

# 走行従動荷重を受ける梁の動的弾性安定解析

會田忠義\*・小松茂生\*\*

Analysis of Dynamic stability of Beams under Travelling Follower loads

Tadayoshi AIDA and Shigeo KOMATUS

## Abstract

It was found that the perturbation equation of motion of the thin-walled beam subjected to the travelling follower load system becomes the Hill's equation and that parametrically excited unstable coupled vibrations occur. The boundary frequency equations of the simple parametric resonance, form which the instability regions are estimated, are obtained by Bolotin's method. The instability regions of a simply supported beam are illustrated, taking into account the effects of load mass.

## 1. まえがき

走行する一定方向鉛直荷重を受ける梁の動的応答については、これまでに多くの研究がなされてきた<sup>1)</sup>。特に、等間隔の一系列の一定方向鉛直荷重が梁上を走行する場合、係数励振不安定振動が起ることも報告されている<sup>2)</sup>。上記の問題で、走行荷重が従動力である場合、その動的応答は興味深い問題である。著者らはこの種の問題に対して、単一および連行走行従動荷重を受ける梁の運動方程式とこれらによる動的応答を、特に、連行走行従動荷重により不安定振動が生ずることを、文献3で示してきた。

本研究は、連行走行従動荷重を受ける梁の動的弾性安定性の解析法を示すとともに、その安定性を明らかにするのを目的とする。本文では、質量を有する上記走行荷重を受ける梁の攪乱方程式が Hill 型方程式になり、係数励振不安定振動、特に、単純共振の境界振動数方程式が Bolotin 法で求められることを示す。さらに、単純支持梁の上記共振の不安定領域を示す。

## 2. 運動方程式と連成振動の解析

断面主軸に  $x$  および  $y$  軸が、梁軸に  $z$  軸が一致する直角座標を設ける。せん断中心  $(x_s, y_s)$  の  $x$  および  $y$  軸方向の変位をそれぞれ  $u_s, v_s$ 、ねじり角を  $\theta$  とするとき、運動方程式は次式で表わされる<sup>3)</sup>。

$$\begin{aligned} m\left(\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} + y_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right) + EI_{xx} \frac{\partial^4 u_s}{\partial z^4} + q_y \theta - \bar{q}_x &= 0, \\ m\left(\frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} - x_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right) + EI_{yy} \frac{\partial^4 v_s}{\partial z^4} - q_y - \bar{q}_y &= 0, \\ \mu I_{rs} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + m\left(y_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - x_s \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2}\right) + EI_{\omega} \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} \\ - GK \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - q_y \theta (e_y - y_s) - q_x (e_x - x_s) - \bar{m}_z + \bar{q}_x \\ (e_y - y_s) - \bar{q}_y (e_x - x_s) &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(2.1)$$

ここで、

$m$  : 梁の単位長さ質量,

$\mu I_{rs}$  : 梁断面のせん断中心に関する質量の慣性モーメント,

$EI_{xx}, EI_{yy}$  :  $y$  および  $x$  軸に関する曲げ剛性,

$GK$  : ねじり剛性,

$EI_{\omega}$  : 曲げねじり剛性,

$e_x, e_y$  : 荷重の作用位置座標.

$q_y$  は集中荷重  $P \cos \omega t$  ( $P$  : 荷重振幅,  $\omega$  : 荷重振動数) からなる荷重列で、集中荷重間隔  $a$ 、走行速度  $V$  をもつ。このとき、 $q_y$  は次式で表わされる周期  $a/V$  をもつ周期関数となる<sup>3)</sup>。

$$q_y = \begin{cases} P \cos \omega t \sum_{j=1}^n \delta(z - \xi(t, j)) \dots 0 \leq t < T_s \\ P \cos \omega t \sum_{j=1}^{n-1} \delta(z - \xi(t, j)) \dots T_s \leq t \leq T_p \end{cases} \quad \dots\dots(2.2)$$

式中、 $\xi(t, j) = Vt + (j-1)a$ 、 $T_s = \{l - (n-1)a\}/V$ 、 $T_p = a/V$ 、 $\delta$  は Dirac の  $\delta$  関数である。ここで荷重振動数  $\omega$  は荷重移動振動数  $\omega_0 = 2\pi V/a$  の整数倍であるとする。

$\bar{q}_x, \bar{q}_y, \bar{m}_z$  は荷重質量にともなう付加慣性力および

\* 建設工学科

\*\* 大学院土木工学専攻

慣性偶力である。集中荷重の質量は  $\mathfrak{M}_0$ 、質量の慣性モーメントは  $J_0$  であるとし、質量分布は荷重列と同様で、集中質量間隔  $a$ 、移動速度  $V$  であるとする。このとき、 $\bar{q}_x$ 、 $\bar{q}_y$  および  $\bar{m}_z$  は周期  $a/V$  をもつ周期関数となり、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \bar{q}_x &= \begin{cases} -\mathfrak{M}_0 \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - (e_y - y_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta(z - \xi(t, j)) & \dots 0 \leq t < T_s \\ -\mathfrak{M}_0 \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - (e_y - y_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta(z - \xi(t, j)) & \dots T_s \leq t \leq T_p \end{cases} \\ \bar{q}_y &= \begin{cases} -\mathfrak{M}_0 \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} + (e_x - x_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta(z - \xi(t, j)) & \dots 0 \leq t < T_s \\ -\mathfrak{M}_0 \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} + (e_x - x_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta(z - \xi(t, j)) & \dots T_s \leq t \leq T_p \end{cases} \\ \bar{m}_z &= \begin{cases} -J_0 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \delta(z - \xi(t, j)) & \dots 0 \leq t < T_s \\ -J_0 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \delta(z - \xi(t, j)) & \dots T_s \leq t \leq T_p \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

運動方程式 (2.1) の解を次の近似式で表わす。

$$\left. \begin{aligned} u_s &= \sum_{k=1}^N \rho_k(t) u_{sk}(z) \\ v_s &= \sum_{k=1}^N \sigma_k(t) v_{sk}(z) \\ \theta &= \sum_{k=1}^N \tau_k(t) \theta_k(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

上式中、 $\rho_k(t)$ 、 $\sigma_k(t)$  および  $\tau_k(t)$  は時間に関する未知関数で、 $u_{sk}(z)$ 、 $v_{sk}(z)$  はそれぞれ水平および鉛直の自由振動の  $k$  次の固有関数で、 $\theta_k(z)$  は曲げねじり剛性を考慮した場合のねじり自由振動の  $k$  次の固有関数である。単純梁の場合、 $u_{sk}(z) = v_{sk}(z) = \theta_k(z) = \sin k\pi z/l$  である。

運動方程式 (2.1) に連行荷重 (2.2)、付加慣性力 (2.3)、近似解 (2.4) を代入整理すると、次式が得られる<sup>3)</sup>。

$$(A + A_M) \frac{d^2 f}{dt^2} + (B + PC)f + d = 0 \quad \dots (2.5)$$

ここで、

$$f = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}^T \quad (2.6)$$

$$A = \begin{bmatrix} [A_{1rs}] & [A_{2rs}] & [A_{3rs}] \\ [A_{4rs}] & [A_{5rs}] & [A_{6rs}] \\ [A_{7rs}] & [A_{8rs}] & [A_{9rs}] \end{bmatrix} \quad r, s = 1, 2, \dots, N \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} A_{1rs} &= A_{5rs} = A_{9rs} = \delta_{rs}, \quad A_{2rs} = A_{4rs} = 0, \\ A_{3rs} &= y_s \delta_{rs}, \quad A_{6rs} = -x_s \delta_{rs}, \quad A_{7rs} = m y_s / \mu I_{ps} \\ A_{8rs} &= -m x_s / \mu I_{ps}, \quad \delta_{rs} : \text{Kronecker の記号}, \\ A_M &= \begin{bmatrix} [A_{M1rs}] & [A_{M2rs}] & [A_{M3rs}] \\ [A_{M4rs}] & [A_{M5rs}] & [A_{M6rs}] \\ [A_{M7rs}] & [A_{M8rs}] & [A_{M9rs}] \end{bmatrix} \quad r, s = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} A_{M1rs} &= 2\mathfrak{M}_0 f_{rs} / lm, \quad A_{M2rs} = 0, \\ A_{M3rs} &= -2\mathfrak{M}_0 (e_y - y_s) f_{rs} / lm, \quad A_{M4rs} = 0, \\ A_{M5rs} &= A_{M1rs}, \quad A_{M6rs} = 2\mathfrak{M}_0 (e_x - x_s) f_{rs} / lm, \\ A_{M7rs} &= -2\mathfrak{M}_0 (e_y - y_s) f_{rs} / \mu I_{ps} l, \\ A_{M8rs} &= 2\mathfrak{M}_0 (e_x - x_s) f_{rs} / \mu I_{ps} l, \\ A_{M9rs} &= 2J_s f_{rs} / \mu I_{ps} l \\ J_s &= J_0 + \mathfrak{M}_0 (e_x - x_s)^2 + \mathfrak{M}_0 (e_y - y_s)^2 \\ B &= \begin{bmatrix} [B_{1rs}] & [B_{2rs}] & [B_{3rs}] \\ [B_{4rs}] & [B_{5rs}] & [B_{6rs}] \\ [B_{7rs}] & [B_{8rs}] & [B_{9rs}] \end{bmatrix} \quad r, s = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} B_{2rs} &= B_{3rs} = B_{4rs} = B_{6rs} = B_{7rs} = B_{8rs} = 0, \\ B_{1rs} &= \omega_{ur}^2 \delta_{rs}, \quad B_{5rs} = \omega_{vr}^2 \delta_{rs}, \quad B_{9rs} = \omega_{\theta r}^2 \delta_{rs}, \\ \omega_{ur}^2 &= (r\pi/l)^4 (EI_{xx}/m), \quad \omega_{vr}^2 = (r\pi/l)^4 (EI_{yy}/m), \\ \omega_{\theta r}^2 &= (r\pi/l)^2 \{ (r\pi/l)^2 EI_{\omega} + GK \} / \mu I_{ps} \\ C &= \begin{bmatrix} [C_{1rs}] & [C_{2rs}] & [C_{3rs}] \\ [C_{4rs}] & [C_{5rs}] & [C_{6rs}] \\ [C_{7rs}] & [C_{8rs}] & [C_{9rs}] \end{bmatrix} \quad r, s = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} C_{1rs} &= C_{2rs} = C_{4rs} = C_{5rs} = C_{6rs} = C_{7rs} = C_{8rs} = 0, \\ C_{3rs} &= 2f_{rs} / lm, \quad C_{9rs} = -2(e_y - y_s) f_{rs} / \mu I_{ps} l, \\ d &= \begin{Bmatrix} \{d_{1r}\} \\ \{d_{2r}\} \\ \{d_{3r}\} \end{Bmatrix} \quad r = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.11)$$

$d_{1r} = 0$ 、 $d_{2r} = -2Pg_r / lm$ 、 $d_{3r} = -2P(e_x - x_s)g_r / \mu I_{ps} l$   
 $C$  中に含まれる  $f_{rs}$  および  $d$  中に含まれる  $g_r$  は次の値をもつ周期  $T_p$  の周期関数である。

$$\begin{aligned} f_{rs} &= \begin{cases} \cos \omega t \sum_{j=1}^n \sin \frac{r\pi \xi(t, j)}{l} \sin \frac{s\pi \xi(t, j)}{l} & \dots 0 \leq t < T_s \\ \cos \omega t \sum_{j=1}^{n-1} \sin \frac{r\pi \xi(t, j)}{l} \sin \frac{s\pi \xi(t, j)}{l} & \dots T_s \leq t \leq T_p \end{cases} \\ g_r &= \begin{cases} \cos \omega t \sum_{j=1}^n \sin \frac{r\pi \xi(t, j)}{l} & \dots 0 \leq t < T_s \\ \cos \omega t \sum_{j=1}^{n-1} \sin \frac{r\pi \xi(t, j)}{l} & \dots T_s \leq t \leq T_p \end{cases} \end{aligned}$$

$A_M$  中に含まれる  $f_{rs}$  は上記  $f_{rs}$  中、 $\omega = 0$  とした場合の値である。

式(2.5) を数値解析することにより、連行走行従動荷重に対する動的応答が明らかになる。

### 3. 連成振動の安定解析

#### 3.1 擾乱方程式

式 (2.5) にもとづいて定常振動 ( $f$ ) している状態に擾乱 ( $\delta$ ) を与えたとき、擾乱状態の解は  $f + \delta$  で表わされる。このとき、 $\delta$  の満すべき擾乱方程式は次式で表わされる。

$$(A + A_M) \frac{d^2 \delta}{dt^2} + (B + PC)\delta = 0 \quad \dots (3.1)$$

式中の  $A_M$  および  $C$  の要素中に  $f_{rs}$  および  $\bar{f}_{rs}$  が含まれており、これらが周期  $T_p$  をもつことから  $A_M$  および  $C$  は周期  $T_p$  をもつ周期係数となる。したがって、式 (3.1) は Hill 方程式に相当する。

今、 $f_{rs}$  および  $\bar{f}_{rs}$  を周期  $T_p$  をもつ Fourier 級数

$$\begin{cases} f_{rs} \\ \bar{f}_{rs} \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{cases} a_{0rs} \\ a_{0rs} \end{cases} + \sum_{p=1}^{\infty} \begin{cases} a_{prs} \cos p\omega_0 t + b_{prs} \sin p\omega_0 t \\ \bar{a}_{prs} \end{cases}$$

に展開すると、式 (3.1) は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} & [A + \{A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (A_{1p} \cos p\omega_0 t + A_{2p} \sin p\omega_0 t)\}] \frac{d^2 \delta}{dt^2} \\ & + [B + P\{C_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (C_{1p} \cos p\omega_0 t + C_{2p} \sin p\omega_0 t)\}] \delta = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここで、 $A_0, A_{1p}, A_{2p}, C_0, C_{1p}, C_{2p}$  は次の要素をもつ。

$$A_0 = \begin{bmatrix} [A_{01rs}] & [A_{02rs}] & [A_{03rs}] \\ [A_{04rs}] & [A_{05rs}] & [A_{06rs}] \\ [A_{07rs}] & [A_{08rs}] & [A_{09rs}] \end{bmatrix} \quad r, s = 1, 2, \dots, N \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} A_{01rs} &= \mathfrak{M}_0 a_{0rs} / lm, \quad A_{02rs} = 0, \\ A_{03rs} &= -\mathfrak{M}_0 (e_y - y_s) a_{0rs} / lm, \quad A_{04rs} = 0, \\ A_{05rs} &= A_{01rs}, \quad A_{06rs} = \mathfrak{M}_0 (e_x - x_s) a_{0rs} / lm, \\ A_{07rs} &= -\mathfrak{M}_0 (e_y - y_s) a_{0rs} / \mu I_{ps} l, \\ A_{08rs} &= \mathfrak{M}_0 (e_x - x_s) a_{0rs} / \mu I_{ps} l, \\ A_{09rs} &= J_s a_{0rs} / \mu I_{ps} l \end{aligned}$$

$$A_{1p} = \begin{bmatrix} [A_{11rs}] & [A_{12rs}] & [A_{13rs}] \\ [A_{14rs}] & [A_{15rs}] & [A_{16rs}] \\ [A_{17rs}] & [A_{18rs}] & [A_{19rs}] \end{bmatrix} \quad r, s = 1, 2, \dots, N \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} A_{11rs} &= 2\mathfrak{M}_0 a_{prs} / lm, \quad A_{12rs} = 0, \\ A_{13rs} &= -2\mathfrak{M}_0 (e_y - y_s) a_{prs} / lm, \quad A_{14rs} = 0, \\ A_{15rs} &= A_{11rs}, \quad A_{16rs} = 2\mathfrak{M}_0 (e_x - x_s) a_{prs} / lm, \\ A_{17rs} &= -2\mathfrak{M}_0 (e_y - y_s) a_{prs} / \mu I_{ps} l, \\ A_{18rs} &= 2\mathfrak{M}_0 (e_x - x_s) a_{prs} / \mu I_{ps} l, \\ A_{19rs} &= 2J_s a_{prs} / \mu I_{ps} l \end{aligned}$$

$$A_{2p} = \begin{bmatrix} [A_{21rs}] & [A_{22rs}] & [A_{23rs}] \\ [A_{24rs}] & [A_{25rs}] & [A_{26rs}] \\ [A_{27rs}] & [A_{28rs}] & [A_{29rs}] \end{bmatrix} \quad r, s = 1, 2, \dots, N \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} A_{21rs} &= 2\mathfrak{M}_0 \bar{b}_{prs} / lm, \quad A_{22rs} = 0, \\ A_{23rs} &= -2\mathfrak{M}_0 (e_y - y_s) \bar{b}_{prs} / lm, \quad A_{24rs} = 0, \\ A_{25rs} &= A_{21rs}, \quad A_{26rs} = 2\mathfrak{M}_0 (e_x - x_s) \bar{b}_{prs} / lm, \\ A_{27rs} &= -2\mathfrak{M}_0 (e_y - y_s) \bar{b}_{prs} / \mu I_{ps} l, \\ A_{28rs} &= 2\mathfrak{M}_0 (e_x - x_s) \bar{b}_{prs} / \mu I_{ps} l, \\ A_{29rs} &= 2J_s \bar{b}_{prs} / \mu I_{ps} l \end{aligned}$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} [C_{01rs}] & [C_{02rs}] & [C_{03rs}] \\ [C_{04rs}] & [C_{05rs}] & [C_{06rs}] \\ [C_{07rs}] & [C_{08rs}] & [C_{09rs}] \end{bmatrix} \quad r, s = 1, 2, \dots, N \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} C_{01rs} &= C_{02rs} = C_{04rs} = C_{05rs} = C_{06rs} = C_{07rs} = C_{08rs} = 0, \\ C_{03rs} &= a_{0rs} / lm, \quad C_{09rs} = -(e_y - y_s) a_{0rs} / \mu I_{ps} l \end{aligned}$$

$$C_{1p} = \begin{bmatrix} [C_{11rs}] & [C_{12rs}] & [C_{13rs}] \\ [C_{14rs}] & [C_{15rs}] & [C_{16rs}] \\ [C_{17rs}] & [C_{18rs}] & [C_{19rs}] \end{bmatrix} \quad r, s = 1, 2, \dots, N \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} C_{11rs} &= C_{12rs} = C_{14rs} = C_{15rs} = C_{16rs} = C_{17rs} = C_{18rs} = 0, \\ C_{13rs} &= 2a_{prs} / lm, \quad C_{19rs} = -2(e_y - y_s) a_{prs} / \mu I_{ps} l, \end{aligned}$$

$$C_{2p} = \begin{bmatrix} [C_{21rs}] & [C_{22rs}] & [C_{23rs}] \\ [C_{24rs}] & [C_{25rs}] & [C_{26rs}] \\ [C_{27rs}] & [C_{28rs}] & [C_{29rs}] \end{bmatrix} \quad r, s = 1, 2, \dots, N \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} C_{21rs} &= C_{22rs} = C_{24rs} = C_{25rs} = C_{26rs} = C_{27rs} = C_{28rs} = 0, \\ C_{23rs} &= 2b_{prs} / lm, \quad C_{29rs} = -2(e_y - y_s) b_{prs} / \mu I_{ps} l \end{aligned}$$

### 3.2 境界振動数方程式

Hill 方程式の解について、係数の周期と同じか、あるいは 2 倍の周期をもつ周期解が単純共振の不安定領域と安定領域を区分すること、より厳密にいうと、同じ周期をもつ二つの解が上記の不安定領域を区分し、異なる周期をもつ解が安定領域を区分することが知られている<sup>2)</sup>。

係数の周期  $T_p = a/V$  の 2 倍の周期をもつ解を次式で表わす。

$$\delta = \sum_{\zeta=1,3,5}^{\infty} (a_{\zeta} \cos \frac{1}{2} \zeta \omega_0 t + b_{\zeta} \sin \frac{1}{2} \zeta \omega_0 t) \quad \dots (3.9)$$

式中、 $a_{\zeta}$  と  $b_{\zeta}$  は時間に無関係なベクトルである。式 (3.9) を式 (3.2) に代入し、調和バランス法を適用すると、 $a$  および  $b$  を決定するため次の同次方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & -\frac{\omega_0^2}{4} \eta^2 (A + A_0) a_{\eta} + PC_0 a_{\eta} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \left[ \left\{ -\frac{\omega_0^2}{4} (2p - \eta)^2 A_{1p} + PC_{1p} \right\} a_{-2p+\eta} \right. \\ & + \left\{ -\frac{\omega_0^2}{4} (2p + \eta)^2 A_{1p} + PC_{1p} \right\} a_{-2p-\eta} \\ & + \left\{ -\frac{\omega_0^2}{4} (2p - \eta)^2 A_{1p} + PC_{1p} \right\} a_{2p-\eta} \\ & + \left\{ -\frac{\omega_0^2}{4} (2p + \eta)^2 A_{1p} + PC_{1p} \right\} a_{2p+\eta} \\ & + \left\{ -\frac{\omega_0^2}{4} (2p - \eta)^2 A_{2p} + PC_{2p} \right\} b_{-2p+\eta} \\ & + \left\{ -\frac{\omega_0^2}{4} (2p + \eta)^2 A_{2p} + PC_{2p} \right\} b_{-2p-\eta} \\ & + \left\{ -\frac{\omega_0^2}{4} (2p - \eta)^2 A_{2p} + PC_{2p} \right\} b_{2p-\eta} \\ & \left. - \left\{ -\frac{\omega_0^2}{4} (2p + \eta)^2 A_{2p} + PC_{2p} \right\} b_{2p+\eta} \right] = 0 \end{aligned} \quad \eta = 1, 3, \dots \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\omega_0^2}{4} \eta^2 (A + A_0) b_{\eta} + Bb_{\eta} + PC_0 b_{\eta} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \left[ \left\{ -\frac{\omega_0^2}{4} (2p - \eta)^2 A_{1p} + PC_{1p} \right\} b_{-2p+\eta} \right. \\ & \left. - \left\{ -\frac{\omega_0^2}{4} (2p + \eta)^2 A_{1p} + PC_{1p} \right\} b_{-2p-\eta} \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & - \left\{ -\frac{\omega_0^2}{4}(2p-\eta)^2 A_{1p} + PC_{1p} \right\} b_{2p-\eta} & - \left\{ -\frac{\omega_0^2}{4}(2p+\eta)^2 A_{2p} + PC_{2p} \right\} a_{2p+\eta} & = 0 \\
 & + \left\{ -\frac{\omega_0^2}{4}(2p+\eta)^2 A_{1p} + PC_{1p} \right\} b_{2p+\eta} & & \eta=2, 4, \dots \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

$a_0, a_\eta$  および  $b_\eta$  が存在するための条件は次式となる。

$$\left| -\frac{\omega_0^2}{4}([A]_2 + \frac{1}{2}[A_M]_2) + [B]_2 + \frac{P}{2}[C]_2 \right| = 0 \quad (3.21)$$

式中,  $[A]_2, [A_M]_2, [B]_2$  および  $[C]_2$  は次の要素をもつ。

$$[A]_2 = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & & & & \\ & 6^2 A & & & & & & & & & \\ & & 4^2 A & & & & & & & & \\ & & & 2^2 A & & & & & & & \\ \hline & & & & 0 & & & & & & \\ \hline & & & & & 2^2 A & & & & & \\ & & & & & & 4^2 A & & & & \\ & & & & & & & 6^2 A & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

$$[B]_2 = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & & & & \\ & B & & & & & & & & & \\ & & B & & & & & & & & \\ \hline & & & B & & & & & & & \\ \hline & & & & \frac{1}{2} B & & & & & & \\ \hline & & & & & B & & & & & \\ & & & & & & B & & & & \\ & & & & & & & B & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$[A_M]_2 = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 6^2(2A_0+A_{16}) & 4^2(A_{11}+A_{15}) & 2^2(A_{12}+A_{14}) & 0 & 2^2(A_{24}-A_{22}) & 4^2(A_{25}-A_{21}) & 6^2 A_{26} & \cdots & & \\ \cdots & 6^2(A_{11}+A_{15}) & 4^2(2A_0+A_{14}) & 2^2(A_{11}+A_{13}) & 0 & 2^2(A_{23}-A_{21}) & 4^2 A_{24} & 6^2(A_{25}+A_{21}) & \cdots & & \\ \cdots & 6^2(A_{12}+A_{14}) & 4^2(A_{11}+A_{13}) & 2^2(2A_0+A_{12}) & 0 & 2^2 A_{22} & 4^2(A_{23}+A_{21}) & 6^2(A_{24}+A_{22}) & \cdots & & \\ \cdots & 6^2 A_{13} & 4^2 A_{12} & 2^2 A_{11} & 0 & 2^2 A_{21} & 4^2 A_{22} & 6^2 A_{23} & \cdots & & \\ \cdots & 6^2(A_{24}-A_{22}) & 4^2(A_{23}-A_{21}) & 2^2 A_{22} & 0 & 2^2(2A_0-A_{12}) & 4^2(A_{11}-A_{13}) & 6^2(A_{12}-A_{14}) & \cdots & & \\ \cdots & 6^2(A_{25}-A_{21}) & 4^2 A_{24} & 2^2(A_{23}+A_{21}) & 0 & 2^2(A_{11}-A_{13}) & 4^2(2A_0-A_{14}) & 6^2(A_{11}-A_{15}) & \cdots & & \\ \cdots & 6^2 A_{26} & 4^2(A_{25}+A_{21}) & 2^2(A_{24}+A_{22}) & 0 & 2^2(A_{12}-A_{14}) & 4^2(A_{11}-A_{15}) & 6^2(2A_0-A_{16}) & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

$$[C]_2 = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & (2C_0+C_{16}) & (C_{11}+C_{15}) & (C_{12}+C_{14}) & C_{13} & (C_{24}-C_{22}) & (C_{25}-C_{21}) & C_{26} & \cdots & & \\ \cdots & (C_{11}+C_{15}) & (2C_0+C_{14}) & (C_{11}+C_{13}) & C_{12} & (C_{23}-C_{21}) & C_{24} & (C_{25}+C_{21}) & \cdots & & \\ \cdots & (C_{12}+C_{14}) & (C_{11}+C_{13}) & (2C_0+C_{12}) & C_{11} & C_{22} & (C_{23}+C_{21}) & (C_{24}+C_{22}) & \cdots & & \\ \cdots & C_{13} & C_{12} & C_{11} & C_0 & C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & & \\ \cdots & (C_{24}-C_{22}) & (C_{23}-C_{21}) & C_{22} & C_{21} & (2C_0-C_{12}) & (C_{11}-C_{13}) & (C_{12}-C_{14}) & \cdots & & \\ \cdots & (C_{25}-C_{21}) & C_{24} & (C_{23}+C_{21}) & C_{22} & (C_{11}-C_{13}) & (2C_0-C_{14}) & (C_{11}-C_{15}) & \cdots & & \\ \cdots & C_{26} & (C_{25}+C_{21}) & (C_{24}+C_{22}) & C_{23} & (C_{12}-C_{14}) & (C_{11}-C_{15}) & (2C_0-C_{16}) & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

式 (3.12) および (3.21) が境界振動数方程式である。これらの式より不安定領域の境界における走行速度  $V$ , 荷重振動数  $\omega$ , 荷重間隔  $a$  および荷重振幅  $P$  の値を求めることができる。

4. 単純梁の動的弾性安定性

単純梁の動的不安定領域を上述の方法により求める。Fig.1 に示す  $\pi$  断面で、次の諸量をもつ単純梁を対象とする。

$t/h=0.02, b/h=1.5, h/l=0.05, x_s/h=0.0, y_s/h=0.6857, e_x/h=0, e_y/h=0.2956, I_{yy}/I_{xx}=0.2709,$

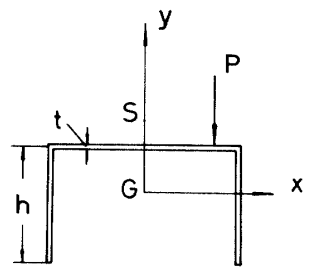


Fig.1 Cross-section of a simple beam

$Ah^2/I_{ps}=1.0195, \{EI_\omega^2 (\pi/l)^4 + GK (\pi/l)^2\}/h^2 EI_{xx} \times (\pi/l)^4 = 0.11188$

数値計算に当って、振動解 (2.4) の座標関数は 1 次の固有関数のみを取り、境界振動数方程式 (3.12) の計算では攪乱解 (3.9) の 2 項 ( $\zeta=1, 3$ ) を取り、式 (3.21) の計算では攪乱解 (3.17) の 2 項 ( $\zeta=2, 4$ ) を取った。また、Fourier 級数は 4 項 ( $p=1\sim 4$ ) までを用いた。

荷重の質量を無視した場合の  $a/l=1.05$  のときの係数励振不安定領域中のねじりおよび水平振動の単純共

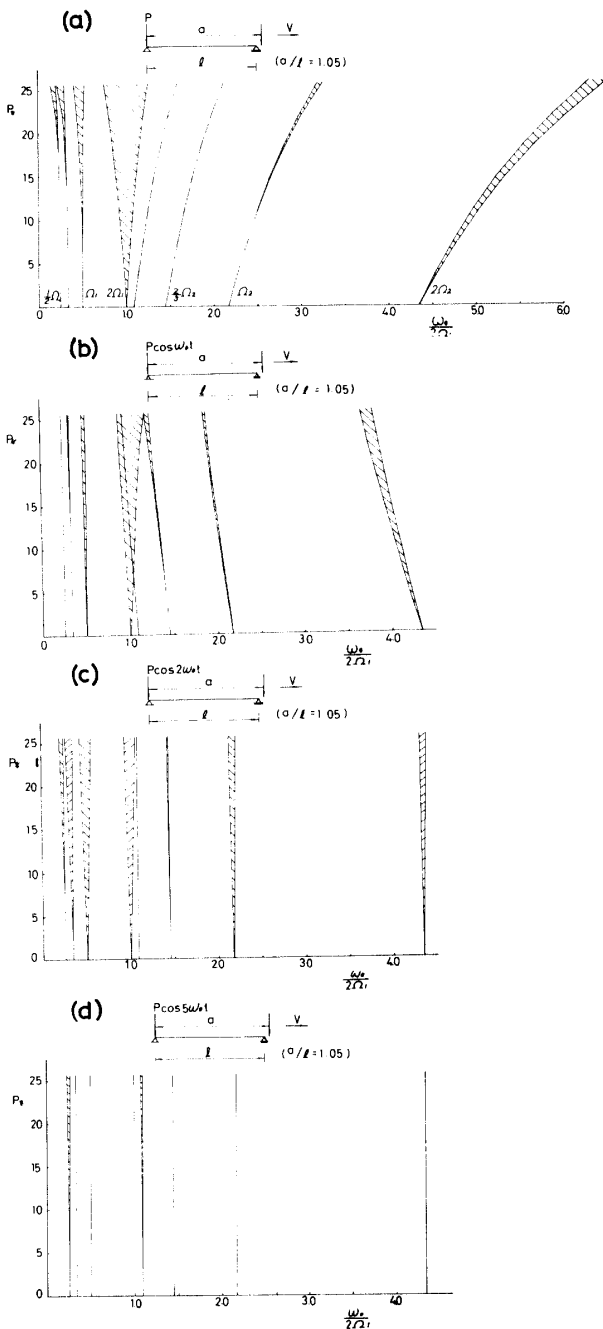


Fig.2 Regions of simple parametric instability of beam under travelling harmonic follower load systems with various values of  $\omega$  when load interval  $a/l=1.05$  and load mass is neglected. (a)  $\omega=0$ , (b)  $\omega=\omega_0$ , (c)  $\omega=3\omega_0$ , (d)  $\omega=5\omega_0$ .

振領域を Fig.2 に示す。図には荷重振動数  $\omega=0, \omega_0, 2\omega_0$  および  $5\omega_0$  の場合の領域を示す。図中、縦軸は無次元荷重  $P_* = P / \{EI_0 (\pi/l)^4 + GK (\pi/l)^2\}$  を、横軸は荷重移動振動数  $\omega_0$  を平均荷重作用時の第 1 固有値  $\Omega_1$  で除した無次元振動数を表わす。ここで  $\Omega_1$  は運動方程式

$$A\ddot{\delta} + (B + PC_0)\dot{\delta} = 0$$

の第 1 固有値である。このモードはねじり振動が卓越し、第 2 次モードは水平振動が卓越した。

この荷重条件では  $x_s=0, \mathfrak{M}_0=J_0=0$  であるので式

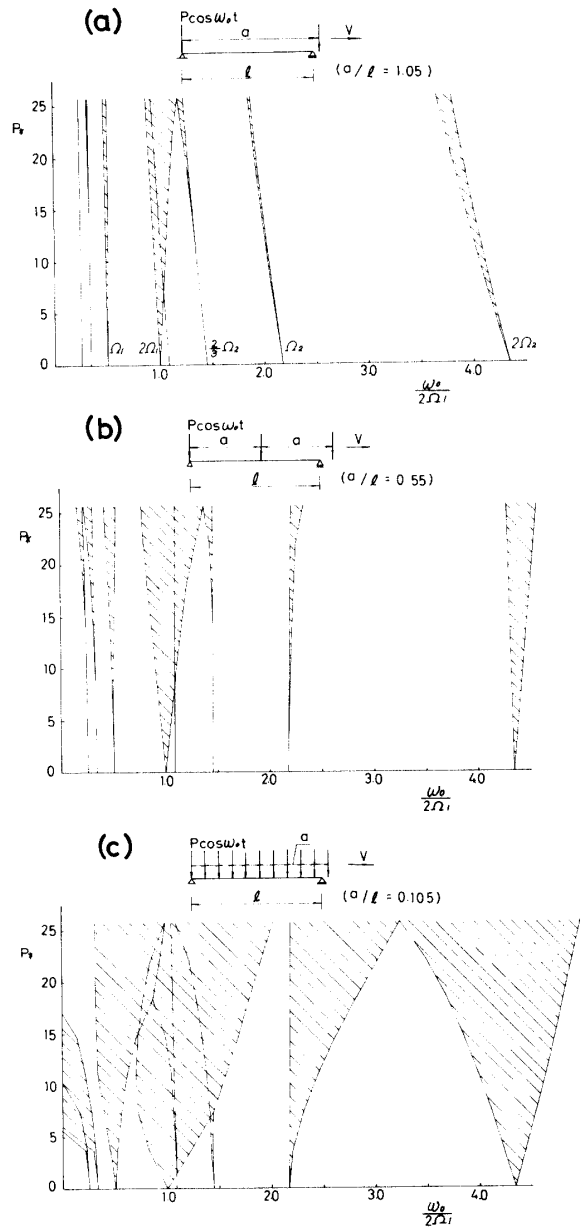


Fig.3 Regions of simple parametric instability of beam under travelling harmonic follower load systems with various values of load interval when  $\omega=\omega_0$  and load mass is neglected. (a)  $a/l=1.05$ , (b)  $a/l=0.55$ , (c)  $a/l=0.105$ .

(3.2) の係数マトリックスより明らかなように、鉛直振動はねじりおよび水平振動とは連成しない。さらに、鉛直振動の運動方程式は Hill 方程式とならないので、係数励振不安定振動は起らない。Fig.2 より明らかなように、 $\omega_0=2\Omega_1$  の近傍での領域が広く、不安定振動が起りやすいことがわかる。また、荷重振動数  $\omega$  の増加にともなって領域が狭くなるのがわかる。

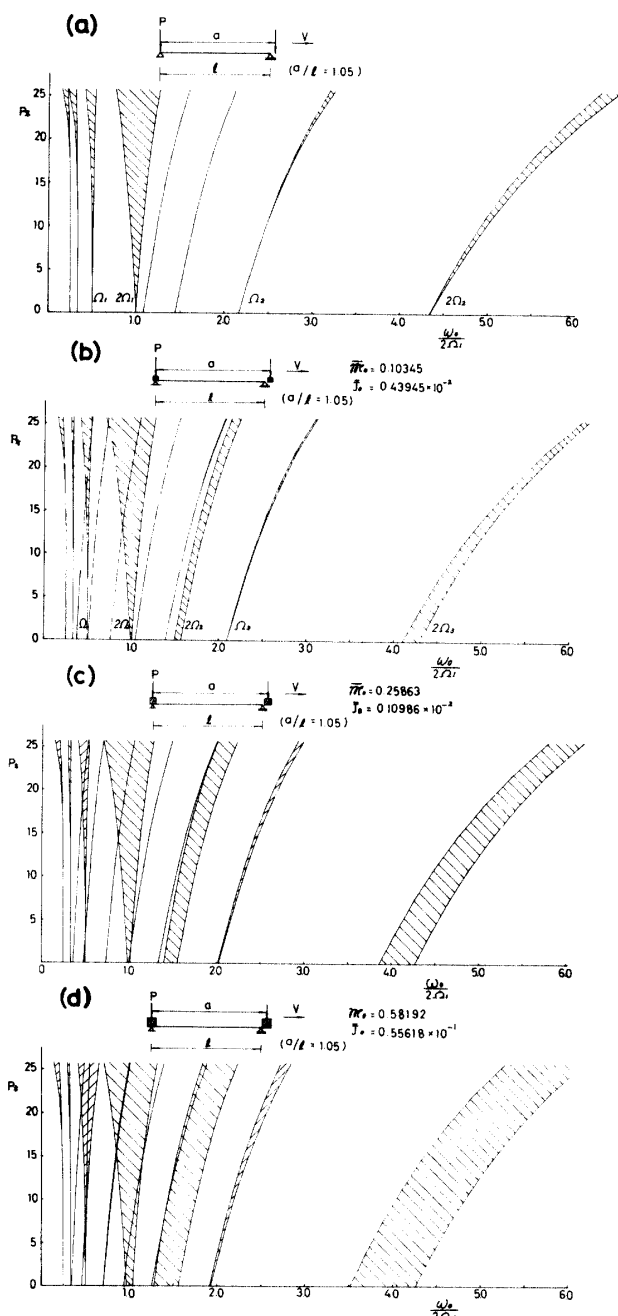


Fig.4 Regions of simple parametric instability of beam under travelling constant follower load systems with various values of load mass when load interval  $a/l=1.05$ . (a)  $\mathfrak{M}_0=0, J_0=0$ , (b)  $\mathfrak{M}_0=0.10345, J_0=0.43945 \times 10^{-3}$  (c)  $\mathfrak{M}_0=0.25863, J_0=0.10986 \times 10^{-2}$  (d)  $\mathfrak{M}_0=0.58192, J_0=0.55618 \times 10^{-1}$

荷重の質量を無視した場合の、荷重振動数  $\omega$  が荷重移動振動数  $\omega_0$  に等しとき、梁に載荷される荷重数の変化にともなう領域の変化状態を Fig.3 に示す。図中、 $a/l=1.05$  は梁上の集中荷重が1個の場合で、 $a/l=0.55$  および  $0.105$  はそれぞれ2個および10個の場合である。図より明らかなように、荷重数の増加にともなって不安定領域は大きく拡大される。

荷重振動数  $\omega=0$  で、 $a/l=1.05$  (梁上の集中荷重数が1個) の場合、荷重の質量の増加にともなう不安定領域の拡大の状況を Fig.4 に示す。荷重の質量を考慮する場合、式 (3.2) の係数マトリックスより明らかなように、鉛直振動はねじりおよび水平振動と連成し不安定領域は荷重の質量を無視した場合と異なる。荷重の質量を考慮することにより、また、質量が大きくなることにより不安定領域は拡大し不安定化することが明らかである。この場合の  $\Omega_1$  は運動方程式

$$(A + A_M)\ddot{\delta} + (B + PC_0)\dot{\delta} = 0$$

の第1固有値である。第1次モードはねじり振動が卓越し、第2および第3次モードはそれぞれ鉛直振動および水平振動が卓越する。

## 6. 結 び

連行走行従動荷重による梁の動的弾性安定性を明らかにするに当り、梁の運動の攪乱方程式が Hill 方程式になり係数励振不安定振動が起ることを示した。また、梁系の動的不安定性の解析に有用な単純パラメトリック共振の境界振動数方程式を、荷重の質量を考慮して提示した。最後に、単純梁の動的不安定領域を明らかにし、荷重振動数の増加にともない安定化すること、梁上の荷重数の増加にともない不安定化すること、さらに、荷重の質量が増大するにともない不安定化することが明らかになった。

本研究の数値計算は横矢順二君 (北九州市) および奥野泰規君 (広島市) の協力を得、九州大学大型計算機センタの FACOM M-200 および山口大学計算センタの FACOM 230-28 により行った。また、本研究の一部は昭和55年度の文部省科学研究費 (一般研究D) の補助を受けた。ここに記して感謝します。

## 参 考 文 献

- 1) Fryba, L.: Vibration of solids and structures under moving loads, Noordhoff Internation Publishing. Groningen. (1980)
- 2) ボローチン (近藤・中田訳): 弾性系の動的安定, コロナ社 (1972) pp.115~119.
- 3) 會田・小松: 山口大学工学部研究報告, 32, 119~128. (1981)

(昭和56年10月15日 受理)