

# 疎な結合の層状ランダム回路網による パターン間の距離変換

戸根 和之\*・鳥岡 豊士\*\*・平田 威彦\*

Transformation of Hamming Distance between Patterns in a  
sparsely connected Two Layer Random Nerve Net

Kazuyuki TONE, Toyoshi TORIOKA and Takehiko HIRATA

## Abstract

We present a sparsely coupled two layer random neural net with an inhibitory element, and disclose some properties of transformation of Hamming distance between two patterns in this net. Simultaneously, we point out that the number of connections between two layers, and the function of the inhibitory element have a great effect on the transformation of Hamming distance between two patterns in the random neural net.

## 1. 序 論

層状ランダム回路網は、神経回路網の1モデルとみなすことができる。この意味で、層状ランダム回路網の研究は、神経回路網の情報処理機構を解明する上で重要である<sup>1)</sup>。それゆえ、層状ランダム回路網の性質を明らかにすることは、神経回路網の研究を進める際の基礎となる。ここでは、層状ランダム回路網によるパターン間の距離変換の性質について考える。密な結合の層状ランダム回路網によるパターンの距離変換については、すでに甘利<sup>1,2)</sup>によって述べられている。そこでは、小さなハミング距離のパターンが層状ランダム回路網によって大きなハミング距離に変換されることが示されている。しかし、疎な結合の場合のパターン変換の性質についてはほとんど明らかにされていない。

本文では、抑制素子を有す層状ランダム回路網を与え、この回路網によるパターンの距離変換の性質をハミング距離によるパターン分離の立場から述べる。この議論を通して、パターン間の距離変換に及ぼす抑制素子の抑制機能、層間の接続本数の影響を明らかにする。

## 2. 理 論

### 2.1 モデル

図1に抑制素子  $G$  をもつ2層からなる層状ランダム回路網を示す。このモデルで、第1層、第2層は、それぞれ  $n, N$  個の閾値素子から構成されている。但

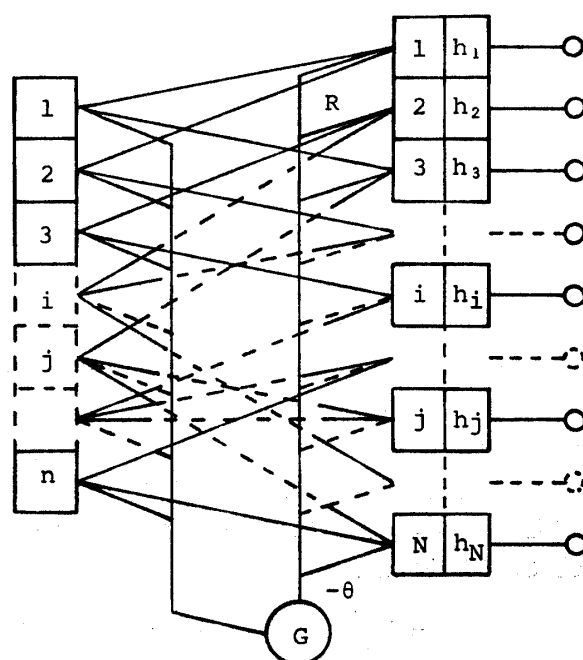


Fig. 1 Model.

\* 電気工学科

\*\* 短期大学部情報処理工学科

し  $n$  と  $N$  は十分大きな数とする。また第2層の閾値  $h_i$  は互いに独立で平均  $\bar{h}$ , 分散  $\sigma_h^2$  の正規分布

$$f(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_h^2}} \exp\left\{-\frac{(h-\bar{h})^2}{2\sigma_h^2}\right\} \quad (1)$$

に従うものとする。抑制素子  $G$  は、第2層の発火率を一定値に制御するものとする。この際、第1層から興奮性の入力を受け、この入力に相当する抑制信号を第2層の各素子に送ることによって制御する。第1層と第2層の接続は、重み1をもってランダムに接続される。このとき、第2層の各素子は、第1層から  $R$  本(正の整数)の入力を受けるものとする。尚、図1は、苔状線維、顆粒細胞、ゴルジ細胞からなる小脳皮質の一モデルとみなすことができる。

### 2.2 ハミング距離によるパターン分離度

モデルによるパターン変換の性質を明らかにするため、必要な定義、定理を与えよう。第1層に与えられる任意の2つの  $n$  次元パターン  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  を

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \mathbf{y} &= (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ x_i, y_i &\in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (2)$$

とする。また  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  に対応する第2層の2つの  $N$  次元パターン  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  を

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (X_1, X_2, \dots, X_N) \\ \mathbf{Y} &= (Y_1, Y_2, \dots, Y_N) \\ X_i, Y_i &\in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (3)$$

とする。このとき、第2層の  $X_i$  要素は

$$X_i = \mathbf{1}\left(\sum_{j \in A_i} x_j - \theta(\phi_x) - h_i\right) \quad (4)$$

ただし

$$\mathbf{1}(a) = \begin{cases} 1 & a \geq 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$$

$A_i$ : 第2層の  $i$  素子が第1層から受ける、発火している素子の集合。

$\theta(\phi_x)$ : パターン  $\mathbf{x}$  が与えられたときの抑制素子  $G$  からの抑制入力。

与えられる。第1層にパターン  $\mathbf{y}$  が与えられたときも同様に与えられる。ここで、第1層のパターン  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  の発火率  $\phi_x, \phi_y$  を、第1層の素子数  $n$  に対する発火している素子の割合、

$$\phi_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \phi_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (5)$$

と定義する。また、パターン  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  間の共通発火率  $\psi_{xy}$

を、第1層の素子数  $n$  に対するパターン  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  で共通に発火する素子の割合

$$\psi_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (6)$$

と定義する。同様に、第2層の発火率  $\Phi_x, \Phi_y$ , 共通発火率  $\Psi_{xy}$  を

$$\Phi_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i, \quad \Phi_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \quad (7)$$

$$\Psi_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i Y_i \quad (8)$$

と定義する。第1層、第2層のハミング距離  $d$  及び  $D$  を発火率、共通発火率を用いて

$$d = \phi_x + \phi_y - 2\psi_{xy} \quad (9)$$

$$D = \Phi_x + \Phi_y - 2\Psi_{xy} \quad (10)$$

と定義する。ハミング距離によるパターン分離度  $J_{dB}$  をハミング距離  $d$  と  $D$  の比

$$J_{dB} = \frac{D}{d} \quad (11)$$

と定義する。この定義から、 $J_{dB} > 1$  であれば、第1層のパターンは第2層でより大きなハミング距離をもつパターンに変換される。すなわち、ハミング距離の意味で、第1層のパターン  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  は、第2層でパターン分離される。式(1)で与えられる閾値分布  $f(h)$  の標準偏差  $\sigma_h$  が十分小さく、 $3\sigma_h < 0.5$  としよう。このとき、第2層の発火率  $\Phi$  と共通発火率  $\Psi_{xy}$  は次の定理で与えられる。

定理 接続本数が  $R$  のとき発火率  $\Phi$ , 共通発火率  $\Psi_{xy}$  は第1層の発火率と共通発火率を用いて

$$\begin{aligned} \Phi &= a \cdot v_i(\phi) + \sum_{p=i+1}^R v_p(\phi) \\ &= b \cdot v_j(\phi) + \sum_{q=j+1}^R v_q(\phi) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{xy} &= C \cdot w_{ij}(\phi, \psi_{xy}) + a \cdot \sum_{q=j+1}^R w_{iq}(\phi, \psi_{xy}) \\ &\quad + b \cdot \sum_{p=i+1}^R w_{pj}(\phi, \psi_{xy}) \\ &\quad + \sum_{p=i+1}^R \sum_{q=j+1}^R w_{pq}(\phi, \psi_{xy}) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。

ただし

$$\phi_x = \phi_y = \phi \leq 0.5$$

$$v_p(\phi) = \binom{R}{p} \phi^p \cdot (1-\phi)^{R-p}$$

$$v_q(\phi) = \binom{R}{q} \phi^q (1-\phi)^{R-q}$$

$$w_{pq} = \sum_{r=\max(0, p+q-R)}^{\min(p, q)}$$

$$\frac{R!}{(p-r)! (q-r)! r! (R-p-q+r)!}$$

$$\cdot (\phi - \psi_{xy})^{p-r} \cdot (\phi - \psi_{xy})^{q-r}$$

$$\cdot \psi_{xy}^r \cdot (1 + \psi_{xy})^{R-p-q+r}$$

$$a = \int_{-\infty}^{(i-\bar{h}_x)/\sigma_h} f(h_x) \cdot dh_x$$

$$b = \int_{-\infty}^{(j-\bar{h}_y)/\sigma_h} f(h_y) \cdot dh_y$$

$$C = \min(a \cdot b)$$

この定理で  $p, q$  は、パターン  $x, y$  が与えられたとき、第2層の1素子がそれぞれのパターンから受ける発火入力の数である。 $r$  は、パターン  $x, y$  が与えられたとき、第2層の素子が  $x$  と  $y$  から共通に受ける発火入力の数である。また、 $h_x, h_y$  は、パターン  $x, y$  が与えられたときの第2層の閾値である。 $i, j$  は、 $h_x, h_y$  の平均値  $\bar{h}_x, \bar{h}_y$  に最も近い整数の閾値である。(詳しくは、文献3), 6) を参照せよ.)

### 3. 具体例

接続本数が  $R$  本である場合の  $\Phi$  と  $\Psi_{xy}$  は先に述べた定理で与えられる。しかし、式 (11)、定理から直接に層状ランダム回路網によるパターン間の距離変換に及ぼす接続本数  $R$  の影響を知ることは困難である。そこで、まず  $R=1, 2$  の簡単な場合のパターン変換の性質を明らかにする。次に、一般的な場合の性質を明らかにする。これらの結果をもとに、 $\Delta_{dD}$  に及ぼす抑制素子  $G$  の抑制機能、及び接続本数  $R$  の影響を明らかにする。以下、 $\Delta_{dD}$  を与える。

#### 3.1 $R=1$ の場合

a)  $0 < \Phi \leq \phi$  のとき

$$\Phi = a \cdot \phi \quad (14)$$

$$\Psi_{xy} = a \cdot \psi_{xy} \quad (15)$$

従って、パターン分離度  $\Delta_{dD}$  は (9) 式より

$$\Delta_{dD} = a \quad (16)$$

b)  $\phi < \Phi \leq 1.0$  のとき

$$\Phi = \phi + a(1-\phi) \quad (17)$$

$$\Psi_{xy} = \psi_{xy} + a(1-\psi_{xy}) \quad (18)$$

$$\Delta_{dD} = 1 - a \quad (19)$$

a), b), いずれの場合にも  $\Delta_{dD}$  は、 $a$  が一定のもとで第1層のハミング距離に関係なく一定となる。図2に第1層のハミング距離  $d$  を横軸としたパターン分離度曲線を示す。この図でパラメータは、第2層の発火率  $\Phi$  である。この図から分るように、パターン分離度は、第2層の発火率  $\Phi$  の値にかかわらず  $\Delta_{dD} < 1$ , かつ一定となる。

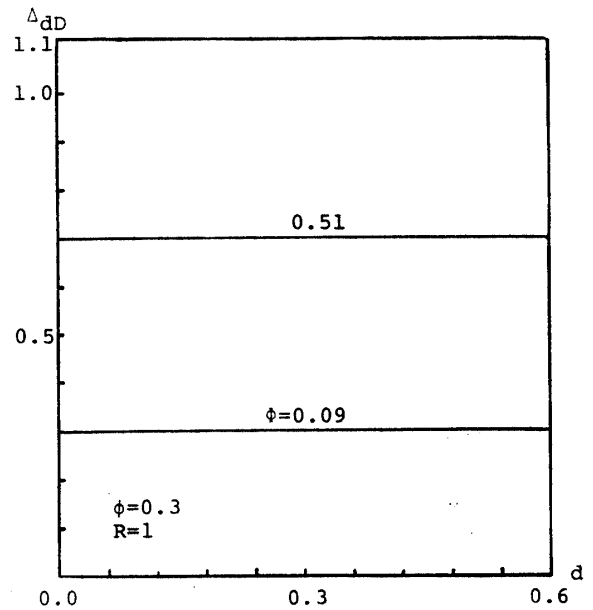


Fig. 2 Relation between  $d$  and  $\Delta_{dD}$ .

従って、 $R=1$  の層状ランダム回路網は、パターン分離機能をもたない。

#### 3.2 $R=2$ の場合

a)  $0 < \Phi \leq \phi^2$  のとき

$$\Phi = a \cdot \phi^2 \quad (20)$$

$$\Psi_{xy} = a \cdot \psi_{xy}^2 \quad (21)$$

$$\Delta_{dD} = a \cdot \left( 2\phi - \frac{d}{2} \right) \quad (22)$$

b)  $\phi^2 < \Phi \leq 2\phi - \phi^2$  のとき

$$\Phi = \phi^2 + 2a \cdot \phi(1-\phi) \quad (23)$$

$$\Psi_{xy} = \psi_{xy}^2 + 2a \cdot (\phi^2 - 2\phi \cdot \psi_{xy} + \psi_{xy}^2) \quad (24)$$

$$\Delta_{dD} = 2\phi + 2a \cdot (1-\phi) - \frac{d}{2} \quad (25)$$

c)  $2\phi - \phi^2 < \Phi \leq 1.0$  のとき

$$\Phi = 2\phi - \phi^2 + a \cdot (1-\phi)^2 \quad (26)$$

$$\Psi_{xy} = 2\phi^2 - 4\phi \cdot \sqrt{r_{xy}} + 2\sqrt{r_{xy}} + \sqrt{r_{xy}^2} + a \cdot \{2(1-\phi)^2 - (1-2\phi + \sqrt{r_{xy}})^2\} \quad (27)$$

$$\Delta_{dD} = \left(2 - 2\phi - \frac{d}{2}\right) \cdot (1-a) \quad (28)$$

$\Delta_{dD}$  は、 $\phi$  と  $a$  が一定のもとで、第1層のハミング距離  $d$  の一次関数となる。図3にハミング距離  $d$  とパターン分離度  $\Delta_{dD}$  の関係を示す。この図で第1層の発火率  $\phi$  は0.3である。またパラメータは  $\Phi$  である。

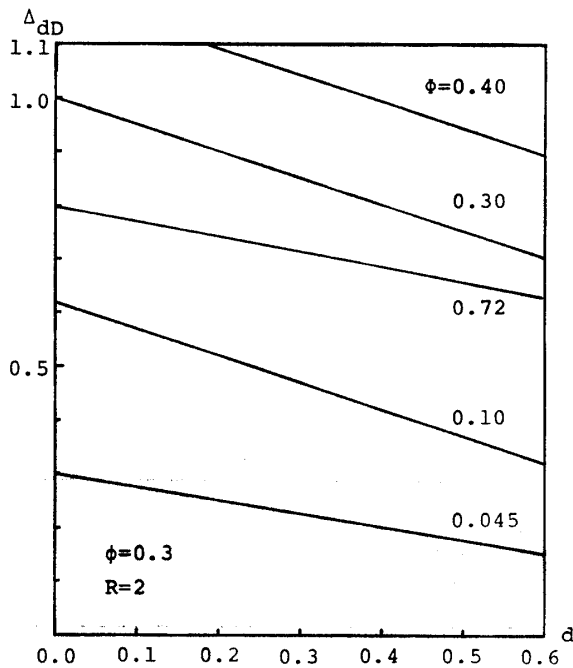


Fig. 3 Relation between  $d$  and  $\Delta_{dD}$ .

図から分るように、第2層の発火率  $\Phi$  が大きくなるにつれて  $d$  の小さな値をもつパターンから分離されるようになる。任意の  $d$  について、パターン分離される  $\Phi$  の範囲を求めると

$$\frac{1-2\phi - \frac{d}{2}(\phi-1)}{1-2\phi} \phi < \Phi < \frac{1-\phi^2 - \frac{d}{2}}{2-2\phi - \frac{d}{2}} \quad (29)$$

となる。この式で  $d=0$  とおくと

$$\phi < \Phi < \frac{1+\phi}{2} \quad (30)$$

となる。この式から  $\phi=0.3$  としてパターン分離される  $\Phi$  の範囲を求めると、 $0.3 < \Phi < 0.65$  となる。

さて、入力パターン  $x, y$  は、 $\Phi = \phi$  のときからパターン分離され始める。 $\Phi < 2\phi - \phi^2$  の範囲では、 $\Phi$  の増加にともなって、パターン分離される範囲が広がってくる。しかし、 $\Phi = 2\phi - \phi^2$  を境に再びこの範囲は減少する。そして  $\Phi \geq (1+\phi)/2$  となると全く

分離されなくなる。従って、 $\Phi = 2\phi - \phi^2$  で、パターン  $x, y$  は、最も大きなハミング距離をもつパターンに変換される。また、パターン分離機能は抑制素子  $G$  によって第2層の発火率を  $\Phi = 2\phi - \phi^2$  付近に制御することによって高められる。

### 3.3 R>2の場合

接続本数が、一般的に  $R$  本である場合を考えよう。第2層の発火率  $\Phi$  は、 $0 < \Phi \leq \phi^R$  の範囲の一定値をとるものとしよう。このとき発火率  $\Phi$ 、共通発火率  $\Psi_{xy}$  は

$$\Phi = a \cdot \phi^R \quad (31)$$

$$\Psi_{xy} = a \cdot \sqrt{r_{xy}^R} \quad (32)$$

となる。パターン分離度  $\Delta_{dD}$  は、 $d$  の  $(R-1)$  次関数

$$\Delta_{dD} = a \cdot \left\{ \phi^{R-1} + \phi^{R-2} \cdot \left(\phi - \frac{d}{2}\right) + \phi^{R-3} \cdot \left(\phi - \frac{d}{2}\right)^2 + \dots + \left(\phi - \frac{d}{2}\right)^{R-1} \right\} \quad (33)$$

となる。この式から接続本数  $R$  が  $\Delta_{dD}$  に大きな影響を与えることがわかる。 $\Phi$  による影響を調べるため、 $R=3$  の場合を考えよう。このとき、第2層の発火率  $\Phi$  と共通発火率  $\Psi_{xy}$  は  $R=1, 2$  の場合と同様にして

$$\Phi = a \cdot \phi^3 \quad (34)$$

$$\Psi_{xy} = a \cdot \sqrt{r_{xy}^3} \quad (35)$$

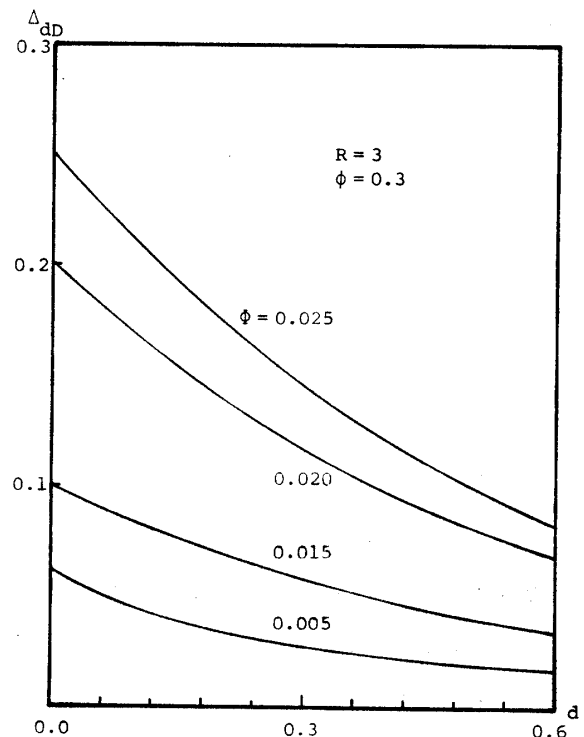


Fig. 4 Relation between  $d$  and  $\Delta_{dD}$ .

となる。従って、パターン分離度  $J_{aD}$  は

$$J_{aD} = a \cdot \left\{ 3 \left( \phi - \frac{1}{4} d \right)^2 + \frac{1}{16} d^2 \right\} \quad (36)$$

となる。この式から分るように  $J_{aD}$  は  $d$  の2次関数となる。図4に第1層のハミング距離  $d$  とパターン分離度  $J_{aD}$  の関係を示す。前出の図と同様に、 $\phi = 0.3$ , パラメータは  $\phi$  である。この図から分るように、 $R=3$  の層状ランダム回路網は、発火率  $\phi$  が  $0 < \phi < \phi^3$  に制御されるとき、パターン分離機能をもたない。 $R > 3$  の場合も同様である。(詳細な議論については2)を参照せよ。)

このように、抑制素子  $G$  の制御機能、及び接続本数  $R$  はパターン分離度  $J_{aD}$  に大きな影響を与える。

#### 4. ま と め

以上の議論から以下の事実が明らかにされた。

1. 層状ランダム回路網におけるパターン分離度の式  $J_{aD}$  は、ハミング距離  $d$  の  $(R-1)$  次関数として与えられる。(  $0 < \phi \leq \phi^R$  )
2. 入力パターン  $x, y$  間のハミング距離  $d$  を第2層でより大きなハミング距離をもつパターンに変換す

るためには、抑制素子  $G$  によって第2層の発火率  $\phi$  を適当な値に制御する必要がある。

結論として、事実1から層状ランダム回路網によるパターン間の距離の変換は、接続本数  $R$  に大きく影響されることがわかる。また、事実2から抑制素子  $G$  が層状ランダム回路網によって入力パターン間のハミング距離を拡大する際、重要な働きをすることが分る。今後の課題として層状ランダム回路網によるパターン変換の性質を工学的に応用することが残されている。

謝辞：最後に、この研究の手掛りとなる助言を頂いた、東京大学計数工学科甘利俊一助教授に深く感謝する。

#### 参 考 文 献

- 1) 甘利俊一：神経回路網の数理，産業図書 (1978)
- 2) 戸根，鳥岡，平田：層状ランダム回路網のパターン分離性について，信学会技報，MBE 79-10, 1 (1979)
- 3) 鳥岡，池田，縄田：信学会技報，MBE 77-21, 29 (1977)
- 4) D. Marr: J. Physiol, **202**, 437 (1969)
- 5) S. Amari: Kybernetik, **14**, 201 (1974)
- 6) T. Torioka: Biol. Cybernetics, **31**, 27 (1978)

(昭和54年4月11日 受理)