グリーン函数の評価について

真野孝義

On the Estimation of Green Function

T. Mano

p 次元（ただし $p \geqq 3$ とする）空間内の単位球に対するグリーン函数を

$$G(P, Q) = G(x_1, x_2, \cdots, x_p;\ \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p)$$
$$= G(r, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{p-1};\ \rho, \phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{p-1})$$

と表わす。

ただし，球内部の点 P に対し函数 G は領域 $\rho<1$ に属する凡ての点 Q で正となり，球面 $\rho=1$ 上で一様に 0 となる。なお，函数 G は球 $\rho<1$ で，$Q=P$ を除き各点で調和で，$Q=P$ では G は極（$p-2$ 次の）をもつ。

函数 G は

$$G(P, Q) = \frac{1}{\overline{PQ}^{\,p-2}} - \left(\frac{\overline{OQ^*}}{\overline{Q^*P}}\right)^{p-2}$$

なる形で表わされる。ここに Q^* は点 Q の単位球に対する対称点である。

次に $G(P, Q)$ について評価しよう。

第一に $a \equiv 1-r,\ b \equiv 1-\rho,\ \angle POQ \equiv \gamma$ とおくと，

$$G(P, Q) = \frac{1}{\overline{PQ}^{\,p-2}} - \frac{1}{(P\ \overline{Q^*P})^{p-2}}$$
$$= \frac{1}{(r^2+\rho^2-2r\rho\cos\gamma)^{\frac{p-2}{2}}} - \frac{1}{(r^2\rho^2+1-2r\rho\cos\gamma)^{\frac{p-2}{2}}}$$

$$D \equiv \sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\gamma}\ , \qquad D^* = \sqrt{r^2\rho^2+1-2r\rho\cos\gamma}$$

とすれば

$$G(P, Q) = \frac{1}{D^{p-2}} - \frac{1}{D^{*p-2}} = \frac{D^{*p-2}-D^{p-2}}{(DD^*)^{p-2}}$$
$$= \frac{(D^{*2}-D^2)\cdot(D^{*p-3}+D^{*p-4}D+\cdots+D^{p-3})}{(DD^*)^{p-2}(D+D^*)}$$

$D < D^*$ であるから

$$G(P, Q) < \frac{(1-r^2)\cdot(1-\rho^2)\cdot(p-2)D^{p-3}}{2D^{p-1}D^{p-2}}$$

$$= \frac{(1-r^2)\cdot(1-\rho^2)\cdot(p-2)}{2D^{p-1}D^*} < \frac{(1-r^2)\cdot(1-\rho^2)\cdot(p-2)}{2D^p}$$

また $D^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\gamma = (a-b)^2 + r(1-b)\sin^2\frac{\gamma}{2}$

しかるに $r > \frac{1}{2}$（または $a < \frac{1}{2}$）なる故に $b \leqq \frac{3}{4}$ なる場合には，$A_1, A_2, \cdots$ は p にのみ依存する正の常数を表わすとすると，

$$D^2 \geqq (a-b)^2 + A_1\gamma^2 \geqq A_2[(a-b)^2+\gamma^2]$$

となる。

$b > \frac{3}{4}$ なる場合には

$$D^2 > (a-b)^2 > \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 = A_1 \geqq A_2(1+b^2) \geqq A_3[(a-b)^2+\gamma^2]$$

をうる。

いずれの場合においても

$$G(P, Q) > \frac{A_1(1-r^2)(1-\rho^2)}{D^p} < \frac{A\rho a}{[(a-b)^2+\gamma^2]^{\frac{p}{2}}}$$

となる。

従って不等式

$$0 < G(P, Q) < \frac{Aab}{(a-b)^2+\gamma^2]^{\frac{p}{2}}} \qquad \left(a < \frac{1}{2}\right)$$

と結論される。

第二に既に示した

$$D^2 \geqq A_1[(a-b)^2+\gamma^2] \qquad \left(a < \frac{1}{2}\right)$$

と容易にわかる

$$G(P, Q) < \frac{1}{D^{p-2}}$$

なる2式から

$$0 < G(P, Q) < \frac{A}{[(a-b)^2+\gamma^2]^{\frac{p-2}{2}}} \qquad \left(b < \frac{1}{2}\right)$$

をうる。

第 三 に

$$G(P,Q)=\frac{(D^{*2}-D^2)\cdot(D^{*p-3}+D^{*p-4}D+\cdots+D^{p-3}}{(DD^*)^{p-2}(D+D^*)}$$

$$<\frac{(D^{*2}-D^2)\cdot D^{*p-3}}{2D^{*2\ p-3}}=\frac{D^{*2}-D^2}{2D^{*p}}\quad\frac{(1-r^2)(1-\rho)}{2D^{*p}}$$

$$D^{*2}=r^2\rho^2+1-2r\rho\cos\gamma<(\gamma+1)^2$$

なることから

$$G(P,Q)<\frac{(1-r^2)\cdot(1-\rho)}{2(1+\gamma)^{\frac{p}{2}}}=k(1-\rho)$$

ここに $k=\dfrac{1-r}{2(1+\gamma)^{\frac{p-2}{2}}}$ は点 P 及び次元 p にのみ依存する。

以上と前のグリーン函数の変形式とから

$$G(P,Q)>k(1-\rho)$$

となる。ただし k は点 P および次元 p にのみ依存する。

結　　　論

p 次元（但し $p\geqq 3$ とする）空間内の単位球に対するグリーン函数を

$$G(p,Q)=G(x_1,x_2,\cdots,x_p;\ \xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_p)$$
$$=G(r,\theta_1,\theta_2,\theta_{p-1};\ \rho,\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_{p-1})$$

と表わすと
$G(P,Q)$ は

$$0<G(P,Q)<\frac{Aab}{[(a-b)^2+\gamma^2]^{\frac{p}{2}}}\qquad\left(a<\frac{1}{2}\right)$$

$$0<G(P,Q)<\frac{A}{[(a-b)^2+\gamma^2]^{\frac{p-2}{2}}}\qquad\left(b<\frac{1}{2}\right)$$

$$G(P,Q)>k(1-\rho)$$

を満足する。

ただし，$a=1-r, b=1-\rho$, $\angle POQ=\gamma$, k は点 P および次元 p にのみ依存する。