二項展開に関する一注意

真 野 孝 義

x の函数 u, v はその導函数 u', v' と共に $a<x<b$ で連続であるとすれば，$a<x<b$ において

$$\frac{d(uv)}{dx}=uv'+u'v$$

であるから，

$$uv=\int(uv'+u'v)dx=\int uv'dx+\int u'vdx$$

となる。これを書き直して

(1) $$\int uv'dx=uv-\int u'vdx$$

を得る。$a<a'<b'<b$ とすれば，これから

$$\int_{a'}^{b'}uv'dx=[uv]_{a'}^{b'}-\int_{a'}^{b'}u'vdx$$

を得る。

(i) $u'v$ の a から b までの積分が収斂で，$a'\to a+0$, $b'\to b-0$ の時 $[uv]_{a'}^{b'}$ が確定した極限値 $[uv]_a^b$ を持つか，

(ii) 極限値 $[uv]_a^b$ が存在して有限で，$u'v$ の a から b までの積分が意味を持てば，

上の式において，$a'\to a+0$, $b'\to b-0$ とした時，右辺は確定した極限値を持ち，従って，uv' の a から b までの積分が意味を持ち，

(2) $$\int_a^b uv'dx=[uv]_a^b-\int_a^b u'vdx$$

が成り立つ。

$[uv]_a^b$ が有限で，uv' の a から b までの積分が存在するとしても，$u'v$ の a から b までの積分が存在することになって，(2) を得るから，$[ux]_a^b$ が有限なる場合には，uv' の a から b までの積分と，$u'v$ の a から b までの積分とは同時に収斂するか，又は同時に発散する。

もっと一般に x の函数 u, v は $a<x<b$ において n 回連続微分可能とすれば，(1) を繰り返し適用することによって，

$$\int uv^{(n)}dx=uv^{(n-1)}-\int u'v^{(n-1)}dx=uv^{(n-1)}-u'v^{(n-2)}+\int u''v^{(n-2)}dx\cdots\cdots\cdots\cdots$$

となり，結局

(3) $$\int uv^{(n)}dx=uv^{(n-1)}-u'v^{(n-2)}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}u^{(n-1)}v+(-1)^n\int u^{(n)}vdx$$

を得る。$a<a'<b'<b$ とすれば

$$\int_{a'}^{b'}uv^{(n)}dx=\Big[uv^{(n-1)}-u'v^{(n-2)}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}u^{(n-1)}v\Big]_{a'}^{b'}+(-1)^n\int_{a'}^{b'}u^{(n)}vdx$$

となるから，ここで $a' \to a+0,\ b \to b'-0$ とすることにより，

(4) $\displaystyle\int_a^b uv^{(n)}dx = \Big[uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v\Big]_a^b + (-1)^n\int_a^b u^{(n)}vdx$

を得る。

この公式を応用して，Taylor の定理の剰余を定積分の形で求めて見よう。

$f(x)$ は $a<x<b$ において n 回連続微分可能で，その $n-1$ 階までの導函数は区間の両端まで含めて連続とする。

特に $u=(b-x)^{n-1},\ v=f(x)$ として，(4) を適用すると，$u^{(n)}$ は恒等的に 0 であるから，

$$\int_a^b (b-x)^{n-1}\cdot f^{(n)}(x)\cdot dx = \Big[(b-x)^{n-1}\cdot f^{(n-1)}(x) + (n-1)\cdot(b-x)^{n-2}\cdot f^{(n-2)}(x)$$

$$+ (n-1)\cdot(n-2)\cdot(b-x)^{n-3}\ f^{(n-3)}(x) + \cdots\cdots + (n-1)!\,f(x)\Big]_a^b$$

となり，これを書き直して，

(5) $\displaystyle f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots\cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n$

(6) $\displaystyle R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-x)^{n-1}\cdot f^{(n)}(x)\cdot dx$

を得る。

これから，剰余式を導こう。

$0 \leqq p < n$ なる常数 p をとり，(6)の右辺の積分される函数を $(b-x)^{n-p}\cdot f^{(n)}(x)$ と $(b-x)^{p-1}$ との積と考えて，平均値定理を適用すれば，

(7) $\displaystyle R_n = \frac{(b-\xi)^{n-p}\cdot f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}\int_a^b (b-x)^{p-1}dx$

$\displaystyle\qquad = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}\ \frac{(b-\xi)^{-p}\cdot(b-a)^p}{p}\ (a<\xi<b)$

となって，Schlömilch の剰余式をうる。

(7) において，$p=1$ とすれば，

(8) $\displaystyle R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}\cdot(b-a)\cdot(b-\xi)^{n-1}$

となり，これは Cauchy の剰余式である。

(7) において，$p=n$ とすれば，

(9) $\displaystyle R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$

となり，これは Lagrange の剰余式である。

上においては $a<b$ と仮定したが，$b<a$ であっても差支えない。ただし ξ の値は $b<\xi<a$ としなければならない。

いずれの場合においても，$\xi = a+\theta(b-a)$ とおけば，$0<\theta<1$ であり，(7) (8) (9) はそれぞれ

(7)′ $\displaystyle R_n = \frac{f^{(n)}(a+\theta\overline{b-a})}{(n-1)!}\cdot\frac{(1-\theta)^{n-p}\cdot(b-a)^n}{p}$

(8)′ $\displaystyle R_n = \frac{f^{(n)}(a+\theta\overline{b-a})}{(n-1)!}\cdot(1-\theta)^{n-1}\cdot(b-a)^n$

(9)′ $R_n=\dfrac{f^{(n)}(a+\theta\overline{b-a})}{n\,!}(b-a)^n$

となる。

以上 Taylor の定理の剰余を定積分の形で求めた。

一般の二項展開 $|x|<1$, m: 実数なる時，函数 $(1+x)^m$ が Taylor 級数に展開されることは，複素変数の解析函数の見地に立って見れば，明白であるが，変数を実変数に限る時は，従来，普通微積分学にては R_n として，$0\leqq x<1$ なる x に対しては (9)′ を，$-1<x<0$ なる x に対しては (8)′ を採って $R_n\to 0\,(n\to\infty)$ を証明しているが，その証明はやや，複雑である。前述のように (9)′，(8)′ は (6) から導かれるから，試みに R_n として (6) を採って，x の区域によって R_n として，異なる形式を採らずに，統一的の見地から証明を試みた。

$$R_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b(b-x)^{n-1}\cdot f^{(n)}(x)\cdot dx=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x(x-t)^{n-1}\cdot f^{(m)}(t)\cdot dt$$

$$=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{(n-1)\,!}\int_0^x\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^{n-1}\cdot(1+t)^{m-1}\cdot dt$$

$0\leqq t\leqq x$ なるときは $0\leqq\dfrac{x-t}{1+t}\leqq x$

$0\geqq t\geqq x$ なるときは $0\geqq\dfrac{x-t}{1+t}\geqq x$ なる故

$\left|\dfrac{x-t}{1+t}\right|\leqq|x|$ となる。

従って

$$|R_n|\leqq\left|\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{(n-1)\,!}\right|\cdot|x|^{n-1}\cdot\left|\int_0^x|1+t|^{m-1}dt\right|$$

尚 $|t|\leqq|x|<1$ なる故，$1+t>0$ となり，

$$\leqq\left|\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{(n-1)\,!}\right|\cdot|x|^{n-1}\cdot\left|\int_0^x(1+t)^{m-1}dt\right|$$

$m\neq 0$ とすると，

$$=\left|\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{(n-1)\,!}\right|\cdot|x|^{n-1}\cdot\left|\frac{(1+x)^{m-1}-1}{m}\right|$$

$$=|m|\bullet|(m-1)x|\bullet\left|\left(\frac{m}{2}-1\right)x\right|\cdot\cdots\left|\left(\frac{m}{n-1}-1\right)x\right|\bullet\left|\frac{(1+x)^{m-1}-1}{m}\right|$$

$|x|<1$ なる故 n が充分大となれば，例えばある n_0 より大となれば，$\left|\left(\dfrac{m}{n}-1\right)x\right|<x_0<1$ が成立するような x_0 が存在する。

$n>n_0$ に対して，

$$|R_n|<\left|m(m-1)\left(\frac{m}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{m}{n_0}-1\right)x^{n_0}\right|\cdot x_0{}^{n-n_0-1}\cdot\left|\frac{(1+x)^{m-1}-1}{m}\right|$$

この式から $n\to\infty$ なる時 $R_n\to 0$ となる。