

導体平板に対向した矩形断面円形コイルとその鏡像コイルとの相互誘導係数の計算 (第1報)

戸田 圭一*・長島 弘修**

Calculation of Mutual Inductance between a Circular Coil with a Rectangular Cross Section in front of a Conductor Plate and its Image Coil (1st report)

Keiichi TODA and Hironobu NAGASHIMA

Abstract

For some measuring technics, such as a distance gauge and none destructive tesing, it is important to know mutual inductance between a circular test coil with a rectangular cross section, being faced to a metal plate, and its image coil. We calculated it by two double integrals of two co-axial single circular loops, along radii and axes of the coils. But the result was an integral of a Hankel inverse transform type with products of two same infinite series of Bessel functions. We rearranged the series of the integrand in ascending powers of α^2 , which was index of the thickness for the radial direction and was smaller than 1, and then integrated the 1st and the 2nd term without approximate calculus. The result was tabulated numerically and compared with the measured values. Unless the thickness of a coil for the radial direction is thick and the coil is near by the surface of the conductor, then the mutual inductance to the image coil can be calculated by the table in effective accuracy.

1. 緒言

Fig. 1に示すように矩形断面円形コイルCが、その中心軸を導体表面に垂直にして位置した場合、当然コイルの実効インピーダンスは変化をする¹⁾²⁾。このようなコイルと平板導体との配置は直線変位計³⁾、膜厚計⁴⁾、振動・電圧変換器⁵⁾、導電率の測定⁶⁾、電磁非破壊検査などで広く利用されている。これらの装置の大部分は完全反射に近い状態で用いられる。従ってその極限状態である完全反射時に、コイルのインダクタンスがどれだけ変化をするかを知ることは重要なことである。完全反射時には文献6に述べたように鏡像コイルを考えれば解析は容易になる。Fig. 1のコイルC'はCの鏡像コイルを意味する。すなわちコイルCのインダクタンスは導体がない時に対して、完全反射時にはCC'間の相互誘

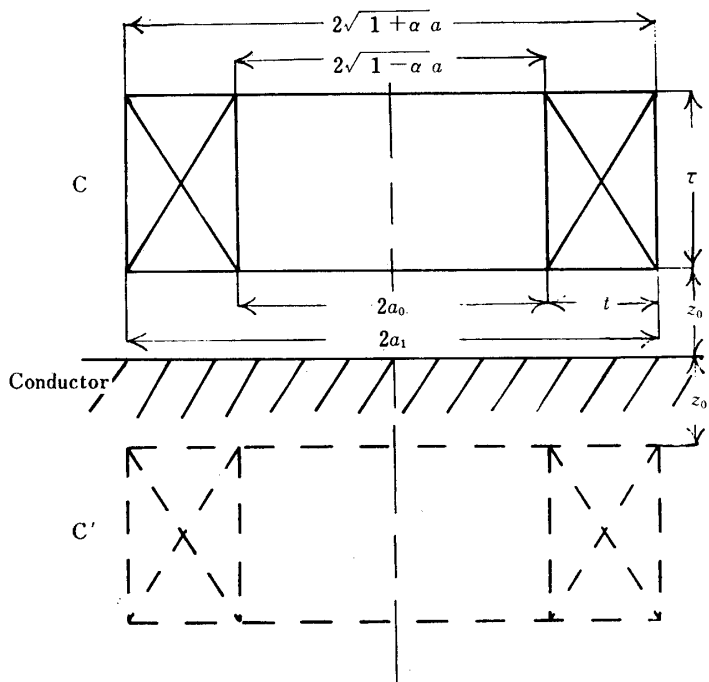


Fig.1 Arrangement of a circular coil and its image coil

* 電気工学科

** 大学院工学研究科電気工学専攻

導係数だけ低下する。従って鏡像コイルとの間の相互誘導係数の算出は上記の装置の解析において最も基礎となるものである。

さて、CC'間の相互誘導係数は、コイル断面積を0、すなわち単巻線輪に近似すれば完全楕円積分によってあらわされることはよく知られている。しかし実用的な感度を得るためには無闇に巻回数を少なくすることもできないので多少のコイル断面積をもつようになる。また、コイルと導体間の距離もあまり大きくすることもできないので、Fig. 1でいえば距離 z_0 に対して軸向距離 τ は無視できなくなる。従って精密な計算をするには少なくとも単層ソレイド近似にしなければならない。しかし最初から矩形断面のコイルとして巻数の多いコイルを用いれば感度も充分なものが得られるので無理のない測定が可能になる。以上のような目的のために Fig. 1に示すような矩形断面をもったコイルCとその鏡像コイルとの相互誘導係数を求める。またこのような配置の2つのコイル間の相互誘導係数は実験データによる方法⁷⁾⁸⁾以外は見当らないようである。我々が行なった方法は単巻線輪の相互誘導係数を半径方向および軸方向に4重積分を行なった後ハンケル逆変換の積分を行なって求めた。最後の積分はベッセル関数の無限級数の関数の積分となり、すべての項を積分することは不可能でその中の第1近似項および第2近似項を近似計算することなしに求めた。

2. 計 算

2.1 相互誘導係数の積分表示

いま Fig. 1のコイルCおよびC'の巻線の中から任意に各々1つずつの単巻コイルを選び、夫々の半径を r_1, r_2 、導体表面位置までの距離を $z_0 + \tau_1, z_0 + \tau_2$ とする。この時の両単巻コイル間の相互誘導係数 m はよく知られているように次式であらわせる。

$$m = \frac{2\mu_0}{k} \sqrt{r_1 r_2} \left\{ \left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right\} \quad (1)$$

但し μ_0 は真空の透磁率、 $K(k), E(k)$ は k を母数とする第1種および第2種の完全楕円積分である。また k はつぎの式となる。

$$k = \sqrt{\frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2 + (2z_0 + \tau_1 + \tau_2)^2}} \quad (2)$$

矩形断面コイルC, C'間の相互誘導係数 M は原理的には(1)式を $r_1, r, r_2, \tau_1, \tau_2$ に関して矩形断面について積分を行なえばよいが、完全楕円積分のままでは積分は遂行できない。そこで(1)式をハンケル変換の積分の形であらわすことにすれば(1)式は次式のよう

になる⁹⁾。

$$m = \mu_0 \pi r_1 r_2 \int_0^\infty e^{-(2z_0 + \tau_1 + \tau_2)\zeta} J_1(r_1 \zeta) J_1(r_2 \zeta) d\zeta \quad (3)$$

ただし、 ζ はハンケル変換のための変数、 $J_1(r\zeta)$ は第1種1次のベッセル関数をあらわす。

(3)式の形で m があらわされていれば、矩形断面についての r_1, r_2, τ_1, τ_2 の積分が行なえる。すなわち

$$M = \frac{\mu_0 \pi N^2}{S^2} \int_0^\infty \int_{a_0}^{a_0+t} r_1 J_1(r_1 \zeta) dr_1 \int_{a_0}^{a_0+t} r_2 J_1(r_2 \zeta) dr_2 \times \int_0^\tau e^{-(z_0 + \tau_1)\zeta} d\tau_1 \int_0^\tau e^{-(z_0 + \tau_2)\zeta} d\tau_2 d\zeta \quad (4)$$

ここで S はコイルの断面積、 N はコイルの巻数である。(4)式はつぎのように書ける。

$$M = \frac{\mu_0 N \pi^2}{S^2} \int_0^\infty \left\{ \int_{a_0}^{a_0+t} r J_1(r \zeta) dr \right\}^2 \times \frac{e^{2z_0 \zeta}}{\zeta^2} (1 - e^{-\tau \zeta})^2 d\zeta \quad (5)$$

(5)式中の r に関する積分をつぎのようにおく。

$$I_a = \int_{a_0}^{a_0+t} r J_1(r \zeta) dr \quad (6)$$

I_a を用いれば(5)式はつぎのようになる。

$$M = \frac{\mu_0 \pi N^2}{S^2} \int_0^\infty e^{-2z_0 \zeta} (1 - e^{-\tau \zeta})^2 \zeta^{-2} I_a^2 d\zeta \quad (7)$$

(7)式の積分を行なうには I_a が求まらねばならない。

2.2 I_a の積分

いま、 $r\zeta = y$ とにおいて(6)式の不定積分 I_r を計算する。

$$I_r = \zeta^{-2} \int y J_1(y) dy = \zeta^{-2} \{ y J_0(y) - \int J_0(y) dy \} \quad (8)$$

(8)式の第2項の積分はベッセル関数 J_{2n+1} の無限級数になる¹¹⁾。

$$\int J_0(y) dy = 2 \sum_{n=0}^\infty J_{2n+1}(y) \quad (9)$$

$$= y J_0(y) + 2 \sum_{n=1}^\infty \left\{ \frac{y}{2(2n-1)} + \frac{y}{2(2n+1)} \right\} J_{2n}(y)$$

$$= y J_0(y) + y \sum_{n=1}^\infty \frac{4n}{4n^2 - 1} J_{2n}(y) \quad (10)$$

(10)式を(8)式に代入し変数を ζ に戻せば

$$I_r = -\frac{r}{\zeta} \sum_{n=1}^\infty \frac{4n}{4n^2 - 1} J_{2n}(r\zeta) \quad (11)$$

となる。(7)式は(11)式の不定積分であるので、定積分 I_a を求めるのにその上限、下限の外径 $2a_1$ および内

径 $2a_0$ を夫々つぎの式のように平均半径 a を用いて, a を基準とする $\sqrt{1 \pm \alpha}$ の比率であらわす

$$2a_1 = 2(a_0 + r) = 2\sqrt{1 + \alpha} a \quad (12)$$

$$2a_0 = 2\sqrt{1 - \alpha} a \quad (13)$$

すなわち a_1, a_0, a, α の関係は(12), (13)式より

$$a = \sqrt{(a_1^2 + a_0^2)/2} \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{a_1^2 - a_0^2}{a_1^2 + a_0^2} \quad (15)$$

となる.

a および α を用いれば(6)式は

$$\begin{aligned} I_a &= \int_{\sqrt{1-\alpha}a}^{\sqrt{1+\alpha}a} r J_1(r\zeta) dr \\ &= \frac{a}{\zeta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4n}{4n^2-1} \left\{ \sqrt{1-\alpha} J_{2n}(\sqrt{1-\alpha}a\zeta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{1+\alpha} J_{2n}(\sqrt{1+\alpha}a\zeta) \right\} \right] \quad (16) \end{aligned}$$

さて(15)式で内径0のコイルはありえないから

$$\alpha < 1 \quad (17)$$

ベッセル関数の相乗定理から (複号同順)

$$\begin{aligned} &\sqrt{1 \pm \alpha} J_{2n}(\sqrt{1 \pm \alpha} a \zeta) \\ &= (1 \pm \alpha)^{n+\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{\pm \alpha a \zeta}{2} \right)^p J_{2n+p}(a \zeta) \quad (18) \end{aligned}$$

また二項展開定理により

$$\begin{aligned} (1 \pm \alpha)^{n+\frac{1}{2}} &= 1 \pm \left(\frac{2n+1}{2} \right) \frac{\alpha}{1!} \\ &+ \left(\frac{2n+1}{2} \right) \left(\frac{2n+1}{2} - 1 \right) \frac{\alpha^2}{2!} \pm \dots \quad (19) \end{aligned}$$

(18), (19)式を(16)式に代入して整理すればつぎのような形の無限級数がえられる.

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{a}{\zeta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left[\frac{8n(\alpha a \zeta / 2)^{2p+1}}{(4n^2-1)(2p+1)!} J_{2(n+p)+1}(a \zeta) \right. \\ &\quad - \frac{4n\alpha(\alpha a \zeta / 2)^{2p}}{(2n-1)(2p)!} J_{2(n+p)}(a \zeta) \\ &\quad + \frac{n\alpha^2(\alpha a \zeta / 2)^{2p+1}}{(2p+1)!} J_{2(n+p)+1}(a \zeta) \\ &\quad - \frac{\alpha^3}{6} \cdot \frac{n(2n-3)(\alpha a \zeta / 2)^{2p}}{(2p+1)!} J_{2(n+p)}(a \zeta) \\ &\quad + \frac{\alpha^4}{48} \cdot n(2n-3)(2n-5) \\ &\quad \times \frac{(\alpha a \zeta / 2)^{2p+1}}{(2p+1)!} J_{2(n+p)+1}(a \zeta) \\ &\quad \left. - \frac{\alpha^5}{480} \cdot n(2n-3)(2n-5)(2n-7) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(\alpha a \zeta / 2)^{2p}}{(2p)!} J_{2p}(a \zeta) + \dots \right] \quad (20) \end{aligned}$$

ここで便宜上(20)式の右辺の第1項および第2項の総和を $I_{ap}(1)$ とあらわす. 同様に第3, 4項を $I_{ap}(2)$, 第5, 6項を $I_{ap}(3)$ …… とあらわすことにする. 更

に例えば $I_{ap}(1)$ 中の $p=1$ のものだけの総和を表示するのに $I_{a1}(1)$ のような表示を用いることにする.

またコイルの断面積 S は

$$S = \tau a (\sqrt{1+\alpha} - \sqrt{1-\alpha}) \quad (21)$$

となるから(7)式の M はつぎのようになる.

$$\begin{aligned} M &= \frac{N^2 \mu_0 \pi}{\tau^2 a^2 (\sqrt{1+\alpha} - \sqrt{1-\alpha})^2} \\ &\quad \int_0^{\infty} (e^{-2z_0\zeta} + e^{-2(z_0+\tau)\zeta} - 2e^{-(2z_0+\tau)\zeta}) \\ &\quad \times \zeta^{-2} I_a^2 d\zeta \quad (22) \end{aligned}$$

ところで上式の I_a は

$$I_a = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} I_{ap}(m) \quad (23)$$

となるので $I_{a0}(1)$ は a の1乗, $I_{a1}(1), I_{a2}(1)$ は a の3乗, $I_{a2}(1), I_{a1}(2), I_{a3}(1)$ は a の5乗……の係数を持っている. 従って(23)式中の I_a^2 は a^2, a^4, a^6, \dots のべき級数になるから α が適当に小さければ $[I_{a0}(1)]^2$ が I_a^2 の第1近似, これに $2I_{a0}(1) [I_{a1}(1) + I_{a0}(2)]$ を加えたものを第2近似とみることができる. しかし(22)式の積分を考えた時, 単に a の次数だけでは大小関係は決定しえない場合を生じる. その理由は(22)式の積分の上限を実質的に決めるものは e の指数部の ζ の係数でこれが0に近ければ積分の実質的の上限が大きくなる. 一方(23)式の右辺は m および p が大きい程その中に含まれているベッセル関数の次数が高いので, 積分の実質的の上限が小さければベッセル関数の低次の項だけが(22)式の積分の大部分を占めることになるが, 積分の実質的の上限が大きくなれば高次の項が無視できなくなる. 従ってこれから述べる近似の良否は α の大小と共に積分の実質的の上限の大きさ, すなわち $2z_0/a, 2(z_0+\tau)/a, (2z_0+\tau)/a$ に依存することになる. そこでこれらを一般化して x とあらわすこととし, 再び $a\zeta = y$ と置いて(22)式の積分をつぎの形で考えることにする.

$$\begin{aligned} G &= \pi a^{-5} \int_0^{\infty} e^{-x\alpha\zeta} \zeta^{-2} I_a^2 d\zeta \\ &= \int_0^{\infty} e^{-xy} y^{-2} (a^{-2} I_a)^2 dy \quad (24) \end{aligned}$$

2.3 $I_{a0}(1)$ の計算および第1近似項

(20)式に含まれている $I_{a0}(1)$ は

$$\begin{aligned} a^{-2} y I_{a0}(1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8n}{4n^2-1} \cdot \frac{\alpha y}{2} J_{2n+1}(y) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\alpha n}{2n-1} J_{2n}(y) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4\alpha y \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{4n^2-1} J_{2n+1}(y) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2(2n-1)} \{J_{2n-1}(y) - J_{2n+1}(y)\} \right] \\
 &= 4\alpha y \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{4n^2-1} J_{2n+1}(y) - \frac{1}{2} J_1(y) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} J_{2n+1}(y) \left\{ \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right\} \right] \\
 &= -\alpha y J_1(y) \tag{25}
 \end{aligned}$$

$$\therefore I_{a0}(1) = -\alpha a^2 J_1(y) \tag{26}$$

②式の中の I_a を⑧式の $I_{a0}(1)$ で置き換えた時の G を $\alpha^2 G_1(k)$ であらわせば

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha^2}{\pi} G_1(k) &= \alpha^2 \int_0^{\infty} e^{-xy} J_1^2(y) y^{-2} dy \\
 &= \frac{4\alpha^2}{3\pi k^3} \left\{ (2k^2-1)E(k) + (1-k^2)K(k) \right\} - \frac{x}{2} \tag{27}
 \end{aligned}$$

ただし、完全楕円積分の母数 k は

$$k^2 = \{1 + (x/2)^2\}^{-1} \tag{28}$$

したがって②式であらわされ M の第1近似 M_1 は

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \frac{\mu_0 a^3 N^2 \alpha^2}{2\tau^2 (1 - \sqrt{1 - \alpha^2})} \left\{ G_1(k_1) \right. \\
 &\quad \left. + G_1(k_3) - 2G_1(k_2) \right\} \tag{29}
 \end{aligned}$$

ただし、 $G_1(k_1)$, $G_1(k_2)$, $G_1(k_3)$ は⑧式の k を k_1 , k_2 , k_3 と置いたもので、夫々の k は⑧式の x が $2z_0/a$, $(2z_0+\tau)/a$, $2(z_0+\tau)/a$ となった k をあらわす。したがっていろいろの x , すなわちいろいろの k について⑧式の数値計算表を作製しておけば⑧式は容易に求まる。この表についてはあとで述べる。

2.4 $I_{a1}(1)$ の計算

つぎに $I_{ap}(1)$ のうちの $p=1$ の総和を計算する。

$$\begin{aligned}
 \alpha^{-2} y I_{a1}(1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8n(\alpha y/2)^3}{(4n^2-1) \cdot 3!} J_{2n+3}(y) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4n\alpha(\alpha y/2)^2}{(2n-1) \cdot 2!} J_{2n+2}(y) \right] \tag{30} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha y)^3}{24} J_{2n+3}(y) \left[\frac{4n}{4n^2-1} - \frac{3(n+1)}{(2n+1)(n+2)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3n}{(2n-1)(n+1)} \right] - \frac{(\alpha y)^3}{16} J_3(y) \\
 &= -\frac{(\alpha y)^3}{24} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} J_{2n+3}(y) \\
 &\quad - \frac{(\alpha y)^3}{16} J_3(y) \\
 &= -\frac{(\alpha y)^3}{24} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{2(n+1)(n+2)} \left[J_{2(n+1)}(y) \right. \\
 &\quad \left. + J_{2(n+2)}(y) \right] - \frac{(\alpha y)^3}{16} J_3(y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\alpha^3 y^4}{48} \left[\frac{J_4(y)}{2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{2(n+1)}(y)}{n(n+2)} \right] \\
 &\quad - \frac{(\alpha y)^3}{16} J_3(y) \tag{31}
 \end{aligned}$$

ここで③式中に含まれている $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{2(n+1)}(y)}{n(n+2)}$ はつぎのように計算できる。

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{2(n+1)}(y)}{n(n+2)} \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(y \cos \theta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(2(n+1)\theta)}{n(n+2)} d\theta \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(y \cos \theta) \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos 2\theta - \theta \sin 2\theta \right\} d\theta \\
 &= \frac{J_0(y)}{2} + \frac{J_2(y)}{4} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(y \cos \theta) \cdot \theta \cdot \sin 2\theta d\theta \tag{32}
 \end{aligned}$$

ただし、上式の変形中につぎの関係を利用している。¹⁰⁾

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(n+1)x}{n(n+2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos x - \frac{x}{2} \sin x \tag{33}$$

③式の第3項の積分を P とおけば

$$P = \int_0^{\pi/2} \cos(y \cos \theta) \cdot \theta \cdot \sin 2\theta d\theta \tag{34}$$

④式は部分積分によって積分することにし、予めつぎの不定積分を求めると

$$Q = \int \cos(y \cos \theta) \sin 2\theta d\theta \tag{35}$$

$\cos \theta = t$ とおけば

$$\begin{aligned}
 Q &= -2 \int \cos(yt) t dt \\
 &= -2 \left[\frac{\cos(y \cos \theta)}{y^2} + \frac{\cos \theta \sin(y \cos \theta)}{y} \right] \tag{36}
 \end{aligned}$$

したがって P はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 P &= -2 \left[\theta \left\{ \frac{\cos(y \cos \theta)}{y^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\cos \theta \sin(y \cos \theta)}{y} \right\} \right]_{\theta=0}^{\pi/2} \\
 &\quad + \frac{2}{y^2} \int_0^{\pi/2} \cos(y \cos \theta) d\theta \\
 &\quad + \frac{2}{y} \int_0^{\pi/2} \sin(y \sin \theta) \cos \theta d\theta \\
 &= -\frac{\pi}{y^2} + \frac{\pi}{y^3} J_0(y) + \frac{2}{y} P_1 \tag{37}
 \end{aligned}$$

ただし、 P_1 はつぎの積分をあらわす。

$$P_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(y \cos \theta) \cos \theta d\theta \tag{38}$$

ここで再び、 $\cos \theta = t$, とおいて部分積分を行なえば

$$P_1 = y \int_0^{\pi/2} \cos(y \cos \theta) (1 - \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= \frac{y\pi}{4} \{J_0(y) + J_2(y)\} = \frac{\pi}{2} J_1(y) \quad (39)$$

となるから

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} J_{2(n+1)}(y) \\ &= \frac{2}{y^2} + \frac{1}{2} J_0(y) - \frac{2}{y^2} J_0(y) - \frac{2}{y} J_1(y) + \frac{J_2(y)}{4} \end{aligned} \quad (40)$$

(40)式を(3)式に代入して整理すれば

$$I_{a1}(1) = \frac{-\alpha^3 a^2}{24} \{2y - 2yJ_0(y) - y^2 J_1(y)\} \quad (41)$$

が得られる。

2.5 $I_{a0}(2)$ の計算

(20)式の第3項および第4項に属する総和のうち、 $p=0$ 、に属する総和を $I_{a0}(2)$ とすれば

$$\begin{aligned} & a^{-2} y I_{a0}(2) \\ &= \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha y}{2} J_{2n+1}(y) - \frac{\alpha^3}{6} \sum_{n=1}^{\infty} n(2n-3) I_{2n}(y) \\ &= \alpha^3 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{ny}{2} J_{2n+1}(y) - \frac{(2n-3)y}{24} \{ J_{2n-1}(y) \right. \\ & \quad \left. + J_{2n+1}(y) \} \right\} \\ &= \frac{\alpha^3 y}{2} \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n+1}(y) \left\{ n - \frac{2n-1}{12} - \frac{2n-3}{12} \right\} \\ & \quad + \frac{\alpha^3 y}{24} J_1(y) \\ &= \frac{\alpha^3 y}{6} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) J_{2n+1}(y) - \frac{\alpha^3 y}{6} J_1(y) \\ & \quad + \frac{\alpha^3 y}{24} J_1(y) \\ &= \frac{\alpha^3 y^2}{12} - \frac{\alpha^3 y}{8} J_1(y) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\therefore I_{a0}(2) = -\alpha^3 a^2 \left\{ \frac{J_1(y)}{8} - \frac{y}{12} \right\} \quad (43)$$

2.6 第1近似に対する第1補正項の計算

I_a は(20)式のような内容をもつが、 I_{a^2} の中での α についての最小べき数 α^2 を係数にもつものによって I_{a^2} を近似した場合を第1近似として(29)式の M を得たが、これに対する最大の補正項は I_{a^2} の中の α^2 に次ぐべき数 α^4 の係数をもつものになる。 I_{a^2} の中で α^4 の係数をもつ項の総和はつぎのようにして得られる。

$$I_a = I_{a0}(1) + \{I_{a1}(1) + I_{a0}(2)\} + \{\alpha^5 \text{以上の係数を持つ項}\} \quad (44)$$

となり $I_{a0}(1)$ は α^1 の係数、 $I_{a1}(1)$ および $I_{a0}(2)$ は α^3 の係数をもつもので、 I_a を自乗した時にあらわれる級数の中で α^4 を係数に持つ項の総和を $I_a(\alpha^4)$ で表

現することにすれば

$$I_{a^2}(\alpha^4) = 2 I_{a0}(1) \{I_{a1}(1) + I_{a0}(2)\} \quad (45)$$

となる。従って(20), (41), (43)式より

$$\begin{aligned} I_{a^2}(\alpha^4) &= -2 \alpha^4 a^4 J_1(y) \left\{ \frac{y}{12} - \frac{J_1(y)}{8} - \frac{y}{12} \right. \\ & \quad \left. + \frac{y}{12} J_0(y) + \frac{y^2}{24} J_1(y) \right\} \\ &= \frac{-\alpha^4 a^4}{12} [2yJ_0(y)J_1(y) + (y^2 - 3)J_1^2(y)] \end{aligned} \quad (46)$$

ここで(27)式にならってつぎの積分を $G_2(k)$ とおく

$$\alpha^4 G_2(k) = \pi \alpha^4 a^{-5} \int_0^{\infty} e^{-x\alpha\zeta} \zeta^{-2} I_{a^2}(\alpha^4) d\zeta \quad (47)$$

変数を y に統一すれば

$$\begin{aligned} G_2(k) &= \pi \int_0^{\infty} e^{-xy} y^{-2} I_a(\alpha^4) dy \\ &= \frac{\pi}{12} \int_0^{\infty} e^{-xy} \left\{ \frac{2}{y} J_0(y) J_1(y) + \left(1 - \frac{3}{y^2} \right) J_1^2(y) \right\} \end{aligned} \quad (48)$$

ここで(48)式を各項毎に積分をする⁹⁾¹¹⁾¹²⁾。これらの積分によって第1種および第2種の完全楕円積分 $K(k)$ および $E(k)$ があらわれるが、 k はその母数で(28)式と同じものになる。

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-xy} y^{-1} J_1(y) J_0(y) dy \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-x y^{-1} J_1(2y \cos \theta)} \cos \theta d\theta dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{2}{k} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} - x \right] d\theta \\ &= \frac{2}{\pi k} E(k) - \frac{x}{2} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-xy} J_1^2(y) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right] \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-py} y^{-2} J_1^2(y) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \phi d\phi}{\sqrt{2 - 2 \cos \phi}} \int_0^{\infty} e^{-xy} y^{-1} \\ & \quad \times J_1^2(\sqrt{2 - 2 \cos \phi} y) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{2 - 2 \cos \phi}} - x}{2 - 2 \cos \phi} d\phi \\ &= \frac{-x}{2\pi} \int_0^{\pi} (1 + \cos \phi) d\phi \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{4 + x^2 - 4 \cos(\phi/2)} \\ & \quad \times 2 \cos^2(\phi/2) d\phi \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{1}{\pi k} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{\phi}{2}} \cos^2 \frac{\phi}{2} d\phi \end{aligned}$$

ここで $\theta = -\phi/2$ とおけば

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-xy} y^{-2} J_1^2(y) dy \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{4}{\pi k} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{4}{3\pi k^3} [(2k^2-1)E(k) + (1-k^2)K(k)] \end{aligned} \quad (51)$$

(49), (50), (51)式を(48)式に代入して整理すれば

$$G_2(k) = \frac{1}{12k^3\pi} [(4-6k^2)\{K(k)-E(k)\} + kK(k)] \quad (52)$$

となる。従って M の第2近似を M_2 であらわせば

$$\begin{aligned} M_2 = & \frac{\mu_0 a^3 N^2 \alpha^2}{2\tau^2(1-\sqrt{1-\alpha^2})} \{ G_1(k_1) + G_1(k_3) \\ & - 2G_1(k_2) + \alpha^2 \{ G_2(k_1) + G_2(k_3) - 2G_2(k_2) \} \} \end{aligned} \quad (53)$$

2.7 作表について

矩形断面コイルがFig. 1のような配置で导体平板に対向している場合、その完全反射時におけるインダクタンスの変化分、あるいはFig. 1のコイルCおよびそれと同形の実在のコイルがC'の位置に存在する場合の相互の誘導係数の近似値はコイルの寸法および配置に関して(53)式を計算すれば求まる。しかし一方、(53)式からわかるように $G_1(k)$ 、および $G_2(k)$ を x あるいは k の関数として数表を作製しておけば種々の寸法のコイルあるいは距離の変化に対しての M_2 の近似計算が容易になる。このような目的に利用するためにTable 1に x をパラメーターとして k 、 $G_1(k) - \pi x/2$ 、 $G_2(k) - \pi x/24$ の計算値を示す。 $G_1(k)$ から(53)式の第2項 $2\pi x/3$ を、また $G_2(k)$ から(53)式の第1項 $\pi x/24$ を消去した理由は(52)式の計算に際してこの項は常に0になるから予め差引いておいた。なおTable 1の計算にはつぎの近似式を用いた¹²⁾。

$$\begin{aligned} K(k) = & \{1.3862944 + 0.119723(1-k^2) + 0.0725296 \\ & (1-k^2)^2\} + \{0.5 + 0.1213478(1-k^2) \\ & + 0.0288729(1-k^2)^2\} \log(1/1-k^2) \quad (54) \\ E(k) = & 1 + 0.4630151(1+k^2) + 0.1077812 \\ & (1-k^2)^2 \\ & + \{0.245272(1-k^2) + 0.0412496(1-k^2)^2\} \\ & \log(1/1-k^2) \quad (55) \end{aligned}$$

3. 測定値との比較

3.1 鏡像コイルとの相互誘導係数の実験的な決定法

Fig. 1におけるC, C'が2つの実在のコイルである

Vol. 21 No. 3 (1971)

場合の相互誘導係数の測定については補足して述べることは何もない。しかし、コイルCが导体平板に対向してC'がその鏡像コイルである場合には両者間の相互誘導係数の測定法を述べておく必要がある。

いまFig. 1で导体は非磁性としその導電率を σ とする。コイルCは単巻円形コイルでこれに角周波数 ω の交流電流を流した場合、导体が存在しない状態からの実効インダクタンスの変化分 l はうず電流の浸透の深さ δ が十分に小さい時にはつぎの式で与えられる⁶⁾。

$$l \doteq \mu_0 \pi a^2 \int_0^{\infty} J_1^2(a\zeta) e^{-2z\zeta} \left\{ 1 - \delta\zeta + \frac{(\delta\zeta)^3}{4} \dots \right\} d\zeta \quad (56)$$

δ が数mm以下の場合にはほとんど次式で充分である。

$$l \doteq \mu_0 \pi a^2 \int_0^{\infty} J_1^2(a\zeta) e^{-2z\zeta} \{ 1 - \delta\zeta \} d\zeta \quad (57)$$

コイルCが矩形断面円形コイルの場合には本論文で考察してきたと同様に半径方向と軸方向に(57)式を積分して M_2 に相等するものを導き出せばよい。この時(57)式中の $\{ 1 - \delta\zeta \}$ はこれらの積分には無関係だから無反射時からの実効インダクタンスの変化分 L は(52)式に相等する式として次式が得られる。

$$\begin{aligned} L \doteq & \frac{N^2 \mu_0 \pi}{\tau^2 a^2 (\sqrt{1+\alpha} - \sqrt{1-\alpha})^2} \int_0^{\infty} (e^{-2z\zeta} \\ & + e^{-2(z_0+\tau)\zeta} - 2e^{-(2z_0+\tau)\zeta}) \zeta^{-2} I_a^2 \{ 1 - \delta\zeta \} d\zeta \\ = & M - \frac{\delta N^2 \mu_0 \pi}{2\tau^2 a^2 (1 - \sqrt{1-\alpha^2})} \int_0^{\infty} (e^{-2z\zeta} \\ & + e^{-2(z_0+\tau)\zeta} - 2e^{-(2z_0+\tau)\zeta}) \zeta^{-1} I_a^2 d\zeta \quad (58) \end{aligned}$$

(58)式の右辺第2項は δ 以外はコイルの寸法および配置が定まれば一定の値になる。すなわちコイル定数と考えてよいからこれを Q_1 とおけば

$$L = M - \delta Q_1 = M - \sqrt{2/(\mu_0 \sigma)} Q_1 / \sqrt{\omega} \quad (59)$$

となるのでグラフの縦座標として、非磁性良导体に対して ω を種々変えて測定した L の値をとり、横座標に $1/\sqrt{\omega}$ をとって測定点を記入すれば一直線上に乗る筈である。この直線が縦座標と交わる点は(59)式で $\omega \rightarrow \infty$ すなわち第2項が0となる点になる。従ってこの交点の値は鏡像コイルとの相互誘導係数を与える。

3.2 測定値および計算値

測定には横河ヒューレットパッカード製万能ブリッジ4255Aと安藤電気製ROM-2D発振器を用いた。使用コイルは $a_0 = 35\text{mm}$ 、 $a_1 = 40\text{mm}$ 、 $\tau = 10\text{mm}$ 、線径0.315mmのエナメル被覆銅線を500回巻いたものを用いた。その測定結果はFig. 2に $1/\sqrt{\omega}$ を横座標にして記入している。导体平板には $30\text{cm} \times 30\text{cm} \times$

Table 1 $G_1(k)$ and $G_2(k)$ for the normalized distance x

x	$G_1(k)$	$G_2(k)$	x	$G_1(k)$	$G_2(k)$	x	$G_1(k)$	$G_2(k)$
0.01	1.3336	- 0.39034	0.35	1.4951	- 0.07744	0.69	1.8071	0.00748
0.02	1.3344	- 0.33249	0.36	1.5027	- 0.07436	0.70	1.8177	0.00959
0.03	1.3356	- 0.29856	0.37	1.5104	- 0.07134	0.71	1.8283	0.01169
0.04	1.3371	- 0.27441	0.38	1.5182	- 0.06837	0.72	1.8389	0.01377
0.05	1.3390	- 0.25560	0.39	1.5262	- 0.06544	0.73	1.8496	0.01584
0.06	1.3412	- 0.24016	0.40	1.5342	- 0.06257	0.74	1.8604	0.01789
0.07	1.3437	- 0.22703	0.41	1.5424	- 0.05974	0.75	1.8713	0.01994
0.08	1.3464	- 0.21560	0.42	1.5506	- 0.05695	0.76	1.8822	0.02197
0.09	1.3494	- 0.20545	0.43	1.5590	- 0.05420	0.77	1.8931	0.02399
0.10	1.3527	- 0.19631	0.44	1.5675	- 0.05150	0.78	1.9041	0.02599
0.11	1.3562	- 0.18799	0.45	1.5760	- 0.04882	0.79	1.9152	0.02799
0.12	1.3599	- 0.18033	0.46	1.5847	- 0.04619	0.80	1.9263	0.02998
0.13	1.3638	- 0.17324	0.47	1.5935	- 0.04358	0.81	1.9375	0.03195
0.14	1.3680	- 0.16661	0.48	1.6023	- 0.04101	0.82	1.9487	0.03392
0.15	1.3724	- 0.16040	0.49	1.6113	- 0.03847	0.83	1.9600	0.03587
0.16	1.3770	- 0.15454	0.50	1.6203	- 0.03596	0.84	1.9713	0.03781
0.17	1.3817	- 0.14898	0.51	1.6294	- 0.03347	0.85	1.9827	0.03975
0.18	1.3867	- 0.14370	0.52	1.6386	- 0.03102	0.86	1.9941	0.04167
0.19	1.3918	- 0.13866	0.53	1.6479	- 0.02859	0.87	2.0056	0.04359
0.20	1.3971	- 0.13384	0.54	1.6573	- 0.02618	0.88	2.0171	0.04550
0.21	1.4026	- 0.12921	0.55	1.6668	- 0.02380	0.89	2.0287	0.04740
0.22	1.4082	- 0.12475	0.56	1.6763	- 0.02144	0.90	2.0403	0.04928
0.23	1.4140	- 0.12045	0.57	1.6859	- 0.01910	0.91	2.0519	0.05117
0.24	1.4200	- 0.11630	0.58	1.6956	- 0.01678	0.92	2.0636	0.05304
0.25	1.4261	- 0.11228	0.59	1.7054	- 0.01449	0.93	2.0754	0.05490
0.26	1.4324	- 0.10838	0.60	1.7153	- 0.01221	0.94	2.0872	0.05676
0.27	1.4388	- 0.10459	0.61	1.7252	- 0.00995	0.95	2.0990	0.05861
0.28	1.4454	- 0.10090	0.62	1.7352	- 0.00771	0.96	2.1109	0.06045
0.29	1.4521	- 0.09732	0.63	1.7453	- 0.00549	0.97	2.1228	0.06228
0.30	1.4589	- 0.09382	0.64	1.7554	- 0.00329	0.98	2.1348	0.06411
0.31	1.4659	- 0.09040	0.65	1.7656	- 0.00111	0.99	2.1468	0.06593
0.32	1.4730	- 0.08706	0.66	1.7759	0.00106	1.00	2.1588	0.06774
0.33	1.4802	- 0.08379	0.67	1.7862	0.00322			
0.34	1.4876	- 0.08053	0.68	1.7966	0.00536			

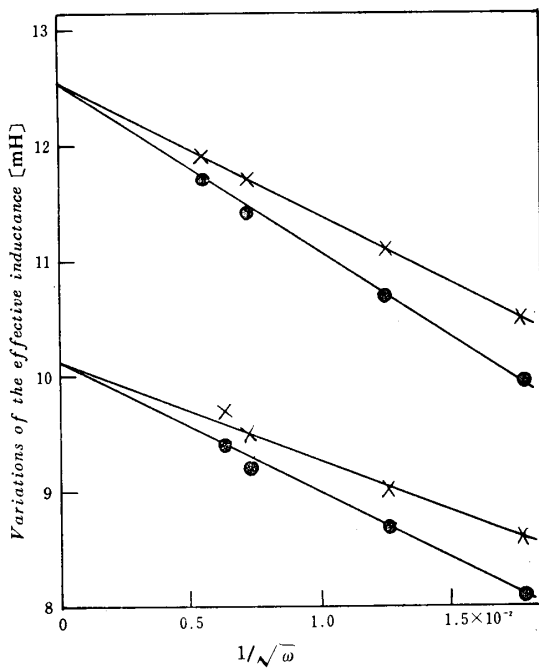


Fig.2 Variations of the effective inductance of the coil, cross marks for the Cu plate and black circles for the Al plate

2 cm の銅板とアルミ板を用い、 $z_0 = 3$ mm および $z_0 = 5$ mm で測定したものを示した。なお使用周波数はいづれも 5, 3, 1, 0.5 KHz を用いている。Fig. 2 の測定点を外捜すれば相互誘導係数は夫々 12.53 mH および 10.13 mH が得られる。一方上記のコイル寸法に対して(6)式の計算を行なうと M_2 として夫々 12.33 mH および 10.02 mH が得られた。両者とも測定誤差および近似式による計算の誤差を考慮すれば実験値に一致している。

4. 結 言

我々の場合 Fig. 1 のコイル及び導体の配置における鏡像コイルとの間の相互誘導の計算はまだその緒についたばかりの状況で大型電子計算機による厳密計算との比較も行なっていない現況である。しかし此処で明らかになったことは上に記したように相互誘導係数を α^2 のべき級数の形で近似を高めてゆけば Table 1 に相等する数表を一度作っておくことによって、すべての

矩形断面円形コイルに汎用で使用でき、かつ卓上計算機で簡単に計算を行なうことが可能になることである。測定値と計算値との比較からわかるように x が大きく α が小さければ Table 1 程度の近似で充分だが、 x が小さくなると誤差が増加する。この理由は y による積分の実質的上限をきめる e^{-xy} の収束が x の減少と共に悪くなるのでより高次のベッセル関数の項が効いてくることになる。 α が大きい場合も補正項を第 1 項で打切るとは無理で、更に高次の補正項すなわち高次のベッセル関数の項が効いてくることになる。しかし補正項第 2 項以下は本論文のように近似なしに完全楕円積分に持込むことは困難になり、適当な近似を行なって電子計算機によって積分値を求めなければならぬ公算が大きい。従って計算方針も変わるので本論文では一応初項とその補正第 1 項を厳密に求める計算を示し、 α が 0.1 以下および x が 0.2 以上ならば一応 Table 1 だけで計算が可能なることを実験値との比較で示した。今後は補正第 2 項以下の計算を行なって、もっと広い範囲に適用できる数表を確立したいと考えている。

参 考 文 献

- 1) F. Förster: Z. Metallkde. 43, 163 (1952)
- 2) 尾上守夫: 電学誌 88, 162 (1968)
- 3) H. Joseph and N. Newman: Jour. A. I. E. E., 74, 39 (1955)
- 4) 日本非破壊検査協会編: 非破壊検査便覧, 日刊工業新聞社 (1967) p.646
- 5) W. Fissenmenger: Acustica 12, 185 (1962)
- 6) 戸田圭一, 長島弘修: 山口大学工学部研究報告, 21, 63 (1970)
- 7) 電気学会編: 電気工学ハンドブック, 電気学会, (1967) p.82
- 8) F. W. Grover: "Inductance Calculations: Working Formulas and Tables", Dover Publications (1962) p.91
- 9) G. N. Watson: "A Treatise on theory of Bessel Functions" Cambridge University Press (1962) P.389
- 10) 森口繁一他: 数学公式 II, 岩波書店 (1968) P.75
- 11) H. Hancock: "Elliptic Integrals", Dover Publications (1958) p.61
- 12) 森口繁一他: 数学公式 III, 岩波書店 (1968) p.198

(昭和45年11月14日受理)