

透過性構造物の流体抵抗に関する研究

—一定常流の場合—

金山 和雄*・田中宏平**・藤原 輝男*

On the Flow Resistance in the Porous Struction

—Specially about Steady Flow—

Kazuo KANAYAMA, Kohei TANAKA and Teruo FUJIWARA

Abstract

One of the most important causes of the destruction of dikes by waves is that the sand particles inside of the dikes are drawn out by the waves. To analyze this kind of phenomenon theoretically, it became necessary to know the fluid resistance of the porous media.

In order to clear the fluid resistance, we used the pipe model and dimensional analysis, and we determined the coefficient of resistance as fuction of Reynolds number.

1. ま え が き

この論文においては、透水体内の流体抵抗表示の決定を目的とする。これは海岸における透過性構造物に波が入射した場合の波の変形およびそれに伴う吸い出し現象を解析する上に、重要な意味をもってくるものである。すなわち、Fig. 1のように単純化したモデルを考えると、基本式は次式で表示される。ただし、長波を近似して式を簡単化している¹⁾。

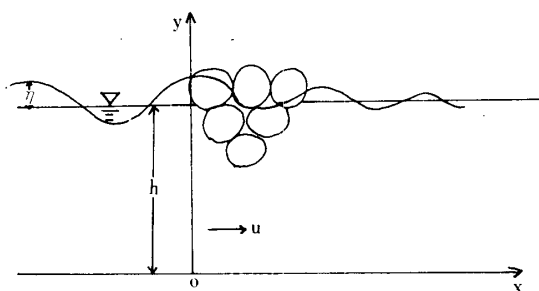


Fig. 1 Notation and definition of symbols
(Unsteady motion of water in a gravel layer)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{h}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\xi_f}{d} |u| u \quad (2)$$

(1), (2)式を解く上に、 ξ_f の関数型を決めることが必要となってくる。今回は定常・非定常における流体

抵抗に大差がないものと仮定して²⁾、以下に定常状態での抵抗係数 ξ_f の決定について、次元解析および管モデルを用いて考察を進め、抵抗係数 ξ_f の関数型および物理的意味を明らかにした。

2. 理論的考察

2.1 基礎方程式

Fig. 2のように透水体をモデル化して考えると、定常状態の場合の基本式は次式のように表示できる。ただし、抵抗項は速度の2乗に比例するものと仮定した。

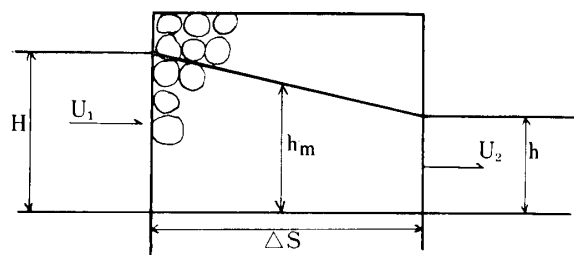


Fig. 2 Notation and definition of symbols
(Steady motion of water in a gravel layer)

$$\frac{d}{dx} \{ (h + \eta) u \} = 0 \quad (3)$$

$$u \frac{du}{dx} = -g \frac{d\eta}{dx} - \frac{\xi_f}{d} u^2 \quad (4)$$

(3), (4)を次に示す境界条件

* 土木工学科

** 九州大学教授

$$x=0 \text{ で } y=H, \quad x=l \text{ で } y=h \quad (5)$$

の下で解くと容易に次式を得る。

$$x = \frac{1}{\xi_f} \left[d \log \frac{y}{H} - \frac{dg}{3q^2} (y^3 - H^3) \right] \quad (6)$$

$$l = \frac{1}{\xi_f} \left[d \log \frac{h}{H} - \frac{dg}{3q^2} (h^3 - H^3) \right] \quad (7)$$

(7)式と実験とにより理論的に ξ_f が決められ、かつ、(6)式により任意断面の水面の位置が計算できる。また、以下に述べる管モデルによる抵抗係数を用い(6)式によって水面形を求めることができる。しかし、抵抗係数 ξ_f の物理的な意味が不明確である。

2.2 次元解析

前節(7)式より決められる ξ_f は物理的意味が不明確である。そこで、透水体内の水流を規定する物理量として、以下のものを列挙して次元解析を行なう。

- u : 浸透流速, Δh : 水頭差, d : 代表粒径
- f_k : 粒の形状係数, D_r : 粒度分布, ρ : 水の密度, g : 重力加速度, μ : 水の粘性係数 e : 間げき比, T : 水温, Δs : 透水体の長さ

以上11個の物理量が考えられるが、透水体を次の仮定により簡単なモデルとして取り扱う。

- 1° 均一球形粒子より構成されている。
- 2° 均一等方的にパッキングされている。
- 3° 毛管, 吸着水現象は考慮しない。
- 4° 実験中の水温変化はないとする。

すると, f_k, D_r, e, T は考慮しなくて良くなる。すなわち, $f(u, \Delta h, d, \rho, g, \mu, \Delta s) = 0$ (8)

Buckingham の π 定理を用いれば次式を得る。

$$\phi \left(\frac{g\Delta h}{u^2}, \frac{\Delta s}{d}, \frac{ud}{\nu}, \frac{gd}{u^2} \right) = 0 \quad (9)$$

すなわち、透水体内部の水流を規定する無次元量として Reynolds number 及び Froud number, $\Delta s/d$ があることを知る³⁾。

2.3 管模型による抵抗係数 ξ_f の定義

2.3.1 仮想流管モデル

透水体内の連続した空げきが管路を形成すると仮定し、透水体を仮想流管におきかえ、その径深 R , 潤辺 S を代表粒径 d , 空げき率 λ の関数として表示し、管路の乱流流れでの摩擦法則, Darcy Weisbach 式を導入して抵抗係数を定義する。

諸元

- A : 透水体断面積, A_s : 固体部分の平均断面積
- A_v : 間げき断面積, S : 潤辺, Δs : 透水体長さ
- N : 透水体全粒子数, A_s : 全粒子表面積の合計

とすると,

$$A_v = \lambda A = A - A_s = A - \frac{1}{6} \left(\frac{N\pi d^2}{\Delta s} \right)$$

$$\therefore N = \frac{6 \Delta s}{\pi d^2} (1 - \lambda) A \quad (10)$$

$$S = \frac{A_s}{\Delta s} = \frac{1}{\Delta s} N \pi d^2 = \frac{6}{d} (1 - \lambda) A = \frac{6 A}{d(1 + e)}$$

$$\therefore R = \frac{A_v}{S} = \frac{d}{6} \frac{\lambda}{1 - \lambda} = \frac{1}{6} ed \quad (11)$$

抵抗係数 ξ_f を次式で定義する。

$$\Delta h = \xi_f \frac{\Delta s}{d} \frac{u^2}{2g} = \xi_f \frac{\Delta s}{4R} \frac{u^2}{2g} \quad (12)$$

(12)式に(11)式を用いると,

$$\xi_f = \frac{4}{3} \frac{gd}{u^2} e \frac{\Delta h}{\Delta s} \quad (13)$$

ここで,

$$\frac{g\Delta h}{u^2} = \left(\frac{4}{3} \frac{gd}{u^2} e \frac{\Delta h}{\Delta s} \right) \times \frac{3 \Delta s}{4 ed} = \xi_f \frac{3 \Delta s}{4 ed} \quad (14)$$

であるから、(9)式は

$$\xi_f = \frac{ed}{\Delta s} \phi_2 \left(\frac{Vd}{\nu} \cdot \frac{\Delta s}{d} \cdot \frac{gd}{u^2} \right) = 0 \quad (15)$$

(15)式より透水体内部の抵抗係数は Reynolds number, Froude number 及び $\frac{\Delta S}{d}$ によって決められるであろうことが推察できる。

2.3.2 集合仮想流管モデル

透水体内に n 個の口径 d_p なる円形断面を有する管が並んおり、上下流の水頭差は、この仮想パイプを通過して流下する際に生じる摩擦抵抗に起因するものと仮定する。透水体の空げき体積は仮想パイプの総体積に等しく、透水体の潤面積は仮想パイプの総潤面積に等しいとおく。

諸元

- d_p : 仮想管径, Δs : 透水体長さ, h : 透水体高さ, n : 仮想管の数, Q : 流量, S : 潤辺

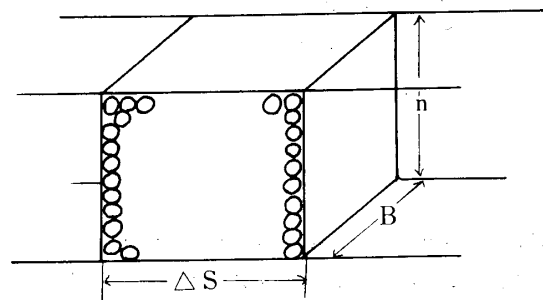


Fig. 3 Notation and definition of symbols

$$n \frac{\pi d_p^2}{4} \Delta s = \lambda B \Delta s h \quad n \pi d_p \Delta s = S$$

上式より,

$$d_p = \frac{4 \lambda B \Delta s h}{S} = 4 R \quad n = \frac{S}{\pi d_p \Delta s} = \frac{S}{4 R \pi \Delta s}$$

透水体内の抵抗を次式で定義する。

$$\Delta h = \epsilon_f \frac{\Delta s}{d_p} \frac{u^2}{2g} = \epsilon_f \frac{\Delta s}{4R} \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{\lambda B h} \right)^2$$

$$\therefore \epsilon_f = \frac{8gR\Delta h}{\Delta s u^2} \quad (16)$$

ϵ_f は Re , Fr 等の関数となるであろう。ここで、 $R = 4d_p$ であるが空げきの特性長 d_p と粒径 d の関係が必要である。これについては後述する。

2・3・3 急拡縮パイプモデル

透水体内は急拡、急縮をくり返すパイプの連続体になっていると仮定する。一對の急拡縮を過ぎることによる水頭の損失は $fu^2/2g$ で表示できる。今、空げきの全数を m 個とし、それが流れ方向に n_1 個、直角方向に n_2 個等しい間隔で並んでいるものとする。

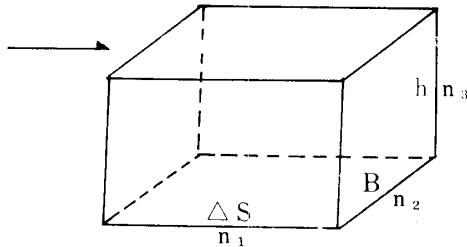


Fig. 4 Notation and definition of symbols

$$\left. \begin{aligned} m &= n_1 \times n_2 \times n_3 \\ n_1 : n_2 : n_3 &= \Delta s : B : h \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

1個の空げきを1辺 d_p なる立方体であるとするならば、体積、全空げき表面積について次式を得る。

$$m d_p^3 = \lambda \Delta s B h, \quad 6 m d_p^2 = S \quad (18)$$

以上より

$$d_p = b \frac{\lambda V}{s} \frac{1}{6R}, \quad n_1 = \lambda^{1/3} \frac{\Delta s}{6R}, \quad n_2 = \lambda^{1/3} \frac{B}{6R},$$

$$n_3 = \lambda^{1/3} \frac{h}{6R}$$

流れに直角な断面には $(n_2 \times n_3)$ 個の空げきが存在し、その総断面積は $(n_2 \times n_3) d_p^2 = \lambda^{2/3} B h$ であるから、平均流速 u_p は次式となる。

$$u_p = Q / \lambda^{2/3} B h$$

一對の急拡縮を通過することによる損失は

$$\epsilon_f \frac{u_p^2}{2g} = \epsilon_f \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{\lambda^{2/3} B h} \right)^2$$

となる。

流れ方向に n_1 對の急拡縮があるから全水頭損失は

$$\Delta h = n_1 \epsilon_f \frac{u_p^2}{2g} = \frac{\lambda^{1/3} \Delta s}{6R} \epsilon_f \frac{u_p^2}{2g} \quad \text{となる} \quad (19)$$

$$\therefore \epsilon_f = \frac{12gR\Delta h}{\lambda^{1/3} \Delta s u_p^2} \quad (20)$$

$d_p = 6R$ であるが、 d_p と d の関係は空げき表面積と

粒子表面積とが等しいとおくことにより

$$6 m d_p^2 = m \pi d^2 \quad \therefore d_p = 0.724d \quad \text{を得る。}$$

空げき特性長 d_p と粒径 d については2・3・5節に述べる。

2・3・4 開水路における抵抗モデル

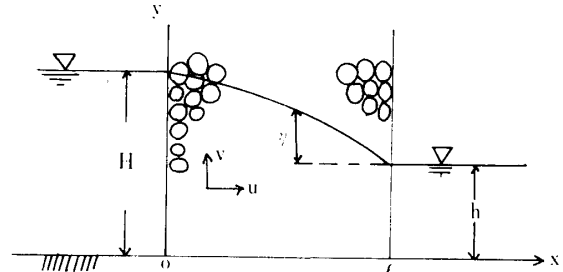


Fig. 5 Notation and definition of symbols

用水路に置かれた物体に働く力 D は運動量の関係から

$$D = \frac{w_0}{g} B \left[(hu_2^2 - Hu_1^2) - \frac{g}{2} (H^2 - h^2) \right] \quad (21)$$

上式は底勾配を0とし、重力の流れ方向の成分は無視している。

$$Hu_1 = hu_2 = Q/B \quad \text{である。}$$

したがって、物体の抵抗 F は次式となる。

$$F = \frac{w_0}{g} B \Delta h \{ gh_m - u_1 u_2 \} \quad (22)$$

次にこの F を透水体の特性によって表示することを考える。高さ h_m 、巾 B 、長さ Δs の体積中に高さ h_m 、直径 d_p なる小円柱が m 個含まれていると仮定する。全小円柱の体積、表面積は各々次式となる。

$$\frac{m \pi d_p^2 h_m}{4} = L B h_m (1 - \lambda) \quad (23)$$

$$m \pi d_p h_m = S_B \quad (\text{ここに } \pi d_p^2/4 \text{ は省略する}) \quad (24)$$

m 個の小円柱は流れと直角方向に n_1 個、流れに沿って n_2 個あるとすれば、 $n_1 : n_2 = B : L$ が成立する。

(23), (24) より

$$d = \frac{4 \Delta s B h_m (1 - \lambda)}{S_B}, \quad m = \frac{S_B^2}{4 \pi \Delta s B h_m^2 (1 - \lambda)}$$

1個の円柱に作用する抵抗力は

$$F_s = C_D \frac{w_0 u_1^2}{2g} d_p h_m \quad (25)$$

m 個では

$$m F_s = C_D \frac{W_0 u_1^2}{2g} m d_p h_m, \quad \text{ここに } m d_p h_m = \frac{S_B}{\pi}$$

より

$$F = m F_s = C_D \frac{W_0}{2g} u_1^2 \frac{S_B}{\pi} \quad (26)$$

$$F = \frac{W_0 u_1^2}{g} f_1(S_B) \quad (27)$$

(26)と(27)より

$$f_1(S_B) = \frac{B\Delta h(gh - u_1 u_2)}{u_1^2}$$

これは R_0 等の関数になるであろう。

2.3.5 透水体の特性⁴⁾

1. 空ゲキセルの大きさ d_p

透水体の空ゲキセルは空ゲキセルと呼ばれる微小な空ゲキ単位から構成されており、それらの空ゲキセルはいくつものルートによって互いに連結している。立方充填や最密充填のような規則正しい充填配列においては空ゲキセルは規則正しく配列する。(山中, Haines, Smith)

2. 一般式

空ゲキセルの大きさを粒子に内接する円の直径 d_p で表わすことにする。 d_p はセル内の高さ Z によって変化し、次式で表示できる。

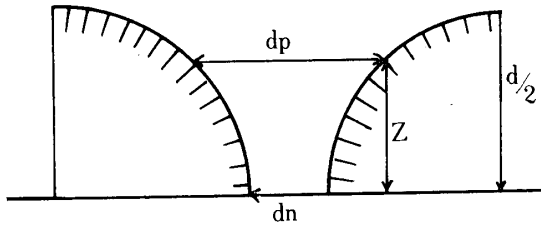


Fig. 6 Notation and definition of symbols

$$d_p = d_n + d - \sqrt{d^2 - 4Z^2} \quad (28)$$

- d_n : ネックの内接円直径
- d : 粒径
- Z : 粒の中心からの高さ

両辺を d で割る

$$D_p = D_n + 1 - \sqrt{1 + 4Z} \quad (29)$$

$$D_p = d_p/d \quad D_n = d_n/d \quad Z = z/d$$

D_p はネックで最小になり、 $z=0.5$ で最大になる。

D_n の値は

$$\left. \begin{aligned} \text{最密充填} &\rightarrow D_n = 0.155 \\ \text{立方充填} &\rightarrow D_n = 0.414 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

となることが知られている。

3. 空ゲキセルの平均径 D_p

空ゲキセルの大きさの定義としては、ネック径 D_n 、頂点径 D_T 、 45° 径 D_{45} 、接触径 D_{C0} 、平均径 D_p があげられる。平均径 D_p は D_p の一般式を積分することにより求まる。

$$\begin{aligned} D_p &= \frac{1}{z_0} \int_0^{z_0} D_p dz \\ &= D_n + 1 - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4z_0^2} - \frac{1}{4z_0} \sin^{-1}(2z_0) \quad (31) \end{aligned}$$

$z_0=0.5$ とすれば

$$D_p = D_n + 0.214 \quad (32)$$

となる。

この D_p は一般に D_{45} より少し小さめである。

以上求めた平均径 D_p を空ゲキの特性長として用いる。

3. 実験的考察

3.1 実験装置と方法および供試材料

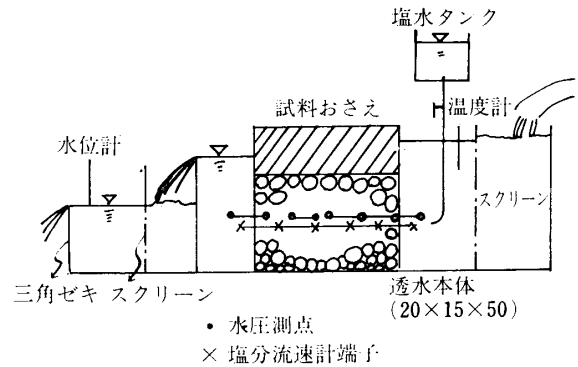


Fig. 7 Arrangement for the test channel

抵抗係数 ξ_f の関数型を決定するために Fig. 7 に示ような閉水路を用いて行なった。透水体構成粒子には直径 $d=1.2, 1.69, 2.45\text{cm}$ の均一球形のガラス球を用いた。測定量は流量 Q 、透水体内平均流速 u 、動水勾配 $I (\Delta h/\Delta s)$ 、水温 T 、である。流量は直角三角セキを用い、流速 u は Allen の方法⁵⁾ による。動水勾配は透水体内 5 点に設置したマンメーターにより求めた。実験は完全飽和かつ定常状態の下で行なった。

3.2 動水勾配、測定位置及び流速

Fig. 8, 9 は水圧と測定位置の関係を示したもので、直線分布となっており、これより透水体においては流入による乱れは短く、乱流流域においてもマンメーターは境界付近の 2 点で十分であることが言える。また、動水勾配を大きくしていく場合と小さくしていく場合とにおいて、流速と動水勾配との関係に差異はなかった。このことから実験結果の整理は両者をまとめて行なってもよい。また、外的条件を変化させない限り定常状態に保持でき、砂層透水のような時間的変化はみられなかった。

Fig. 10, 11 は動水勾配と流速および Froud 数との関係を両対数にプロットしたものである。勾配が 45° を外れることから Darcy law を外れていると言える。

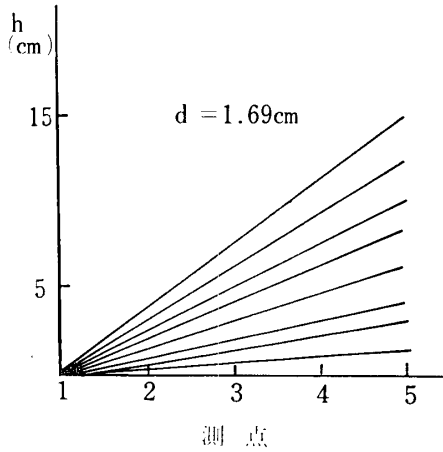


Fig. 8 Relationship between h and measurement point

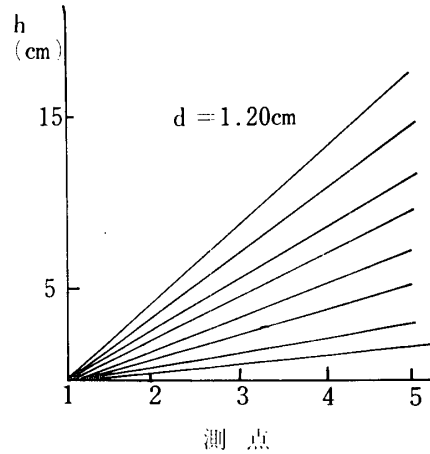


Fig. 9 Relationship between h and measurement point

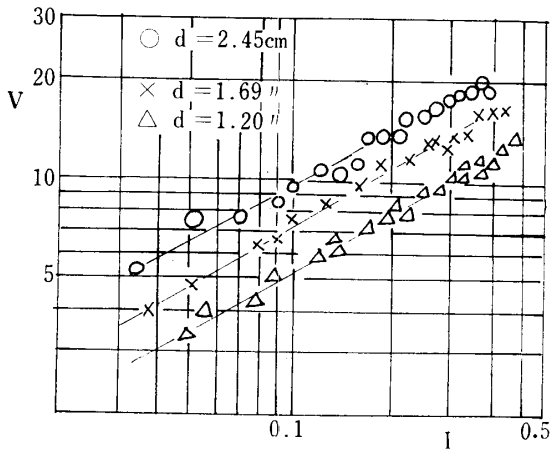


Fig. 10 Relationship between V and I

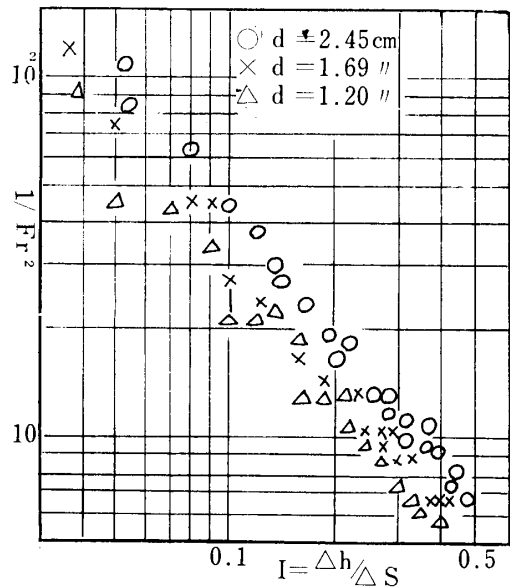


Fig. 11 Relationship between $1/Fr^2$ and I

3.3 実験解析

理論的考察で得た ξ_r と Reynolds 数, Froude 数の関係を求めると Fig. 12, 13が得られる. Fig. 12より Fr. は ξ_r を統一的に表示しえないことが言える. そこで, ξ_r と Reynolds 数との関係を見ると

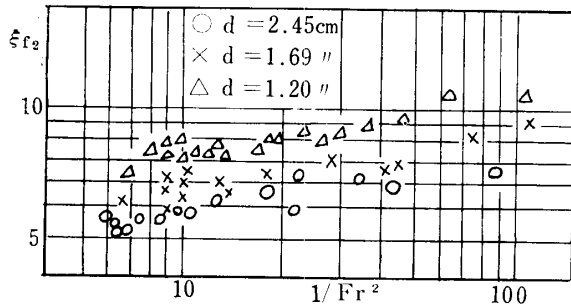


Fig. 12 Relationship between ξf_1 and $1/Fr^2$

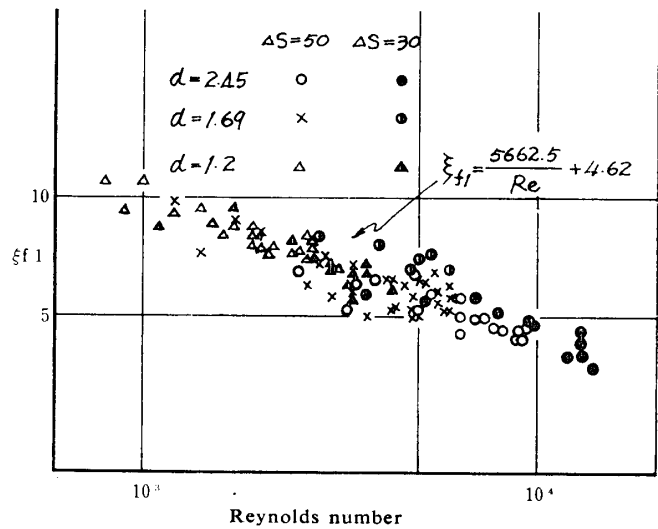


Fig. 13 Relationship between Re and ξf_1

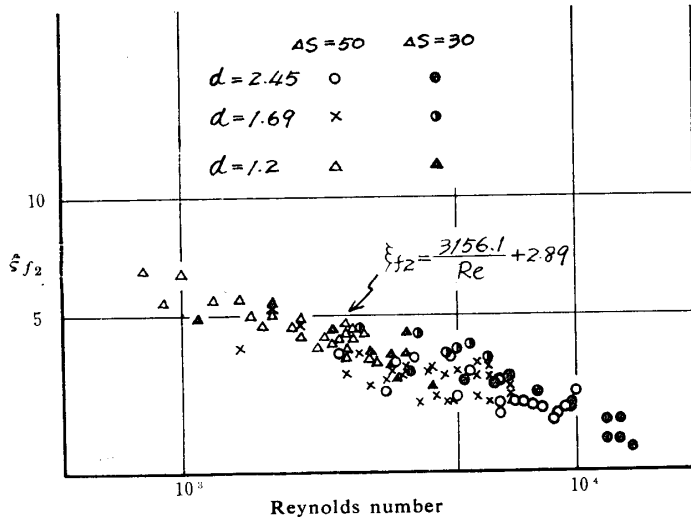


Fig. 14 Relationship between Re and ξf_2

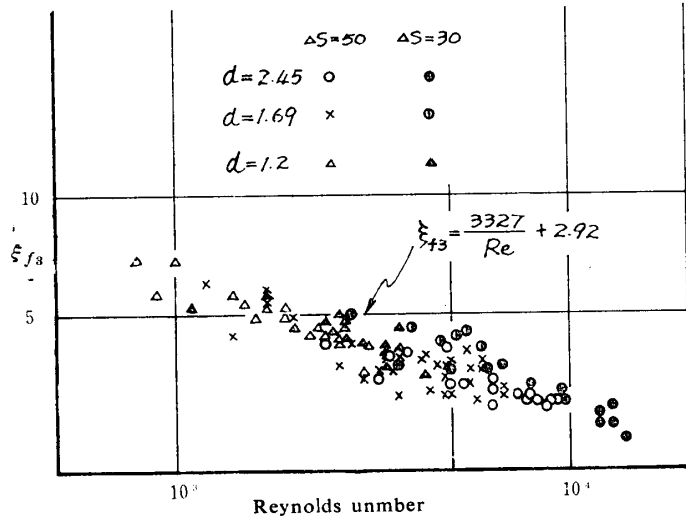


Fig. 15 Relationship between Re and ξf_3

Fig. 13のようになり、比較的統一的な表示を得た。このことより、透水体内の流れは重力よりも粘性の卓越した現象であることが推察できよう。Fig. 13より ξ_f の関数型として次式を得た。

$$\xi_{f1} = \frac{5662.5}{Re} + 4.62 \quad (33)$$

集合仮想流管モデルによる ξ_{f2} 、急拡縮パイプモデルによる ξ_{f3} と Reynolds 数との関係は Fig. 14, 15 のとおりである。

3・4 透水体内の流速公式

Fig. 13, 14, 15 より、 $\xi_f \propto Re^{-m}$ と言える。これを(15)式に用いると、

$$\xi_f = Re^{-m} \frac{ed}{\Delta s} \phi_3 \left(Fr \cdot \frac{\Delta s}{d} \right) \quad (34)$$

となる。これと $\xi_f = \frac{3}{4} \frac{gde}{u^2} \frac{\Delta h}{\Delta s}$ より

$$u = (2-m) \sqrt{\frac{2g(4)}{\phi} \left(\frac{1}{6} ed \right)^{1+m} \left(\frac{\Delta h}{\Delta s} \right)^{\frac{1}{2-m}}} \\ = (2-m) \sqrt{\frac{2g(4)}{\phi} \left(\frac{1}{6} \right)^m R^{2-m} I^{\frac{1}{2-m}}}$$

$m=1$ のときは

$$u = \frac{2g(4)}{\phi} \left(\frac{1}{6} \right)^2 e^2 d^2 I = \frac{2e}{9\phi} d^2 I$$

となり、Darcy 則となる。

ただし、

$$\phi = \frac{ed}{\Delta s} \phi_3 \left(Fr \cdot \frac{\Delta s}{d} \right)$$

ここで

$$C = (2-m) \sqrt{\frac{2g(4)}{\phi} \left(\frac{1}{6} \right)^m} \quad n' = \frac{1+m}{2-m}$$

$$m' = \frac{1}{2-m} \quad \text{とおくと}$$

$u = CR^{n'} I^{m'}$ となり、浸透流速は指数型となる⁶⁾

4. 結 論

海岸に多く見られる透過性構造物に、波浪が入射した場合の波の減衰及びそれに伴う底質の吸い出し現象を解析する上に必要となってくる透水体の流体抵抗の表示を行なった。特に次元解析と管モデルを併用して、抵抗係数 ξ_f の実験式を求め、物理的な意味を明らかにできた。すなわち、抵抗係数 ξ_f は Reynolds number の関数として表示できることを知った。管モデルとしては仮想流管、集合仮想流管、急拡縮管モデルを用いた。

1. 仮想流管モデル $\xi_f = \frac{5662.5}{Re} + 4.62$
2. 集合仮想流管モデル $\xi_f = \frac{3156.1}{Re} + 2.89$
3. 急拡縮管モデル $\xi_f = \frac{3327}{Re} + 2.92$

そしてさらに、浸透流速公式に対しても考察を加え、指数型となることを知った。これからはモデルの妥当性に検討を加え、さらに非定常状態に拡張していく。

参 考 文 献

- 1) G. H. LEAN Journal de Recherches Hydrauliques 5, (1967) No.1 Theorie Simplifiee des Absorbours de Houle Permeable.
- 2) 尾崎晃他：土木学会年次学術講演集 (1971)
- 3) 金山和雄，戸原義男：農業土木学会大会講演集 (1972)
- 4) 田淵俊雄他：土壌の物理性13 (1965)
- 5) K. Kanayama T. Fujiwara: Memoirs of the Faculty of Engineering Yamaguchi University (1972)
- 6) A. E. Scheidegger: The Physics of Flow through porous media. University of Toronto press.

(昭和47年12月14日受理)