

非軸対称荷重を受ける地盤—構造物 相互作用系における粘性境界

三浦 房紀*・浜田 純夫**・森川 慎吾***

The Viscous Boundary for Axisymmetric Soil Structure
Interaction Systems Subjected to Non-Axisymmetric Loads

by

Fusanori MIURA, Sumio HAMADA and Shingo MORIKAWA

Abstract

The finite element method is one of the most powerful tools for analyzing soil structure interaction problems. This is attributed to its wide applicability. The method has, however, a weak point especially in wave propagation problems. As the area analyzed by the method is limited to be finite, artificial boundaries must be introduced into the model when the problem treats a widely extent area such as ground. And special boundary conditions must be taken into consideration for the artificial boundaries. The boundary conditions are summarized into three categories, first, the energy transmitting boundary, second, the superposition boundary and finally, the viscous boundary.

In this study, the viscous boundary for axisymmetric systems subjected to non-axisymmetric load is proposed by virtue of the principle of the virtual work. The effectiveness of the boundary was examined and it was found that the proposed method gave good results.

1. まえがき

地盤—構造物系の動的相互作用を解析する手法として、近年有限要素法が広く使われている。有限要素法によれば、任意の幾何学形状あるいは材料特性のモデル化が容易であることがその理由と考えられる。しかし、有限要素法には、その解析対象領域が有限な領域に限定されるため、地盤のように近似的に半無限の広がりを持つ系をモデル化する際には特別な工夫を必要とする。

動的相互作用の問題においては、これは解析対象領域内の不規則構造に起因する逸散波の無限遠への伝播

を表現することになる。すなわち、有限要素法を用いて地盤などの広範な広がりを持つ系を解析の対象とする場合には、ある有限の領域で系を切断することになるが、これによって逸散波動によるエネルギーはその系内に閉じ込められてしまう。そこで、その人為的に作られた境界で波動エネルギーを吸収する工夫が必要となるわけである。

この問題に対しては、現在までに大別して3通りの手法が提案されている。まず、エネルギー伝達境界 (energy transmitting boundary)^{1)~3)}、重ね合せ境界 (superposition boundary)^{4)~6)}、そして粘性境界 (viscous boundary)^{7)~8)}である。これらはそれぞれ一長一短を有し、その目的によって使い分けられている。

地震荷重のような非軸対称荷重を受ける軸対称構造物系の動的問題にはエネルギー伝達境界が用いられるのが一般的である。しかしながら、この手法は、(i)

*建設工学科

**土木工学科

***浅野工事(株)

剛な基盤を仮定するため弾性基盤への逸散波の評価が
できない、(ii)水平方向に伝播する逸散波を表面波と
仮定している、(iii)またそのための複素固有値解析を
必要としているなど、必ずしも完全なものではなく、
また取扱いも煩雑な点がある。一方、粘性境界もエネ
ルギー吸収能は必ずしも十分でない場合もあるが、取
り扱いが非常に簡単である。そこで、本報告は、仮想
仕事の原理に基づいて、非軸対称荷重を受ける軸対称
構造物—地盤相互作用系に対する粘性境界の誘導を試
みたものである。

2. 運動方程式

2.1 仮想仕事の原理

動的問題における仮想仕事の原理は次式のように書
くことができる。

$$\int_V \delta\{\epsilon\}^T\{\sigma\}dV - \int_V \delta\{u\}^T(\{F\} - \eta\{\dot{u}\} - \rho\{\ddot{u}\})dV - \int_S d\{u\}^T\{T\}ds = 0 \quad (1)$$

ここに、 $\delta\{\epsilon\}$ は仮想ひずみ、 $\delta\{u\}$ は仮想変位ベク
トル、 $\{\sigma\}$ 、 $\{F\}$ 、 $\{u\}$ 、 $\{T\}$ はそれぞれ応力、物体
力、変位、表面力ベクトルであり、 T は転置を \cdot は時
間に関する微分を表わす。また η 、 ρ はそれぞれ粘性係
数、密度である。

物体力が存在せず、剛な基盤上にある側方境界が自
由な系の運動方程式は、 $\{F\} = 0$ 、式(1)第3項 = 0と
なり、離散化した系において行列表示すれば、良く知
られた次式となる。

$$[M]\{\dot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = -[M]\{I\}\ddot{u}_g \quad (2)$$

ここに、 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ はそれぞれ質量、減衰、剛
性マトリクス、 $\{\delta\}$ は節点変位ベクトル、 $\{I\}$ は単位
ベクトル、 u_g は基盤における入力変位である。

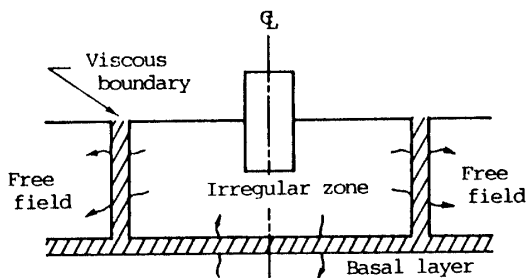


Fig.1 A schematic drawing of a dynamic soil-structure interaction system.

本研究の目的は、離散系における式(1)の第3項を求
めることである。この第3項は、Fig. 1に示すように
解析領域 (Irregular zone) の下に弾性基盤層 (Basal
layer) が、そして側方に自由地盤 (Free field) が存
在する場合には、①基盤層への逸散波、②自由地盤へ
の逸散波、③自由地盤の運動の影響を含むものである。

結論から先に書けば、式(2)に上述①、②、③の効果
を考慮に入れた運動方程式は次式となる。

$$[M]\{\dot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} + [C_B]\{\dot{\delta}_B\} + [C_S](\{\dot{\delta}_S\} - \{\dot{\delta}_f\}) = -[M]\{I\}\ddot{u}_g + [G_S]\{\delta_f\} + [G_{CS}]\{\dot{\delta}_f\} \quad (3)$$

ここに、

$[C_B]$: 底面での粘性境界マトリクス

$[C_S]$: 側方自由地盤における粘性境界マトリクス

$[G_S]$: 側方自由地盤の変形に伴う境界剛性マトリクス

$[G_{CS}]$: 側方自由地盤の変形に伴う境界減衰マトリクス

$\{\delta_B\}$: $\{\delta\}$ のうち、基盤面上の自由度に対応する成分だけ有する変位ベクトル

$\{\delta_S\}$: $\{\delta\}$ のうち、側方境界上の自由度に対応する成分だけ有する変位ベクトル

$\{\delta_f\}$: 側方自由地盤の変位ベクトル

式(3)の左辺第4項が基盤への逸散項、第5項が側方自由
地盤への逸散項、右辺第2、第3項が自由地盤の運
動による強制外力項である。

なお、以下においては $[C_B]$ 、 $[C_S]$ 、 $[G_S]$ 、 $[G_{CS}]$ を
便宜上境界マトリクスと呼ぶことにする。

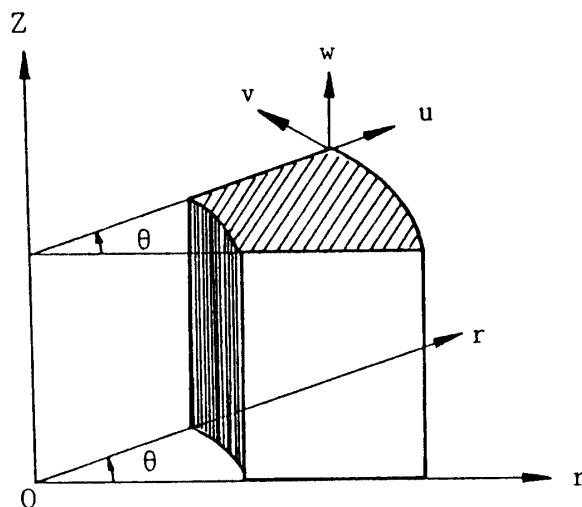


Fig.2 The cylindrical coordinate system and its displacement components.

2.2 境界マトリクスの誘導

2.2.1 座標系と変位成分

座標系と変位成分を Fig. 2 に示す。用いる要素はリング要素であり、r 方向の変位を u, θ 方向の変位を v, z 方向の変位を w とする。θ 方向に級数展開し、第 n 項の振幅をそれぞれ u_n, v_n, w_n とすると、u, v, w は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^N u_n \cos n\theta \\ v &= -\sum_{n=0}^N v_n \sin n\theta \\ w &= \sum_{n=0}^N w_n \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、N は問題の精度に応じて決定される重ね合わせる項である。なお、以下においては表記上の煩雑さを避けるため、 u_n を u, v_n を v, w_n を w と書くことにする。

2.2.2 仮想仕事

式(1)より、仮想仕事を δW とすると、 δW は次式で表わされる、

$$\delta W = \int_s T_j \delta u_j ds \quad (5)$$

ここに、j は r, θ, z 方向を意味し、 δu_j は j 方向の仮想変位を意味する。

Lysmer⁷⁾によれば、式(5)の T_j は次式で与えられる。

$$T_j = a\rho V \dot{u}_j \quad (6)$$

ここに、 $a = 1$ であり、 ρ は密度、V は弾性波速度であ

り、考えている境界の運動方向によって横波速度 V_s あるいは縦波速度 V_p となる。また、 \dot{u}_j は境界面の速度である（ただし、側方においては未知量である境界の節点速度から自由地盤の運動速度を引いたもの）。

2.2.3 底面粘性境界マトリクス [C_B]

(i) r 方向

この場合の弾性波速度は V_s 、速度は $\dot{u} \cos n\theta$ が対象となる。したがって、表面応力 T_r は次式で与えられる。

$$T_r = \rho V_s \dot{u} \cos n\theta \quad (7)$$

Fig. 3 に示したリング要素 A の底面 $j \sim j+1$ において、仮想変位 $\delta u \cos n\theta$ のなす仮想仕事 δW_r は式(7)を式(5)に代入して次式で与えられる。

$$\delta W_r = \int_{r_j}^{r_{j+1}} \int_0^{2\pi} \rho V_s \dot{u} \cos n\theta \delta u \cos n\theta r d\theta dr \quad (8)$$

ここで、変位 u は、節点 j と j+1 の間で線形に変化すると仮定すれば、節点変位 u_j, u_{j+1} を用いて次式で表わされる。

$$u = \frac{1}{\ell} \left\{ (r_{j+1} - r) \quad (r - r_j) \right\} \begin{Bmatrix} u_j \\ u_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

これより、速度 \dot{u} 、仮想変位 δu はそれぞれ次のようになる。

$$\dot{u} = \frac{1}{\ell} \left\{ (r_{j+1} - r) \quad (r - r_j) \right\} \begin{Bmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{u}_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\delta u = \frac{1}{\ell} \left\{ (r_{j+1} - r) \quad (r - r_j) \right\} \begin{Bmatrix} \delta u_j \\ \delta u_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

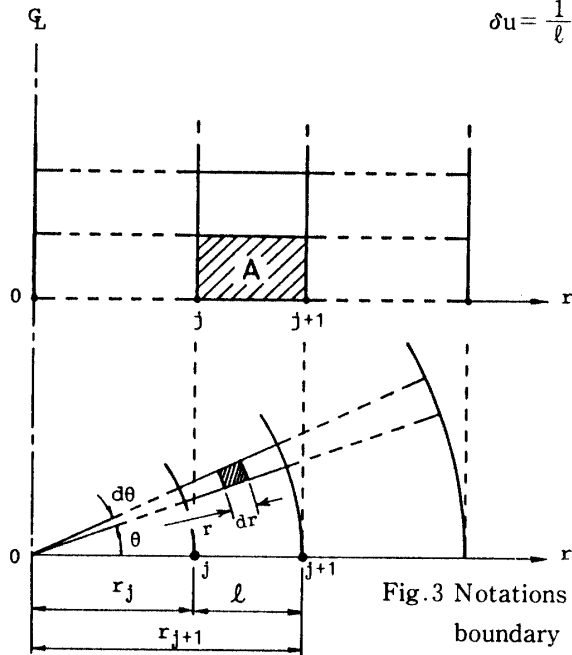


Fig.3 Notations for calculation of the viscous boundary matrix at the bottom boundary.

式(10), (11)を式(8)に代入して

$$\begin{aligned} \delta W_r &= \{ \delta u_j \ \delta u_{j+1} \} \frac{\rho V_s}{\ell^2} \int_{r_j}^{r_{j+1}} \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} (r_{j+1}-r) \\ (r-r_j) \end{Bmatrix} \{ (r_{j+1}-r)(r-r_j) \} r \cos^2 n \theta d\theta dr \begin{Bmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{u}_{j+1} \end{Bmatrix} \\ &= \{ \delta u_j \ \delta u_{j+1} \} \frac{\pi \rho V_s}{\ell^2} \int_{r_j}^{r_{j+1}} \begin{Bmatrix} (r_{j+1}-r)^2 & (r_{j+1}-r)(r-r_j) \\ (r_{j+1}-r)(r-r_j) & (r-r_j)^2 \end{Bmatrix} r dr \begin{Bmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{u}_{j+1} \end{Bmatrix} \\ &= \{ \delta u_j \ \delta u_{j+1} \} \frac{\pi \rho V_s \ell}{12} \begin{Bmatrix} 3 r_j + r_{j+1} & r_j + r_{j+1} \\ r_j + r_{j+1} & r_j + 3 r_{j+1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{u}_{j+1} \end{Bmatrix} \\ &= \{ \delta u_j \ \delta u_{j+1} \} \frac{\pi \rho V_s \ell}{12} [R] \begin{Bmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{u}_{j+1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{12}$$

ここに, $[R] = \begin{Bmatrix} 3 r_j + r_{j+1} & r_j + r_{j+1} \\ r_j + r_{j+1} & r_j + 3 r_{j+1} \end{Bmatrix}$ (13)

一方において, 仮想仕事 δW_r は, 節点力ベクトル $\{f^r\} = \{f_j^r \ f_{j+1}^r\}^T$ を用いて次のように表わせる.

$$\delta W_r = \{ \delta u_j \ \delta u_{j+1} \} \{ f^r \} \tag{14}$$

したがって, 節点ベクトル $\{f^r\}$ は式(12), (14)より次式で与えられる.

$$\begin{Bmatrix} f_j^r \\ f_{j+1}^r \end{Bmatrix} = \frac{\pi \rho V_s \ell}{12} [R] \begin{Bmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{u}_{j+1} \end{Bmatrix} \tag{15}$$

(ii) θ 方向

この場合, 対象となる速度は $\dot{v} \sin n\theta$ であり, 弾性波速度は V_s であるから, 表面応力 T_θ は次式となる.

$$T_\theta = \rho V_s \dot{v} \sin n\theta \tag{16}$$

仮想変位 $\delta v \sin n\theta$ による仮想仕事 δW_θ は, 変位 v を u と同様に節点変位 v_j, v_{j+1} の線形結合で表わすと次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \delta W_\theta &= \int_{r_j}^{r_{j+1}} \int_0^{2\pi} \rho V_s \dot{v} \sin n\theta \ \delta v \sin n\theta \ r d\theta dr \\ &= \{ \delta v_j \ \delta v_{j+1} \} \frac{\pi \rho V_s \ell}{12} [R] \begin{Bmatrix} \dot{v}_j \\ \dot{v}_{j+1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

したがって, θ 方向の節点力ベクトルを $\{f^\theta\} =$

$\{f_j^\theta \ f_{j+1}^\theta\}^T$ とすると,

$$\begin{Bmatrix} f_j^\theta \\ f_{j+1}^\theta \end{Bmatrix} = \frac{\pi \rho V_s \ell}{12} [R] \begin{Bmatrix} \dot{v}_j \\ \dot{v}_{j+1} \end{Bmatrix} \tag{18}$$

(iii) z 方向

この場合には, 対象となる速度は $\dot{w} \cos n\theta$, 弾性波

速度は V_p であるから, 表面応力 T_z は

$$T_z = \rho V_p \dot{w} \cos n\theta \tag{19}$$

仮想変位 $\delta w \cos n\theta$ による仮想仕事 δW_z は, 変位 w を節点変位 w_j, w_{j+1} の線形結合で表わして次式となる.

$$\begin{aligned} \delta W_z &= \int_{r_j}^{r_{j+1}} \int_0^{2\pi} \rho V_p \dot{w} \cos n\theta \ \delta w \cos n\theta \ r d\theta dr \\ &= \{ \delta w_j \ \delta w_{j+1} \} \frac{\pi \rho V_p \ell}{12} [R] \begin{Bmatrix} \dot{w}_j \\ \dot{w}_{j+1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

z 方向の節点力ベクトルを $\{f^z\} = \{f_j^z \ f_{j+1}^z\}^T$ とすると,

$$\begin{Bmatrix} f_j^z \\ f_{j+1}^z \end{Bmatrix} = \frac{\pi \rho V_p \ell}{12} [R] \begin{Bmatrix} \dot{w}_j \\ \dot{w}_{j+1} \end{Bmatrix} \tag{21}$$

(iv) 要素の底面粘性境界マトリクス $[C_B]^A$

式(15), (18), (21)より, 要素Aの底面でなされる仮想仕事から定まった節点力ベクトルと節点速度ベクトルの関係は次式で与えられる.

$$\begin{Bmatrix} f_j^r \\ f_j^\theta \\ f_j^z \\ f_{j+1}^r \\ f_{j+1}^\theta \\ f_{j+1}^z \end{Bmatrix} = \frac{\pi \rho \ell}{12} \begin{Bmatrix} \alpha V_s & 0 & 0 & \beta V_s & 0 & 0 \\ 0 & \alpha V_s & 0 & 0 & \beta V_s & 0 \\ 0 & 0 & \alpha V_p & 0 & 0 & \beta V_p \\ \beta V_s & 0 & 0 & \gamma V_s & 0 & 0 \\ 0 & \beta V_s & 0 & 0 & \gamma V_s & 0 \\ 0 & 0 & \beta V_p & 0 & 0 & \gamma V_p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{v}_j \\ \dot{w}_j \\ \dot{u}_{j+1} \\ \dot{v}_{j+1} \\ \dot{w}_{j+1} \end{Bmatrix} \tag{22}$$

ここに、 $\alpha = 3r_j + r_{j+1}$, $\beta = r_j + r_{j+1}$, $\gamma = r_j + 3r_{j+1}$ である。

式(22)を次のようにマトリクス表示する。

$$\{f\}^A = [C_B]^A \{\dot{\delta}\}_A \quad (23)$$

ここに、

$$[C_B]^A = \frac{\pi \rho l}{12} \begin{bmatrix} \alpha V_s & 0 & 0 & \beta V_s & 0 & 0 \\ 0 & \alpha V_s & 0 & 0 & \beta V_s & 0 \\ 0 & 0 & \alpha V_p & 0 & 0 & \beta V_p \\ \beta V_s & 0 & 0 & \gamma V_s & 0 & 0 \\ 0 & \beta V_s & 0 & 0 & \gamma V_s & 0 \\ 0 & 0 & \beta V_p & 0 & 0 & \gamma V_p \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\{f\}^A = \{f_j^r, f_j^\theta, f_j^z, f_{j+1}^r, f_{j+1}^\theta, f_{j+1}^z\} \quad (25)$$

$$\{\dot{\delta}\}_A = \{\dot{u}_j, \dot{v}_j, \dot{w}_j, \dot{u}_{j+1}, \dot{v}_{j+1}, \dot{w}_{j+1}\} \quad (26)$$

式(24)で与えられるマトリクス $[C_B]^A$ が要素 A に対する底面粘性境界マトリクスであり、全体系のマトリクス $[C_B]$ は、底面全体にわたって $[C_B]^A$ を加え合せたものである。

2.2.4 側方粘性境界マトリクス $[C_s]$

この場合は積分領域が異なるのみで (Fig. 4 参照), 考え方は底面粘性境界マトリクスの場合と全く同じである。

(i) r 方向

速度 $\dot{u} \cos n\theta$ による表面応力 T_r は

$$T_r = \rho V_p \dot{u} \cos n\theta \quad (27)$$

ここで、変位 u を節点変位 u_j と u_{j+1} の線形結合で与える (Fig. 5). すなわち、

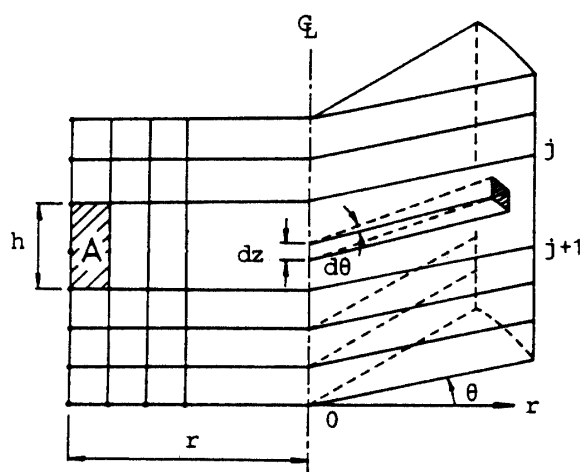


Fig. 4 Notations for calculation of the viscous boundary matrix at the side boundary.

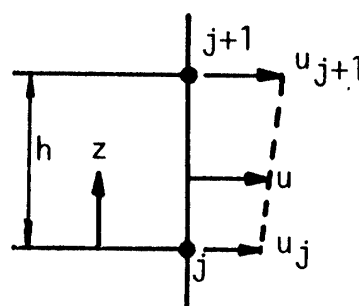


Fig. 5 The relationship between displacement inside the element and nodal displacements of the element at the boundary.

$$u = \frac{1}{h} \{(h-z) \ z\} \begin{Bmatrix} u_j \\ u_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

これより速度 \dot{u} および仮想変位 δu はそれぞれ次式で与えられる。

$$\dot{u} = \frac{1}{h} \{(h-z) \ z\} \begin{Bmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{u}_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

$$\delta u = \frac{1}{h} \{(h-z) \ z\} \begin{Bmatrix} \delta u_j \\ \delta u_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

仮想変位 δu による仮想仕事 δW_r は式(27)~(30)より、

$$\begin{aligned} \delta W_r &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \rho V_p \dot{u} \cos n\theta \delta u \cos n\theta r d\theta dz \\ &= \{\delta u_j \ \delta u_{j+1}\} \frac{\rho V_p r}{h^2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} h-z \\ z \end{Bmatrix} \\ &\quad \cdot \{(h-z) \ z\} \cos^2 n\theta \ d\theta dz \begin{Bmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{u}_{j+1} \end{Bmatrix} \\ &= \{\delta u_j \ \delta u_{j+1}\} \frac{\pi \rho V_p r h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{u}_{j+1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

節点力ベクトル $\{f^r\} = \{f_j^r, f_{j+1}^r\}^T$ を導入すると、

$$\begin{Bmatrix} f_j^r \\ f_{j+1}^r \end{Bmatrix} = \frac{\pi \rho V_p r h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{u}_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

(ii) θ 方向

速度 $\dot{v} \sin n\theta$ による表面応力 T_θ は

$$T_\theta = \rho V_s \dot{v} \sin n\theta \quad (33)$$

仮想変位 $\delta v \sin n\theta$ による仮想仕事 δW_θ は、変位

v を節点変位 v_j と v_{j+1} の線形結合として、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta W_\theta &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \rho V_s \dot{v} \sin n\theta \delta v \sin n\theta r d\theta dz \\ &= \{\delta v_j \quad \delta v_{j+1}\} \frac{\rho V_s r}{h^2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} h-z \\ z \end{Bmatrix} \\ &\quad \cdot \{h-z \quad z\} \sin^2 n\theta d\theta dz \begin{Bmatrix} \dot{v}_j \\ \dot{v}_{j+1} \end{Bmatrix} \\ &= \{\delta v_j \quad \delta v_{j+1}\} \frac{\pi \rho V_s r h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_j \\ \dot{v}_{j+1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{34}$$

節点力ベクトル $\{f^\theta\} = \{f_j^\theta \quad f_{j+1}^\theta\}^T$ を導入すると、

$$\begin{Bmatrix} f_j^\theta \\ f_{j+1}^\theta \end{Bmatrix} = \frac{\pi \rho V_s r h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_j \\ \dot{v}_{j+1} \end{Bmatrix} \tag{35}$$

(iii) z 方向

速度 $\dot{w} \cos n\theta$ による表面応力 T_z は

$$T_z = \rho V_s \dot{w} \cos n\theta \tag{36}$$

仮想変位 $\delta w \cos n\theta$ による仮想仕事 δW_z は、変位 w を w_j, w_{j+1} の線形結合で表して、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta W_z &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \rho V_s \dot{w} \cos n\theta \delta w \cos n\theta r d\theta dz \\ &= \{\delta w_j \quad \delta w_{j+1}\} \frac{\pi \rho V_s r h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w}_j \\ \dot{w}_{j+1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{37}$$

節点力ベクトル $\{f^z\} = \{f_j^z \quad f_{j+1}^z\}^T$ を導入して、

$$\begin{Bmatrix} f_j^z \\ f_{j+1}^z \end{Bmatrix} = \frac{\pi \rho V_s r h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w}_j \\ \dot{w}_{j+1} \end{Bmatrix} \tag{38}$$

(iv) 要素の側方粘性境界マトリクス $[C_s]^A$

式(32), (35), (38)より、節点力と節点速度との間には次式の関係が得られる。

$$\begin{Bmatrix} f_j^r \\ f_j^\theta \\ f_j^z \\ f_{j+1}^r \\ f_{j+1}^\theta \\ f_{j+1}^z \end{Bmatrix} = \frac{\pi \rho r h}{6} \begin{bmatrix} 2V_p & 0 & 0 & V_p & 0 & 0 \\ 0 & 2V_s & 0 & 0 & V_s & 0 \\ 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & V_s \\ V_p & 0 & 0 & 2V_p & 0 & 0 \\ 0 & V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 \\ 0 & 0 & V_s & 0 & 0 & 2V_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{v}_j \\ \dot{w}_j \\ \dot{u}_{j+1} \\ \dot{v}_{j+1} \\ \dot{w}_{j+1} \end{Bmatrix} \tag{39}$$

これより、要素Aの境界 $j \sim j+1$ に対する粘性境界マトリクス $[C_s]^A$ は次式で与えられる。

$$[C_s]^A = \frac{\pi \rho r h}{6} \begin{bmatrix} 2V_p & 0 & 0 & V_p & 0 & 0 \\ 0 & 2V_s & 0 & 0 & V_s & 0 \\ 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & V_s \\ V_p & 0 & 0 & 2V_p & 0 & 0 \\ 0 & V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 \\ 0 & 0 & V_s & 0 & 0 & 2V_s \end{bmatrix} \tag{40}$$

したがって、側方粘性境界マトリクス $[C_s]$ は、式(40)で与えられるマトリクスを側方境界全域にわたって加え合せれば求まる。

2.2.5 自由地盤の変形に伴う側方境界剛性マトリクス $[G_s]$

自由地盤との鉛直境界面に存在する応力成分は、自由地盤が3次元挙動をする場合には Fig. 6 に示すように $\sigma_r, \tau_{r\theta}, \tau_{zr}$ の3成分が存在する。しかし水平入力あるいは上下入力だけを考える場合には、それに応じて生じる応力成分について考える必要がある。そして、この応力とそれを生ぜしめる仮想変位によってなされる仮想仕事を考えなければならない。

(i) 水平入力 (せん断振動) の場合

水平入力の場合、自由地盤の変位成分は r 方向、 θ 方向に存在するが、これらは z のみの関数である。ここで、自由地盤の変位振幅を u_r とすると、r 方向および θ 方向の変位はそれぞれ次式で与えられる。

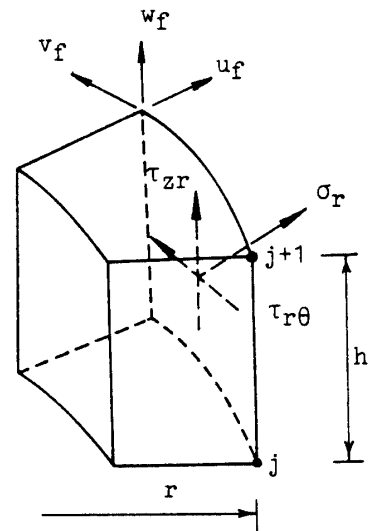


Fig. 6 Stress and displacement components at the boundary.

$$\left. \begin{array}{l} u_r \cos n\theta \text{ (r 方向)} \\ -u_r \sin n\theta \text{ (\theta 方向)} \end{array} \right\} \quad (41)$$

これを用いて弾性理論によりひずみを求めると、存在するひずみは次の2成分である。

$$\gamma_{\theta z} = -\frac{\partial u_r}{\partial z} \sin n\theta$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\partial u_r}{\partial z} \cos n\theta$$

このうち、側方境界面に作用するのは上述の通り τ_{zr} である。すなわち、

$$\tau_{zr} = \mu \gamma_{zr} = \mu \frac{\partial u_r}{\partial z} \cos n\theta \quad (42)$$

ここに、 μ はせん断弾性係数である。

式(19)より仮想仕事 δW は次式で与えられる。

$$\delta W = \int_0^h \int_0^{2\pi} \tau_{zr} \delta u_r \cos n\theta r d\theta dz \quad (43)$$

ここで、自由地盤の変位を、Fig. 5 の様に離散化した自由地盤の節点変位 $u_{r,j}$, $u_{r,j+1}$ の線形結合で表わして式(43)に代入すると、

$$\begin{aligned} \delta W &= \{ \delta u_{r,j} \quad \delta u_{r,j+1} \} \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{\mu}{h^2} \begin{Bmatrix} h-z \\ z \end{Bmatrix} \\ &\quad \cdot \{ -1 \quad 1 \} \cos^2 n\theta r d\theta dz \begin{Bmatrix} u_{r,j} \\ u_{r,j+1} \end{Bmatrix} \\ &= \{ \delta u_{r,j} \quad \delta u_{r,j+1} \} \frac{\pi \mu r}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{r,j} \\ u_{r,j+1} \end{Bmatrix} \quad (44) \end{aligned}$$

節点力 $\{ f_{r,j}^z \quad f_{r,j+1}^z \}^T$ を導入すると、式(44)より、

$$\begin{Bmatrix} f_{r,j}^z \\ f_{r,j+1}^z \end{Bmatrix} = \frac{\pi \mu r}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{r,j} \\ u_{r,j+1} \end{Bmatrix} \quad (45)$$

(ii) 鉛直入力 (縦振動) の場合

この場合の変位成分は z 方向のみであり、これも z のみの関数である。そして、それは $w_r \cos n\theta$ と表せる。弾性論より鉛直境界面に存在する応力は σ_r のみであり、 σ_r は次式で与えられる。

$$\sigma_r = \lambda \frac{\partial w_r}{\partial z} \cos n\theta \quad (46)$$

ここに、 λ はラーメの定数である。

式(46)より仮想仕事 δW は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \sigma_r \delta w_r \cos n\theta r d\theta dz \\ &= \{ \delta w_{r,j} \quad \delta w_{r,j+1} \} \frac{\pi \lambda r}{h^2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} h-z \\ z \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\cdot \{ -1 \quad 1 \} \cos^2 n\theta r d\theta dz \begin{Bmatrix} w_{r,j} \\ w_{r,j+1} \end{Bmatrix}$$

$$= \{ \delta w_{r,j} \quad \delta w_{r,j+1} \} \frac{\pi \lambda r}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{r,j} \\ w_{r,j+1} \end{Bmatrix} \quad (47)$$

節点力 $\{ f_{r,j}^z \quad f_{r,j+1}^z \}^T$ を導入すると、式(47)より

$$\begin{Bmatrix} f_{r,j}^z \\ f_{r,j+1}^z \end{Bmatrix} = \frac{\pi \lambda r}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{r,j} \\ w_{r,j+1} \end{Bmatrix} \quad (48)$$

(iii) 要素の境界剛性マトリクス $[G_s]^A$

式(45), (48)の結果をまとめてマトリクス表示すると次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} f_{r,j}^z \\ f_{r,j}^\theta \\ f_{r,j}^z \\ f_{r,j+1}^z \\ f_{r,j+1}^\theta \\ f_{r,j+1}^z \end{Bmatrix} = \frac{\pi r}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{r,j} \\ \dot{v}_{r,j} \\ \dot{w}_{r,j} \\ \dot{u}_{r,j+1} \\ \dot{v}_{r,j+1} \\ \dot{w}_{r,j+1} \end{Bmatrix} \quad (49)$$

すなわち、

$$[G_s]^A = \frac{\pi r}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

側方境界剛性マトリクス $[G_s]$ は $[G_s]^A$ を側方境界面を構成する全節点にわたって加え合せることによって求まる。

2.2.6 自由地盤の変形に伴う側方境界減衰マトリクス $[G_{cs}]$

マトリクス $[G_{cs}]$ はレーレーダンピングの一種である剛性比例型と仮定して、次式で与えるものとする。

$$[G_{cs}] = \frac{h_d}{\pi f} [G_s] \quad (51)$$

ここに、 h_d は振動数 f に対応する減衰定数である。

2.3 自由地盤の振動

自由地盤の振動に関しては、既に運動方程式が求められているので、ここではその概略と結果だけを述べるにとどめる。

(i) 仮想仕事の原理

自由地盤の振動に対する仮想仕事の原理は次式で与えられる。

$$\int_V \delta\{\epsilon\}^T\{\sigma\}dv + \int_V \delta\{u\}^T(\eta\{\dot{u}\} + \rho\{\ddot{u}\})dv = 0 \tag{52}$$

記号は式(1)に対するものと同様である。

以下、水平振動、鉛直振動それぞれについて述べる。

(ii) 水平振動の場合

変位 u が節点変位 u_j, u_{j+1} の線形結合で与えられるとする (Fig. 5 参照)。このときの剛性マトリクス $[k]^A$ と質量マトリクス $[m]^A$ は仮想仕事の原理を用いてそれぞれ次のように求まる。

$$[k]^A = \frac{\mu}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{53}$$

$$[m]^A = \frac{\rho h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{54}$$

(iii) 鉛直入力の場合

$$[k]^A = \frac{\lambda + 2\mu}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{55}$$

$$[m]^A = \frac{\rho h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{56}$$

(iv) 減衰マトリクス

減衰マトリクスは式(51)と同様に剛性比例型を考え、次式で与えられるものとする。

$$[c]^A = \frac{h_d}{\pi f} [k]^A \tag{57}$$

自由地盤全体の運動方程式は、式(53)~(57)で与えられる剛性、減衰、質量マトリクスを加え合せた $[K]^f$ 、 $[C]^f$ 、 $[M]^f$ を用いて、次式で与えられる。

$$[K]^f\{\delta_r\} + [C]^f\{\dot{\delta}_r\} + [M]^f\{\ddot{\delta}_r\} = -[M]^f\{I\}\ddot{u}_g \tag{58}$$

これを解くことによって、 $\{\delta_r\}$ および $\{\dot{\delta}_r\}$ が求まる。以上より、式(3)の全てのマトリクス、ベクトルが未知量 $\{\delta\}$ 、 $\{\dot{\delta}\}$ 、 $\{\ddot{\delta}\}$ を除いて定まったことになる。

3. 解析手法の妥当性の検証

3.1 検証方法

ここでは、式(3)で与えられる運動方程式が妥当であるか否かの検証を行う。その手順を Fig. 7 に示す。すなわち、

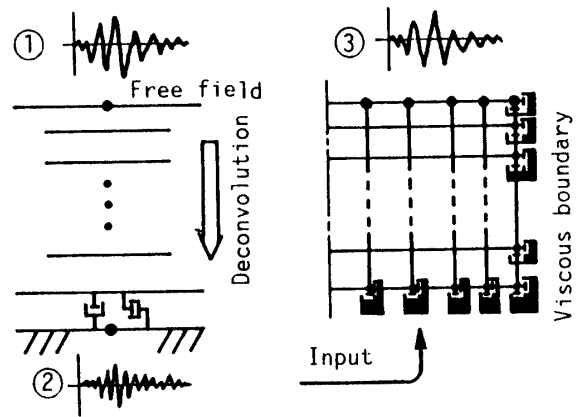


Fig.7 A schematic drawing of the procedure to check the proposed analysis method.

- (i) 自由地盤 (Free field) の地表面における加速度波形①を Deconvolution によって基盤波形②へ変換する。
- (ii) 基盤波形②を有限要素モデルに入力し、式(3)により応答解析を行う。このときの有限要素モデルは自由地盤と同様に、鉛直方向にのみ材料特性の変化を有するものとする。
- (iii) ステップ(ii)の結果得られた有限要素モデルの地表面での応答加速度③と加速度波形①とを比較する。この場合、有限要素モデルは自由地盤と同一の地盤構成を有し、何ら不規則性を有していないので、自由地盤と同一の挙動を示す。すなわち波形①と③は一致するはずである。と同時に、入力方向が水平であれば、鉛直成分=0、逆に鉛直入力であれば水平成分=0となるはずである。

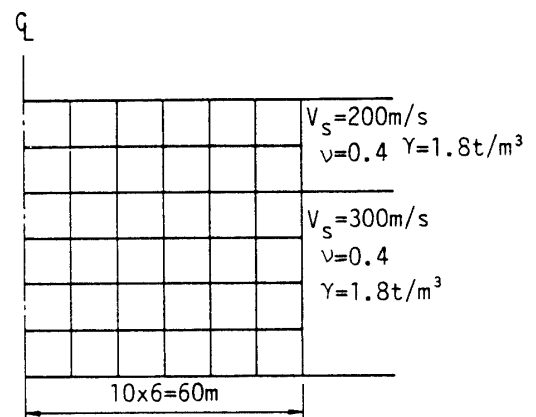


Fig.8 A finite element model for an analyzed model.

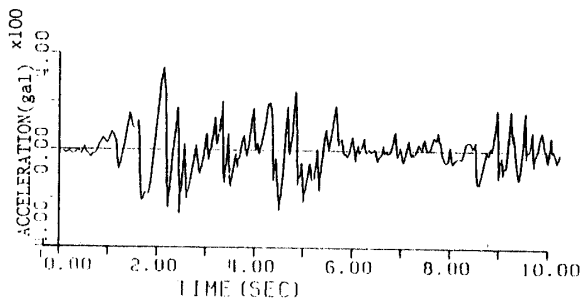


Fig. 9 (a) Accelerogram at the surface of a free field.

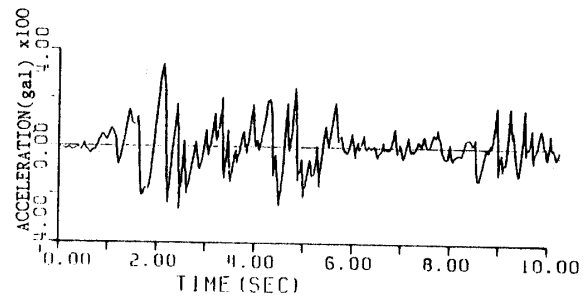


Fig. 9 (c) Calculated acceleration at the surface of the model analyzed.

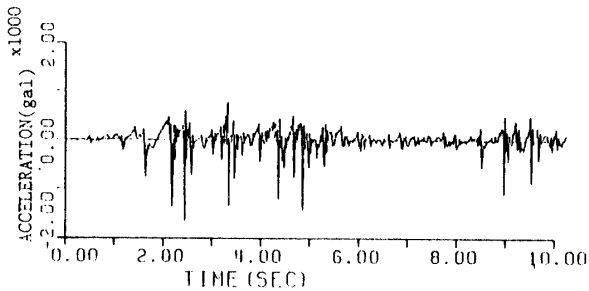


Fig. 9 (b) Deconvolved accelerogram at the base of a free field.

3.2 解析モデル

Fig. 8 に検証に用いたモデルを示す。また、加速度波形①としては、El Centro (1940) NS 成分を用いた。これを Fig. 9(a) に示す。Fig. 8 に示したモデルと同じ地盤構成を有する自由地盤の基盤における加速度波形②を Fig. 9(b) に示す。そして、これを入力して、Fig. 8 に示したモデルの地表面における水平方向の応答加速度波形③を Fig. 9(c) に示す。Fig. 9(a), (c) から明らかなように、両者は非常に良い一致を示している。数値的にも有効数字 3 桁まで一致している。また、鉛直方向の応答加速度は水平成分に比べて 10^{-4} のオーダーである。これより、式(3)は妥当性を有するものと考えられる。

以上述べて来たのは外部加振問題に対する妥当性の検証であり、内部加振問題、すなわち、境界におけるエネルギー吸収能に対する検証ではない点に留意しなければならない。この点に関しては別途、稿を改めて述べる予定である。

4. まとめ

本研究は、非軸対称荷重（外部加振）を受ける軸対称構造物—地盤系の震動解析を行う際の境界条件として、粘性境界を仮想仕事の原理を用いて誘導したもの

である。

結果として得られた粘性境界マトリクスは、非対角項の存在するものとなり、通常用いられる対角要素とは異なるものとなった。このマトリクスを用いてその妥当性を外部加震の場合について検討した結果、十分な精度で解が得られることが判明した。

しかしながら、境界でのエネルギーの吸収能に関する検討、すなわち、内部加振の場合についての検討は本報告においては行なわれておらず、この問題に関しては別の機会に報告する予定である。

最後に、本研究を進める上で、山口大学工学部大学院生、小丸英明君には数値計算、データの整理を手伝っていただいた。感謝の意を表す次第である。

参考文献

- 1) J. Lysmer and G. Waas : Shear waves in plane infinite structure, Proc. of ASCE, Vol. 98, No. EM1, 85-105 (1972).
- 2) J. Lysmer : Lumped mass method for Rayleigh waves, BSSA, Vol. 60, No. 1, 89-104 (1970).
- 3) E. Kausel : Forced vibrations of circular foundations on layered media, MIT, (1974).
- 4) W. Smith : A non-reflecting plane boundary for wave propagation problems, J. Comp. Phys., 15, 492-503 (1974).
- 5) P. A. Cundall, R. R. Kuner, Carpenter and J. Marti : Solution of infinite dynamic problems by finite element modelling in the time domain, Proc. 2nd Int. Cont. Appl. Num. Modelling, Madrid, Spain, (1978).
- 6) T. Suzuki and M. Hakuno : 3-D dynamic analysis of ground motion by FEM with non-reflecting boundaries, Proc. of JSCE struc-

- tural Eng./Earthquake Eng., Vol.2, No1, 185-193 (1985).
- 7) J. Lysmer and R. L. Kuhlemeyer: Finite dynamic model for infinite media, Proc. of ASCE. Vol.95, No EM4, 859-877 (1969).
- 8) J. Lysmer, T. Udaka, C. Tsai and H. B. Seed: FLUSH, A computer program for approximate 3-D analysis of soil-structure interaction problems, EERC 75-30, (1975).
(昭和61年10月15日受理)