/3} x, \quad Y = \left(\frac{g\beta\Delta T}{\nu^2} \right)^{1/3} y \\ L &= \left(\frac{g\beta\Delta T}{\nu^2} \right)^{1/3} l, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$U = \frac{u}{(\nu g\beta\Delta T)^{1/3}}, \quad V = \frac{v}{(\nu g\beta\Delta T)^{1/3}} \quad (10)$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}, \quad \Delta T = T_w - T_\infty \quad (11)$$

$$\xi = \frac{\nu^{1/3}}{(g\beta\Delta T)^{2/3}} \xi, \quad \psi = \frac{\phi}{\nu} \quad (12)$$

基礎方程式は次の様になる。

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = -U \frac{\partial \xi}{\partial X} - V \frac{\partial \xi}{\partial Y} + \nabla^2 \xi - \frac{\partial \theta}{\partial Y} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = -U \frac{\partial \theta}{\partial X} - V \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{1}{P_r} \nabla^2 \theta \quad (14)$$

$$\xi + \nabla^2 \psi = 0 \quad (15)$$

$$\text{ただし } U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (16)$$

[境界条件] 無次元境界条件で示すと以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad (0 \leq X \leq L, Y = 0) \\ U = V = 0, \quad \psi = 0 \\ \theta = 1, \quad \xi = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} (2) \quad (-\infty < X < 0, Y = 0) \\ (L < X < \infty, Y = 0) \\ \frac{\partial U}{\partial Y} = V = 0, \quad \psi = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0, \quad \xi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} (3) \quad (X = \infty, 0 \leq Y \leq \infty) \\ U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad V = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0, \quad \xi = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} (4) \quad (X = -\infty, 0 \leq Y \leq \infty) \\ U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad V = 0 \\ \theta = \xi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} (5) \quad (-\infty < X < \infty, Y = \infty) \\ U = U_\infty \left(= \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right), \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \\ \theta = \xi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

2.2 数値解析

基礎方程式(13)(14)(15)を差分方程式に変換し、Mallinsonら⁽⁶⁾によって示されたADI法を用いて数値解析する。

Fig. 2は本解析モデルの不等間隔差分格子の例である。平板近傍では各値の変化が急であろうと予測し、メッシュ間隔を狭くしている。最小メッシュ幅、最大メッシュ幅はそれぞれ、0.5、3.0である。格子間隔の増分は、その隣接格子の1/2を超えないことを原則としてとしている。流速が速くなると収束性の関係から小さくすることを要求された。

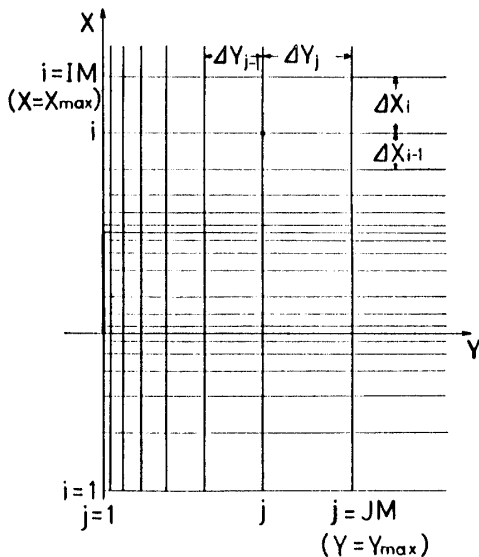


Fig. 2 Example of finite difference grid.

各格子点を (i, j) で示す。ここに i は X 軸方向メッシュ分割番号で、 $i=1 (X=-\infty)$ から $i=IM (X=\infty = X_{max})$ まで変化する。また j は Y 軸方向メッシュ分割番号で、 $j=1 (Y=0)$ から $j=JM (Y=\infty = Y_{max})$ まで変化する。

$\Delta X_i, \Delta Y_j$ はそれぞれ、点 (i, j) と $(i+1, j)$ の間隔及び点 (i, j) と $(i, j+1)$ の間隔を示す。

収束の判定は、 ξ, θ, ψ のそれぞれについて、境界以外のすべての格子点の $\Delta \tau$ 時間の変化量を総計しその全点平均値が 5×10^{-3} (ξ が最も収束性が悪いので ξ で拘束される) 以下とした。

数値解析には、山口大学計算センターACOS850を使用した。

2.3 レイノルズ数, グラスホフ数の定義

レイノルズ数に関しては次式で定義される。

$$Re = \frac{u_\infty l}{\nu} \quad (22)$$

ここで、 u_∞ は主流速、 l はプレート長、 ν は動粘度である。上式に無次元量を用いて書き直すと次式であらわされる。

$$Re = L \cdot U_\infty \quad (23)$$

グラスホフ数に関しては次式で定義される。

$$Gr = \frac{g \beta \Delta T l^3}{\nu^2} \quad (24)$$

ここで、 β は体膨張係数、 ΔT は温度差である。上式に無次元量を用いて書き直すと次式が得られる。

$$Gr = L^3 \quad (25)$$

2.4 ヌッセルト数の定義

鉛直面における局所熱流束と熱伝達係数の関係は次式で与えられる。

$$q_x = \alpha_x (T_w - T_\infty) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (26)$$

従って局所ヌッセルト数は定義から

$$N_{ux} = \frac{\alpha_x \cdot x}{\lambda} = -\frac{x}{T_w - T_\infty} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (27)$$

また、平均ヌッセルト数は次式で定義される。

$$\bar{N}_u = \frac{\bar{\alpha}_x \cdot l}{\lambda} = \int_0^l \frac{1}{T_w - T_\infty} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} dx \quad (28)$$

それぞれ無次元量を用いて書き直すと

$$N_{ux} = -X \frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{Y=0} \quad (29)$$

$$\bar{N}_u = \int_0^L \frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{Y=0} dX \quad (30)$$

2.5 壁面摩擦抵抗係数の定義

局所剪断力 τ は次式で定義される。

$$\tau_x = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (31)$$

これを用いて、壁面摩擦抵抗係数は次式で与えられる。

$$C_f = \frac{\tau_x}{\rho u_\infty^2} \tag{32}$$

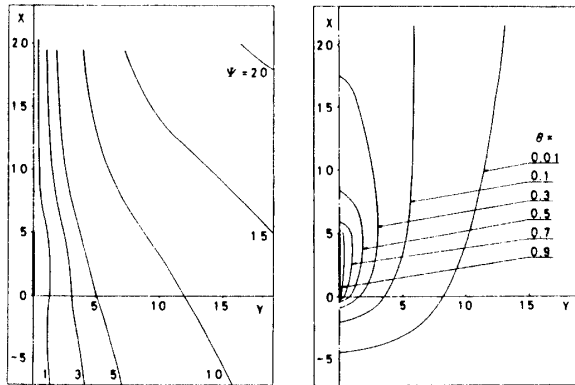
無次元量を用いて上式を書き換えると、

$$C_f = \frac{1}{U_\infty^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{Y=0} = -\frac{1}{U_\infty^2} \xi \Big|_{Y=0} \tag{33}$$

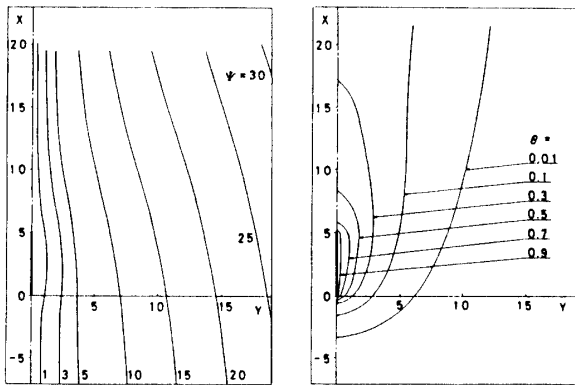
また、平均摩擦抵抗係数 C_D は次式より得られる。

$$C_D = \frac{1}{\rho u_\infty^2 l} \int_0^l \tau_x dx = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{Y=0} dX$$

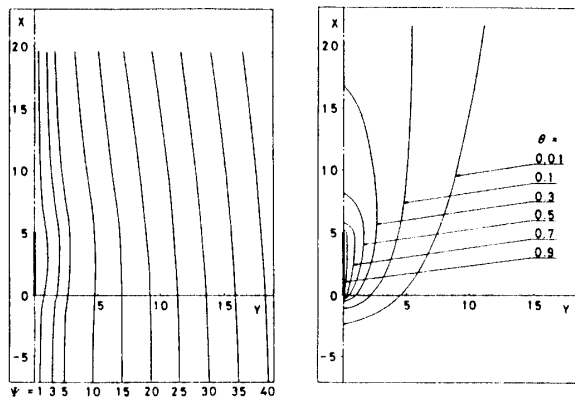
$$= \frac{1}{L} \int_0^L (-\xi) \Big|_{Y=0} dX \tag{34}$$



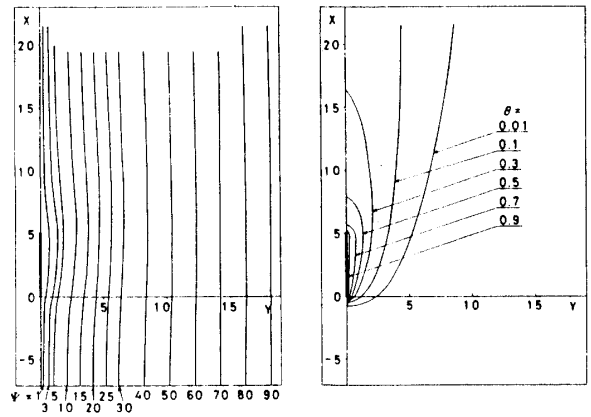
(a) $U_\infty = 0.2$



(b) $U_\infty = 1.0$



(c) $U_\infty = 2.0$



(d) $U_\infty = 5.0$

Fig. 3 Distributions of streamline and isothermal line around a thin vertical plate.

3. 数値計算結果および考察

Fig. 3(a)~(d)は、本解析による流線および等温線について、それぞれ無次元主流速度 $U_\infty = 0.2, 1.0, 2.0, 5.0$ に対応した $Re = 1, 5, 10, 25$ の場合を示す。

流線に関する結果から、流速が速い場合、強制対流の影響で流線が直線的であるのに対して、流速が遅くなるに伴って伝熱面近傍で流線の外側へのふくらみが大きくなっていく。自由対流の影響が強くなると流線間隔が拡がることもわかる。

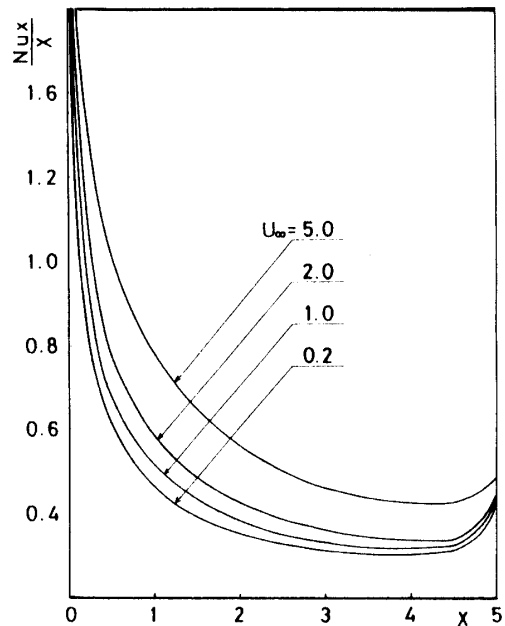


Fig. 4 Local Nusselt number distributions on a thin vertical plate.

等温線分布から、伝熱面前縁での温度コウ配が流速の増加とともに急になり（等温線間隔が狭くなることをさす）、このことは前縁での熱伝達の増加と対応する。又、後縁では流速が遅くなると温度コウ配が緩くなり、熱伝達の減少と対応していることもわかる。

Fig. 4は伝熱面Lにおける局所ヌッセルト数を無次元一様主流速 U_∞ をパラメータとして示す。主流速 U_∞ の値が大きくなるとともに全般的に熱伝達は上昇していく。また前縁近傍では特に局所熱伝達率は高く、後方後縁寄りの位置で最小値をとり、再び後縁までわずかに増加するという分布の傾向はすべて同じである。これは、プレートフィンの特徴であり、この前縁での高い伝熱特性が熱交換器に大いに利用される。

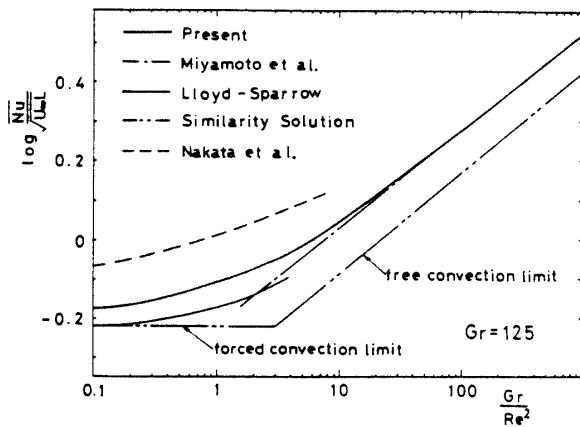


Fig. 5 Comparison of average Nusselt number on a thin vertical plate.

Fig. 5は Re 数と Gr の組合せをパラメータとした場合の平均ヌッセルト数を示す。ただし、無次元プレート長 $L=5$ で一定であるので、すべて Gr 数(= L^3)は125である。比較のため、Miyamotoら⁽⁹⁾の自由対流に関する理論近似式を一点鎖線で、中田ら⁽⁷⁾の強制対流の実験式を破線で、自然・強制複合対流に関するLloyd-Sparrow⁽¹¹⁾の局所相似から得た平均値に関する値を細い実線で示す。又、参考のため純強制・純自然対流の値を二点鎖線で示す。ここで、Miyamotoらの値及び中田らの値はそれぞれ次式から求められる。

$$Nu = 0.448 + 0.460Gr^{1/4} \quad (35)$$

$$Nu = 1.35 + 0.62Re^{1/2} \quad (50 \leq Re \leq 400) \quad (36)$$

ただし、中田らの式は、その適用範囲を Re 数が50以下の場合に拡張している。またLloyd-Sparrowに関する値は彼らの局所ヌッセルトに関する相似解の値を最小二乗により二次式で近似し、それを積分することで得られた次式を用いて算出している。

$$\frac{Nu}{Re^{1/2}} = 0.6042 + 0.0737 \left(\frac{Gr}{Re^2} \right) - 0.0055 \left(\frac{Gr}{Re^2} \right)^2$$

$$\left(\frac{G}{Re^2} \leq 4.0 \right) \quad (37)$$

本解は Re 数が小さくなる領域では、Miyamotoらの純自由対流に漸近し、逆に Re 数が大きく Gr/Re^2 が5以下では定性的に、中田らやLloyd-Sparrowの結果と同じになる。値の上では、中田らの結果よりはやや小さいが、境界層近似による局所相似解のLloyd-Sparrowよりはわずかに大きい値をとることがわかる。

Fig. 6は、局所摩擦抵抗係数分布を主流速 U_∞ をパラメータとして示す。

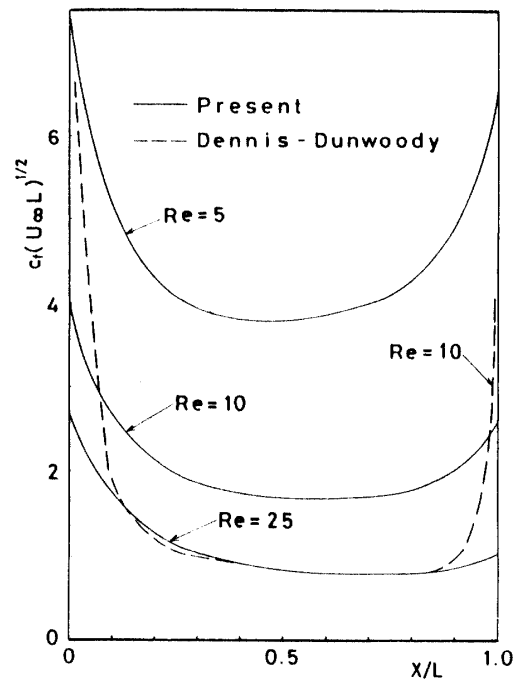


Fig. 6 Local wall frictional drag coefficient distributions on a thin vertical plate.

全般に、主流速 U_∞ の増加とともにその値を小さくしていく。前縁近傍の高い値から除々に減少し、プレート中央で一様な値をとったのち再び上昇する。 $Re=5$ の場合はほぼ左右対称の分布を示し、興味ある結果が示される。Dennis-Dunwoody⁽¹⁰⁾の値は本解と定性的には似た分布を示すが、級数解特有の前後縁での値の著しい上昇が認められ、また非加熱平板であるため全般的に本解より低い値を与える。

Fig. 7は平均摩擦抵抗係数を Re 数をパラメータとして示す。 Re 数が大きくなるにつれ抵抗係数は除々に減少し、Dennis-Dunwoodyの非加熱平板上の強制対流の級数解による計算結果に漸近していく。本計算範囲ではないが、外挿的に Re 数がほぼ100で一致すると思われる。それは、この領域で自由対流の影響が完全に無くなることを示している。すなわち $Re > 100$ においては純

強制対流領域であることが示される。

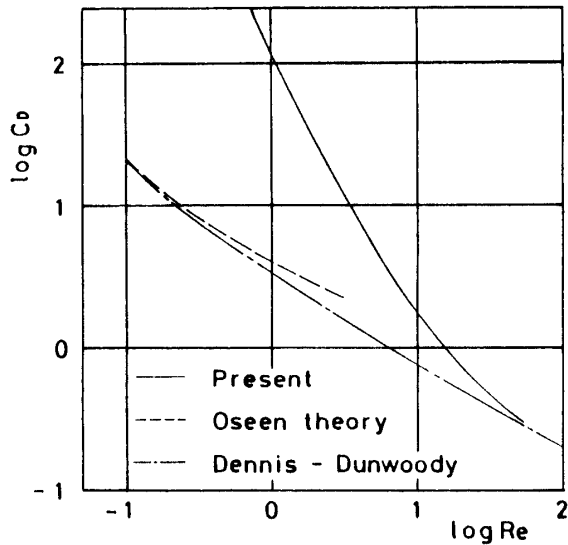


Fig. 7 Comparison of average wall frictional drag coefficient.

Fig. 8はプレート後縁の位置で無次元鉛直方向速度 U を主流速 U_∞ で無次元化した値の Y 方向分布を示す。

ここでは、 $U/U_\infty=1.0$ の線を基準としてその値との差がいわゆる自由対流の影響によるものと考えられる。ここで、 $U_\infty=5$ では、この影響はほとんど現われないことがわかる。逆に $U_\infty=0.2$ では、その影響により流速が8倍程度に加速されることもわかる。

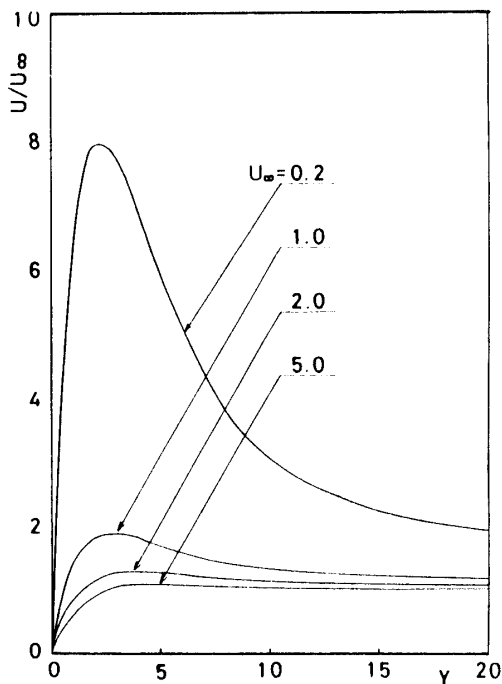


Fig. 8 Velocity profiles at trailing edge of a thin vertical plate.

ちなみに、壁温 $T_w=80^\circ\text{C}$ 、周囲温度 15°C 、温度差を 65°C とした場合、それぞれの流速は、 $U_\infty=0.2, 1.0, 2.5$ に対応して、 $0.69\text{cm/s}, 3.45\text{cm/s}, 6.87\text{cm/s}, 17.17\text{cm/s}$ が求められ、たかだか 17cm/s の流速であっても、すでに自由対流の影響が現われなくなることは興味深いことである。

4. 結 言

厚みのない垂直平板まわりの自由・強制複合対流熱伝達に関して、一様流速をパラメータに数値解析を行ない以下の結果を得た。ただし、 $Gr=125$ で一定とした場合である。

1. 平均摩擦抵抗係数は、レイノルズ数が外挿で100を越えると純強制対流領域に入り、自由対流の影響を受けないことがわかった。
2. 平均熱伝達係数の特性が低レイノルズ数領域で示された。
3. 局所の熱伝達率分布、摩擦抵抗係数はほぼ似た分布形状を示し、平板前縁で最も高く平板中央で低く後縁で再び高くなる傾向が見られた。
4. 流れ場から自由対流の影響は流線の外側へのふくらみから知ることができる。 $Re=25$ ではまだ若干の自由対流の影響を残すことがわかった。

終わりに、本数値計算に尽力を戴いた当時本学学生の守康孝君に謝意を表わします。

使用記号

- g : 重力加速度
- Gr : グラスホフ数 $= g\beta\Delta T l^3 / \nu^2 (= L^3)$
- i, j : X および Y 方向差分格子数
- IM, JM : X および Y 方向格子番号最大値
- l : プレート長 (発熱体長さ)
- L : l の無次元量
- N_{ux} : 局所ヌッセルト数 $= \alpha x / \lambda$, 式(27)
- \bar{N}_u : 平均ヌッセルト数
- Pr : プラントル数
- q : 熱流束
- Re : レイノルズ数
- t : 時間
- T : 温度
- u, v : x および y 方向速度
- U, V : u, v の無次元量
- x, y : 鉛直方向, 水平方向座標, Fig. 1

X, Y : x, yの無次元量
 α_x : 局所熱伝達率
 β : 体膨張係数
 $\Delta X_i, \Delta Y_i$: XおよびY方向差分格子間隔
 ζ : 渦度
 θ : 無次元温度
 ν : 動粘度
 ξ : 無次元渦度
 ρ : 密度
 φ : 流線関数
 ψ : 無次元流線関数

添 字

W : 伝熱面
 ∞ : 周囲流体

参 考 文 献

- 1) Lloyd, J. R. and Sparrow, E. M. : Int. J. Heat Mass Transfer, **13**, 434 (1970)
- 2) 木枝茂和, 鈴木健二郎 : 日本機械学会論文集, **46**, No. 409, 1655 (1980)
- 3) Patanker, S. V. and Prakash, C. : Int. J. Heat Mass Transfer, **24**, No. 11, 1801 (1981)
- 4) 木枝・他4名 : 第18回伝熱シンポジウム講演論文集, 82, (1981-6)
- 5) 平井・他3名 : 第19回伝熱シンポジウム講演論文集, 226, (1982-5)
- 6) 三宅・他3名 : 第20回伝熱シンポジウム講演論文集, 478, (1983-6)
- 7) 中田春男, 樽谷勇, 藤井哲 : 冷凍, **57**, No. 655, 69 (1982-5)
- 8) Mallinson, G. D. and Davis, G. D. V. : J. Computational physics, **12**, 435 (1973)
- 9) Miyamoto, M., Katoh, Y., Kurima, J., Kurihara, S. and Yamashita, K. : Int. J. Heat Mass Transfer, **28**, No. 9, 1733 (1985)
- 10) Dennis, S. C. R. and Dunwoody, J. : J. Fluid Mech., **24**, Part 3, 577 (1966)

(昭和62年4月15日受理)