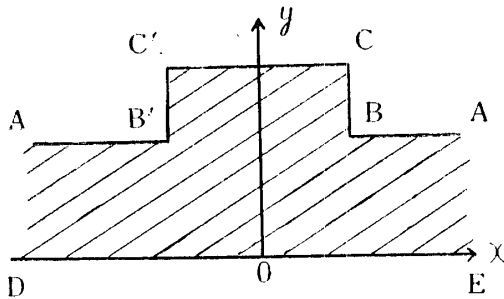


隅を丸めた不連続個所を有する平面応力問題の 写像関数について

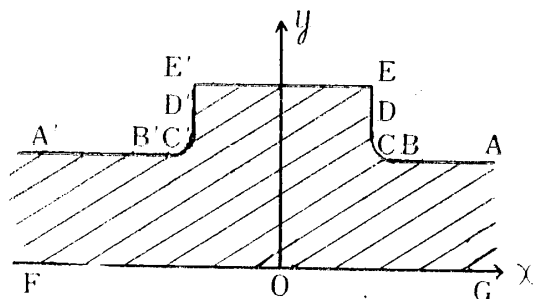
野村 恭雄

1. 緒言

不連続個所を有する平面応力問題を取扱う場合に、第1図のB点(B'点)のような鋭い切欠きのあるときは、その個所で応力は無限大となって応力集中が起り、破断などの起る危険が非常に多い。そこでそういう切欠きの角を第2図のBD(B'D')のように丸めて応力集中の緩和をはかることがしばしば行われている。そして、このように角を丸めた部分の応力分布は、その丸めた曲線の形状に直接支配されるのである。しかしてそのような角を丸めた場合を理論的に取扱うことは非常に難しく、また理論的にかかりに解けても、それに数値計算を行って、実用例について具体的に検討することは極めて困難なことであった。そこで本論文においては、そのような隅の角を丸める方法についていろいろ考え、数値計算のできる方法で例を示すことにする。このような角を丸める場合にも、また角を丸めない場合にも使用するように、Schwarz-Christoffel の等角写像を用いることとし、ここでは先ずその写像関数を求めることについて述べる。



第 1 図 z-平面



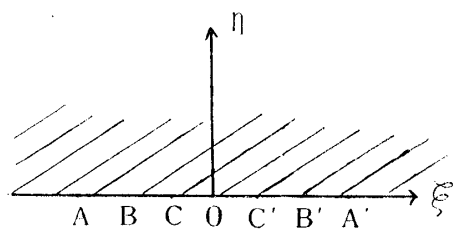
第 2 図 z-平面

2. 鋭い切欠きの角を丸める方法

(1) Schwarz-Christoffel の変換から導く一般の方法。

この場合、隅の角の丸味は必ずしも円弧とは限らないで何らかの曲線でもよいとする。すなわち円は辺の数の無限に存在する等辺多角形であるとする考え方から、任意の曲線は辺の数の非常に多い(等辺とは限らない)多角形であるとする。したがって曲線でかこまれた一つの面分は、一般には無限不等辺多角形の内部であるとする。この考えによって Schwarz-Christoffel の変換で ζ -平面(第3図)の上半平面が、この無限不等辺多角形の内部に写像できるように計算を行うわけである。

Schwarz-Christoffel の変換で ζ -平面の上半平面を多角形の内部に写像するには、写像関数は



ζ -平面

第 3 図

$$\frac{d}{d\xi} \left(\log \frac{dz}{d\xi} \right) = - \sum_{r=1}^n \frac{\lambda_r}{\xi - \xi_r} \dots\dots\dots(1)$$

これは ξ -平面の実軸の点 $\xi_r (r=1, \dots, n)$ が z -平面の多角形の頂点に対応し、その頂角の外角が $\lambda_r \pi$ となる場合である。

そこで第2図に示すように図形が左右対称であるとして y 軸の右半分 (正の方) のみを考えることとする。そして $ABB'CD$ を $ABCD$ のように曲線 BC のような丸味をつけて、 B, C 点が直線辺に接しているものとする、 B 点から曲線に沿うて C 点に至るまでの角度の変化は B から B' を経て C に至るまでの角度の変化と全く相等的いわけである。すなわち $\overline{AB'}$ および $\overline{DB'}$ は曲線に対して D 点、 C 点で切線となっているのであるから、この二つの切線のなす角は、つまり BC 間の角度の変化であって、これは $B'B$ と $B'C$ のなす角であるから丁度頂点 B' の外角 $\lambda_{B'} \pi$ に等しいのである。

したがって B から曲線にそって C に至るまでは

$$\int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{\xi - \xi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda_{B'} \pi} \frac{d\psi}{\xi - \xi} \dots\dots\dots(2)$$

となり、他は直線に沿って

$$\frac{\lambda_A}{\xi - \xi_A} + \frac{\lambda_D}{\xi - \xi_D} \dots\dots\dots(3)$$

したがって

$$\frac{d}{d\xi} \left(\log \frac{dz}{d\xi} \right) = - \left[\frac{\lambda_A}{\xi - \xi_A} + \frac{\lambda_D}{\xi - \xi_D} + \int_0^{\lambda_{B'}} \frac{d\lambda}{\xi - \xi} \right] \dots\dots\dots(4)$$

$$\therefore \log \frac{dz}{d\xi} = \left[\log(\xi - \xi_A)^{-\lambda_A} + \log(\xi - \xi_D)^{-\lambda_D} - \int_{\xi}^{\lambda_{B'}} \frac{d\lambda}{\xi - \xi} d\xi \right] + A \dots\dots\dots(5)$$

ここに A : 積分常数

$$\left. \begin{aligned} \text{今} \quad \log M(\xi) &= \int_{\xi}^{\lambda_{B'}} \int_0^{\lambda_{B'}} \frac{d\lambda}{\xi - \xi} d\xi \\ \text{又は} \quad M(\xi) &= e^{\int_{\xi}^{\lambda_{B'}} \frac{d\lambda}{\xi - \xi} d\xi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

とおくと

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{C}{(\xi - \xi_A)^{\lambda_A} (\xi - \xi_D)^{\lambda_D} M(\xi)} = \frac{C}{M(\xi) \pi (\xi - \xi)^{\lambda}} \dots\dots\dots(7)$$

ここで曲線が円弧となる場合には、円弧が $\xi=0$ の対応点から初まるときは

$$\xi = \tan \frac{\psi}{2} \dots\dots\dots(8)$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore d\xi &= \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\psi}{2} d\psi \\ \therefore d\varphi &= \frac{2d\xi}{1 + \xi^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

また $\xi = \xi_D$ で $\varphi = \psi_0$, $\xi = \xi_C$ で $\psi = \lambda_{B'} \pi + \psi_0$ であるから

$$\left. \begin{aligned} \int_{\psi_0}^{\lambda_{B'} \pi + \psi_0} \frac{d\varphi}{\xi - \xi} &= \int_{\xi_D}^{\xi_C} \frac{2d\xi}{(\xi - \xi) (1 + \xi^2)} \\ &= 2 \int_{\xi_D}^{\xi_C} \left(\frac{A}{\xi - \xi} + \frac{B}{\xi - i} + \frac{C}{\xi + i} \right) d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

$$= 2 \left[A \log \frac{\xi_c - \zeta}{\xi_d - \zeta} + B \log \frac{\xi_c - i}{\xi_d - i} + C \log \frac{\xi_c + i}{\xi_d + i} \right]$$

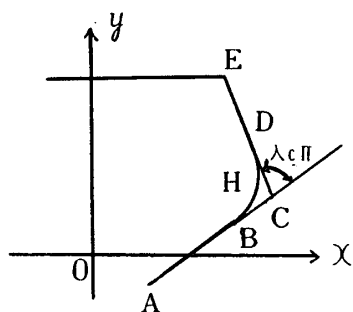
ただし $A = \frac{1}{\zeta^2 + 1}, B = \frac{1}{2i(i - \zeta)}, C = \frac{1}{2i(i + \zeta)}$

となる。

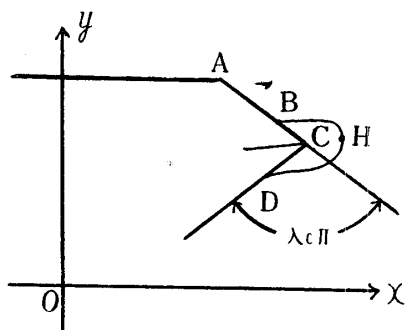
故に(10)式は第一項以外は ζ に関して分数式であるから容易に求められ、第一項は分数式と対数の積であるから、これを計算できるような形に工夫してやれば計算でき、したがって $M(\zeta)$ がわかり $\frac{dz}{d\zeta}$ が求められることとなる。

(2) 挿入法

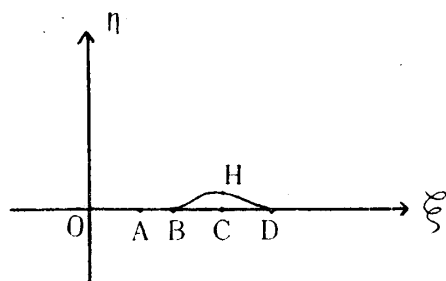
この方法は Schwarz-Christoffel 変換から全く解析的に誘導するもので常道ともいえるが、利用の方面から言うならば、かえって使用しにくいものであり、余り便利な方法とはいえない。



z-平面 (i)



z-平面 (ii)



ζ -平面

第 4 図

今第 4 図に示すように z -平面の C 点に丸味をつける場合、その丸味の曲線は先ずは考えないで各点の対応点を ζ -平面に Schwarz-Christoffel の写像によってその上半平面を z -平面上の多角形の内部に写像する。このとき ζ -平面上の BD 間に BHD で示したような曲線を仮想し、この曲線は BC 点で ξ 軸に接しているものとする、この曲線は z -平面上では BHD のような曲線となって写像せられるのである。すなわちこのように ζ -平面上に適当な母図形を選ぶことができる、 z -平面上では明らかに角を丸めることができるのである。この方法は C 点のみならず、いくつかの角に対して行うことができるのであり、この場合 ζ -平面と z -平面との間の変換は全く最初の Schwarz-Christoffel の変換で与えられ、さらに何らの修飾をも要しないのである。しかして、このような母図形をうるには、前記(1)でのべた方法の中で $\xi = \psi$ とし、そうした場合を z_1 -平面とする。そうして z_1 -平面に対して媒介平面を ζ_1 とすると、前記(1)の方法で

$$z_1 = f(\zeta_1) \dots \dots \dots (11)$$

の関係がえられ、 ζ_1 -平面の実軸が z_1 -平面上で丸味のある多角形となり、その曲線部は ζ_1 -平面の実軸の一部の写像である。この z_1 -平面の上に z -平面の \overline{AB} と \overline{ED} との延長の交点 C を求め、別に ζ -平面を考えて ζ -平面の上半を z_1 -平面上の $ABCDE$ の内部に

写像する。すなわち Schwarz-Christoffel の変換によって

$$z_1 = f(\zeta) \dots \dots \dots (12)$$

の関係から z_1 -平面上の丸味のある多角形は ζ -平面上で図に示すような曲線となるのである。すなわち ζ_1 -平面の実軸が ζ -平面上で一部彎曲せられて写像せられることになるのである。

これが今求める母図形である。そうしてこの母図形のある ζ -平面を媒介として、他の任意の問題に応用すればよいのである。しかしこの方法では頂角の中に丸味をつけることが出来ず、第4図 ii に示すように常に面分の内部に突出することになるのである。

(3) 微係数仮設法

Schwarz-Christoffel の変換によって ζ -平面の上半を z -平面上の多角形の内部に写像するような変換式を求めた場合、 ζ -平面上の実軸が多角形の周に対応することになる。この場合 $dz/d\zeta$ の値は、頂点に対応する ζ -平面上の点の値をいれたとき ∞ か 0 になるものであり、 0 でも ∞ でもないところが辺になっている。

すなわちこの性質を応用して、今 z -平面上に求める所の丸味をもった多角形を描き、そうして ζ -平面の上半がこの多角形の内部に写像されるものとして $dz/d\zeta$ の値を適当に定めると

$$\frac{dz}{d\zeta} = f(\zeta) = \tau \dots\dots\dots(13)$$

これを微係数面 τ -平面といって、この τ -平面上には微係数の値に応じて一つの図形が出来るわけである。

この図形は τ が ζ の関数であるから、 ζ -平面の一つの写像であることとなる。したがって z -

平面上の図形とも写像関係があることとなるから

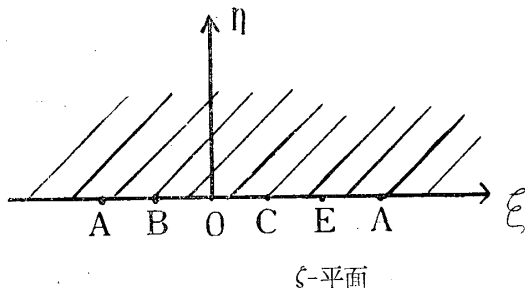
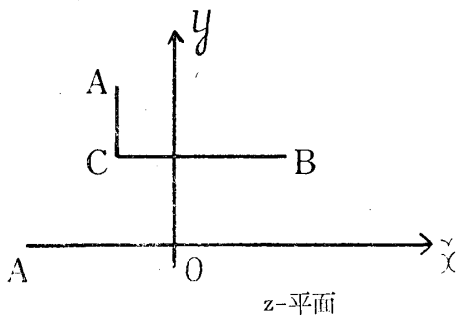
$$z = \int \tau d\zeta \dots\dots\dots(14)$$

こうして求めると問題は解決するのである。

(4) 重加法

この方法は同じ種類の変換を加え合わせて多角形の角を丸くすることを利用したもので、角を丸める方法としては、最も理解しやすく応用の範囲も広いのである。

今媒介平面 ζ の上半がある変換によって z -平面上の図形例えば第5図の z -平面に示した ABCA の内部のように写像せられるものとする。この図形は今求めようとする図形の中で角に丸味をつけないもの、すなわち普通に Schwarz-Christoffel 変換でえられた図形で、これは ζ -



第 5 図

平面との対応が各符号のようにになっているものとする。

次に ζ -平面の C 点に接近して E 点を取り、他の点 A, B などは元のままにして同じ形の変換を求めると、 z -平面上には相似の図形をつくることができる。この図形を $A'B'E'A'$ とすると、これら二つの図形を相加えればよい。そして加えたものを $1/2$ しておくのである。

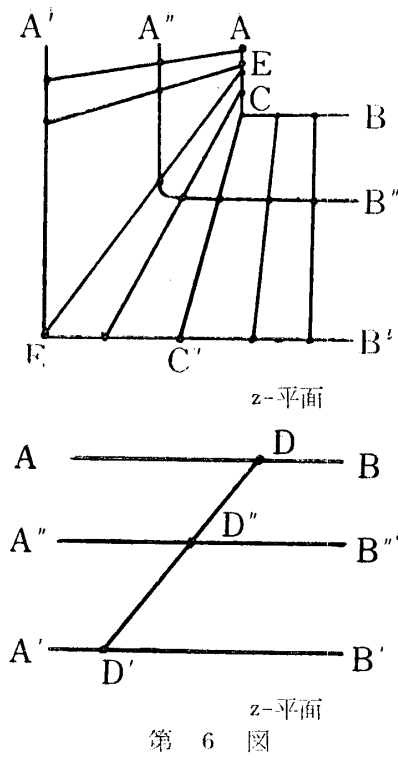
図形の和は

$$F = F_1 + F_2 \dots\dots\dots(15)$$

であり、その $1/2$ は

$$F_0 = 1/2(F_1 + F_2) \dots\dots\dots(16)$$

したがって第6図において F_1 を ADBBCA で表わし、 F_2 を A'D'B'B'E'A' で表わすとして各辺は平行とする。(F_1 と F_2 の位置の関係は一般には任意であるが、角を丸める方法である



第 6 図

から、ここでは初めから辺が平行なものとする。))

故に各対応点 A と A', B と B', C と C' を結ぶ直線の中点を求めてつなぐと A'D'B''B'A'' のようになる。このとき下の図のように AB と A'B' とが平行であると, AB 間の任意の点 D と, これに対応する A'B' 上の点 D' とを結ぶ直線の傾きは, AB 間の場所によって一様でなくても A'D'B'' はまた直線となるが, 上の図の BCA の部分では対応点を結ぶ直線の中点は各辺に平行とはならないところ出来る。

すなわち C 点に対応する B'E' 上の点を C' とし E' に対応する CA' 上の点を E とすると, C, C' 点をむすぶ直線から右の BB' を結ぶ直線までは BC と B'C' とは平行であるから中点を結ぶ線はまた辺に平行となる。しかし CE と C'E' とは平行でないから, この間では一つの曲線となる。また EA' と E'A' とは平行であるから中点を結ぶ線は A' までまた辺に平行となる。かくして一部分は角が丸味をもつこととなるのである。

こうして ζ-平面の上半を z-平面上の与えられた多角形の内部に写像するような変換の一つを求め, 次に多角形の頂点に対応する ζ-平面の実軸上の点から少しはなれた点を選んで再び同様な変換を行い, こうしてえられる二つの同種の図形を全く相重なるように定数を定めて相加えれば, 頂点の角はなくなって丸味がつくのである。

すなわち第 1 図形 F₁ に対する変換を

$$\frac{dz_1}{d\zeta} = C_1 \prod_{r=1}^n \frac{1}{(\zeta - \xi_r)^{\lambda_r}} \dots\dots\dots(17)$$

第 2 図形 F₂ に対する変換は

$$\frac{dz_2}{d\zeta} = C_2 \frac{1}{(\zeta - \xi_p + \alpha)^{\lambda_p}} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq p}}^n \frac{1}{(\zeta - \xi_r)^{\lambda_r}} \dots\dots\dots(18)$$

ただし (17) で角となる r = p 番目のものに丸味をつけようとするのである。

故に求める変換は

$$\frac{dz}{d\zeta} = C_1 \prod_{r=1}^n \frac{1}{(\zeta - \xi_r)^{\lambda_r}} + C_2 \frac{1}{(\zeta - \xi_p + \alpha)^{\lambda_p}} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq p}}^n \frac{1}{(\zeta - \xi_r)^{\lambda_r}} \dots\dots\dots(19)$$

$$= C_1 \left[\frac{1}{(\zeta - \xi_p)^{\lambda_p}} + \frac{\gamma}{(\zeta - \xi_p + \alpha)^{\lambda_p}} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq p}}^n \frac{1}{(\zeta - \xi_r)^{\lambda_r}} \right] \dots\dots\dots(20)$$

$$\text{ただし } \gamma = C_2 / C_1$$

この式は丸味をつける角が一つの場合であるが m 個の角に丸味をつける場合には p = 1, 2, ..., p = m の添字で表わすと, 一般に次の変換が与えられる。

$$\frac{dz}{d\zeta} = C_1 \left[\prod_{\rho=1}^m \frac{1}{(\zeta - \xi_\rho)^{\lambda_\rho}} + \gamma \prod_{\rho=1}^m \frac{1}{(\zeta - \xi_\rho + \alpha_\rho)^{\lambda_\rho}} \right] \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq p}}^n \frac{1}{(\zeta - \xi_r)^{\lambda_r}} \dots\dots\dots(21)$$

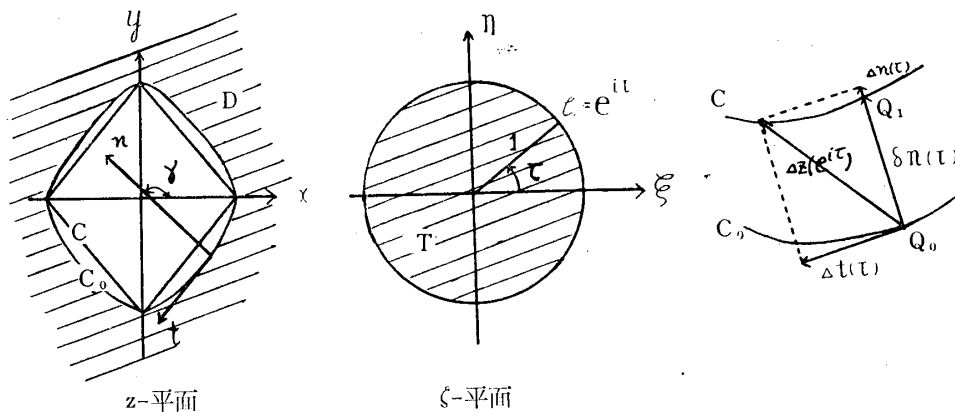
この式で p は丸味をつける角, r は丸味をつけない角を順番に与えるものである。

現在用いられている方法は大体上述の方法であるが、これは何れも z -平面を ζ -平面の上半面に写像する場合である。しかし不連続個所をもつような任意形状の領域を写像することによって平面応力問題を解こうというときは、さらにこの ζ -平面の上半を w -平面の半円又は円に写像して解かねばならない。したがってこういう場合には、 ζ -平面の上半平面に写像するより、この上半平面をさらに円に写像することとして、直接に z -平面を ζ -平面の単位円内に写像する方が平面応力問題をとく方法としてはよい。そこで今後は ζ -平面の単位円内に写像する方法をとって考えることとする。

(5) 任意形状領域を単位円に写像する逐次近似法

これは z -平面の任意の形状を ζ -平面の単位円に写像するのであって、とくに隅を丸めた部分を写像するものではないが、この一般の方法から直ちに応用できるものであるのでここでのべる。

先ず何らかの方法によって、 z -平面の任意の形状を ζ -平面の単位円に写像する近似写像関数を求め、これに対する境界線 C_0 をかき、逐次近似の度を高めて、任意の形状—ここでは隅を丸めた形状を写像するようにするわけである。



第 7 図

すなわち、こうして近似度を高めて z -平面内の曲線 C にかこまれた領域 D を ζ 平面内の単位円 $|\zeta|=1$ の内部 T に写像する関数 $z=z(\zeta)$ を求めるのである。

そこで先ず求めた近似写像関数 $z_0(\zeta)$ による z -平面の C_0 から

$$\Delta z(\zeta) = z(\zeta) - z_0(\zeta) \tag{22}$$

を考える

C_0 および C 上の $\zeta = e^{i\tau}$ の対応点をそれぞれ Q_0, Q として $\overrightarrow{QQ_0}$ の Q_0 における C_0 方向および切線方向の成分をそれぞれ $\Delta n(\tau), \Delta t(\tau)$ とすると

$$\left. \begin{aligned} \Delta n(\tau) + i \Delta t(\tau) &= \Delta z(e^{i\tau}) e^{-i\tau} \\ e^{i\tau} &= \frac{z_0'(\zeta) \cdot \zeta}{|z_0'(\zeta)|}, \quad \zeta = e^{i\tau} \end{aligned} \right\} \tag{23}$$

故に

$$\frac{\Delta z(\zeta)}{z'(\zeta) \cdot \zeta} = \frac{\Delta n(\tau)}{|z_0'(\zeta)|} + i \frac{\Delta t(\tau)}{|z_0'(\zeta)|}, \quad \zeta = e^{i\tau} \tag{24}$$

$\Delta n(\tau)$ は未知であるが、今 Q_0 における C_0 の法線 (実際の作図には C の法線を用いても大差ない) の C と C_0 との間の部分 Q_0Q を $\delta n(\tau)$ とすると、これは既知で

$$\Delta n(\tau) \approx \delta n(\tau) \tag{25}$$

である。したがって $\Delta z(\zeta)/z'_0(\zeta) \cdot \zeta$ が T 内で正則であるから $\delta n(\tau)/|z'_0(e^{i\tau})|$ を調和分析することにより $\Delta z(\zeta)$ の近似値 $\delta z(\zeta)$ が求まる。もし必要となるときは、以上の操作をくりかえすと、極めて早く収斂する。

こうして計算した

$$z = z_0(\zeta) + \delta z(\zeta) \quad \dots\dots\dots(26)$$

が所要の精度をもつ求める写像関数であることを確かめるには、求まった $\delta z(\zeta)$ の級数の $\zeta = e^{i\tau}$ における値を計算して

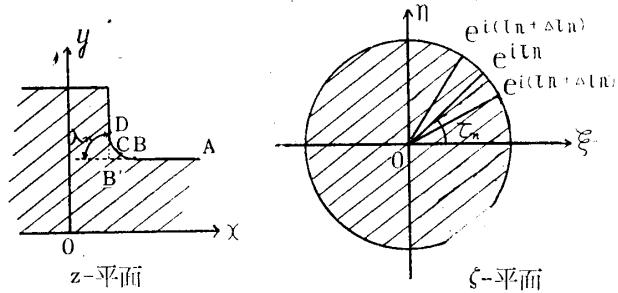
$$z = z_0(e^{i\tau}) + \delta z(e^{i\tau}) \quad \dots\dots\dots(27)$$

を求め、 τ が 0 から 2π まで変化するにつれてこれが所要の精度で支えられた曲線 C 上を連続に途中で向きをかえることなく、常に切線 t の正の向きに一週することを確かめればよい。

この方法によって第 1 図のような不連続個所をもつ場合も逐次近似法によって、 ζ -平面内の単位円に写像して平面応力問題を取扱うことができるわけである。

(6) 重みを考慮した重加法。その 1

(4)にのべた重加法は角を丸めた曲線部の端で曲率が無限大となり不都合となる。そこでこれを修正して重み $C(t')$ をつけて、無数に多くを加え合わせた積分の形にすると、 $C(t')$ を適当にとることによって、曲線部の形を自由にかえることができる。すなわち z -平面の角を丸めた多角形を ζ -平面の単位円内 $|\zeta| < 1$ に写像する写像関数として



第 8 図

$$z(\zeta) = \int_{-1}^{+1} dt' C(t') C_1 \int_{\zeta}^{\zeta} \prod_{n=1}^N \left\{ \zeta - e^{i(\tau_n + \Delta\tau_n t')} \right\}^{\mu_n - 1} d\zeta + C_0 \quad \dots\dots\dots(28)$$

$$\text{ただし } \int_{-1}^{+1} C(t') dt' = 1$$

ここで $\mu_n = 1 - \frac{\lambda_n}{\pi}$, λ_n は図に示す外角で凹角のときは負となる。

今角の円弧が辺に比べて充分に小さくて、 $\Delta\tau_n \ll 1$ とすると、このときは

$$\zeta = -e^{i\tau_n} \frac{w-i}{w+i} \quad \dots\dots\dots(29)$$

で $|\zeta| < 1$ を w 平面の上半に写像して

$$\zeta = e^{i(\tau_n + \Delta\tau_n t)} - 1 < t < 1 \quad \dots\dots\dots(30)$$

の部分の曲率 $1/\rho_n$ を次のようにして求めることができる。

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{|C_n \prod_{n \neq m} \tan \frac{\tau_m - \tau_n}{2}|^{\mu_m - 1} \left(\frac{\Delta\tau_n}{2}\right)^{\mu_n} \int_{-1}^{+1} (t-t')^{\mu_n - 2} C(t') dt} \int_{-1}^{+1} (t-t')^{\mu_n - 1} C(t') dt \quad \dots\dots\dots(31)$$

これから与えられた μ_n に対し $t(-1, 1)$ にて $\frac{1}{\rho_n}$ をほぼ一定にする。すなわち曲線の形をほぼ円弧にする $C(t')$ をえらび出すことができる。そうして、この曲率半径の大きさから $\Delta\tau_n$ が定まるのである。

(7) 重みを考慮した重加法。その2

さらに上述の方法から γ を図に示すように曲線の法線と x 軸とのなす角とすると、写像関数は

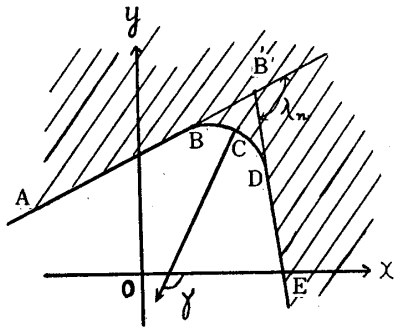
$$\left. \begin{aligned}
 z(\delta) &= \int C_1 e^{-\sum_{n=1}^N \int_{\lambda_B}^{\lambda_D} \log\{\zeta - e^{i\tau(\gamma)}\} \frac{d\gamma}{\pi} d\zeta + C_0 \\
 &= \int C_1 e^{\sum_{n=1}^N \int_{-1}^{+1} \log\{\zeta - e^{i(\tau_n + \Delta\tau_n t')}\} a_n(t') dt'} d\zeta + C_0 \\
 \text{ただし } \tau(\gamma) &= \tau_n + \Delta\tau_n t \\
 a_n(t') &= -\frac{\Delta\tau_n}{\pi} \frac{1}{\rho_n} \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| \\
 \int_{-1}^{+1} a_n(t') dt' &= -\frac{\lambda_n}{\pi} = \mu_n - 1
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

$|\Delta\tau| \ll 1$ のときは前同様に w 平面に写像して次の式をうる。例えば曲線部が円弧になるように $a_n(t)$ をきめるには、 ρ_n を一定とし

$$a_n(t) = a_{n,0} + a_{n,2}t^2 + \dots\dots\dots(33)$$

とおいて代入展開して $a_{n,0}, a_{n,2} \dots$ を求める。(6), (7)の方法は何れの場合も応力計算には写像関数は $\zeta=0$ の周りに展開した形で使用するから (28), (32) の積分の計算はこの形で行うとよい。

こうして角を丸めた z -平面の領域 D を ζ -平面の単位円 $|\zeta| < 1$ の T に写像する写像関数 $z=z(\zeta)$ を求めることができる。したがってこれらの領域 D に



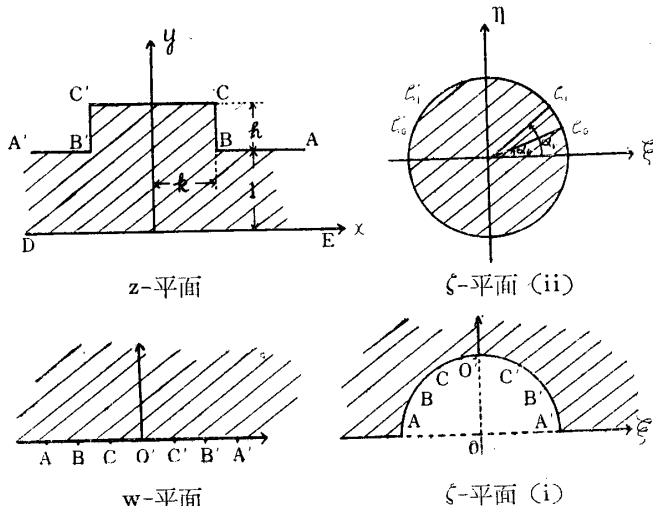
第 9 図

における境界値問題は、これを写像面の単位円内の領域 T において考えると、 D の境界曲線上の境界条件を単位円 K 上において考えることができ、甚だ簡単となる。

3. 例 題

隅の角を丸めた不連続個所の平面応力問題を取扱うときの写像関数の求め方は、上のように理論的にはいろんな方法があるが、要は数値計算の最も簡単にできる方法が望ましい。ところが

数値計算のできるのは、それに反して級数の収斂が総じてよくない。といって数値計算の困難なものは、具体的の検討が出来ないうらみがある。そこで、ここでは (1) の方法で z -平面を先ず半平面に写像し、次に半平面から ζ -平面の単位円に写像する方法をとって計算してみる。ところが半平面から単位円に写像する写像関数は $w=e^{i\tau}$ であるから、 z -平面上の関数を $z=e^{i\tau}$ とおくことによって直接 z -平面を単位円に写像することとなる。



第 10 図

(1) 第10図の z -平面の形や、逆に引っこんでいる場合は、既に太田博士、半田孝男の両氏および筆者などによって楕円関数を用いることによって、 z -平面を w -平面の上半に写像し、さらに w -平面を ζ -平面(i)の実軸上の半円に写像することで理論的には解けている。

しかしこの方法は数値計算が極めて困難であったので、ここでは上のべた(あとでB点、B'点に丸味をつける) Schwarz-Christoffel の一般方法で写像関数を求めて、具体的に計算してみる。

z -平面を ζ -平面上の単位円に写像すると

$$\frac{d}{d\zeta} \log\left(\frac{dz}{d\zeta}\right) = -\sum_i \frac{\lambda_i}{\zeta - \zeta_i} \quad \dots\dots\dots(34)$$

$$\therefore \frac{dz}{d\zeta} = \frac{C}{1-\zeta^2} \left\{ \frac{(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_0')}{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_1')} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots(35)$$

ここで

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= e^{i\alpha_0}, & \zeta_0' &= e^{i(\pi - \alpha_0)} = -e^{-i\alpha_0} \\ \zeta_1 &= e^{i\alpha_1}, & \zeta_1' &= e^{i(\pi - \alpha_1)} = -e^{-i\alpha_1} \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{C}{1-\zeta^2} e^{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n} \quad \dots\dots\dots(36)$$

ただし

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} (\cos n\alpha_1 - \cos n\alpha_0), & n: & \text{偶数} \\ &= \frac{i}{n} (\sin n\alpha_0 - \sin n\alpha_1), & n: & \text{奇数} \end{aligned}$$

そこで $e^{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n}$ を ζ のべき級数に展開すると

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{C}{1-\zeta^2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n \quad \dots\dots\dots(37)$$

ただし $b_0=1$, $b_n: a_1, a_2, \dots$ の関数

したがって

$$\frac{dz}{d\zeta} = C \sum_{n=0}^{\infty} C_n \zeta^n \quad \dots\dots\dots(38)$$

ただし $C_0=1$

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{0,2,\dots,n}^{\infty} b_n, & n: & \text{偶数} \\ &= \sum_{1,3,\dots,n}^{\infty} b_n, & n: & \text{奇数} \end{aligned}$$

故に

$$z = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n+1} \zeta^{n+1} = C \sum_{n=0}^{\infty} d_n \zeta^{n+1} \quad \dots\dots\dots(39)$$

ただし $d_0=1$

常数 C を決定するには

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 = i &= \lim_{\zeta \rightarrow -1} C \int_{-0}^{+0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n}{1-\zeta^2} d\zeta = \lim_{\zeta \rightarrow -1} \frac{C}{2} \int_{-0_n=0}^{+0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n \left(\frac{1}{1-\zeta} + \frac{1}{1+\zeta} \right) d\zeta \\ &= \frac{C}{2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \pi i \end{aligned}$$

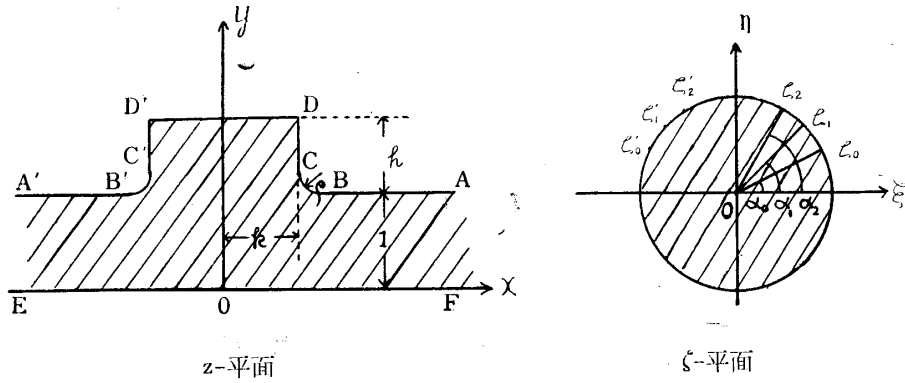
したがって

$$c = \frac{2}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n \pi} \dots\dots\dots(40)$$

故に (39) より

$$\left. \begin{aligned} k &= R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{b_n \pi} d_n e^{i(n+1)\alpha_0} \\ 1+h &= I_m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{b \pi} d_n e^{i(n+1)\alpha_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(41)$$

これから α_0, α_1 が理論的に原理的には求まる。すなわち α_0, α_1 が h, k の関数として求まるが一般には困難であるから α_0, α_1 に適当な値を代入して h, k を求めるとよい。



第 11 図

(2) 隅を丸めた場合

丸みをおびた部分について考え、あとで他のところは前の分を加えればよい。

すなわち

$$\zeta(\lambda) = e^{i(k\lambda+c)} \dots\dots\dots(42)$$

ただし $\pi\lambda$: z -平面の多角形の外角

として B を ζ_0, C を ζ_1, C' を $\pi-\zeta_1, B'$ を $\pi-\zeta_0$ に対応させると

$$e^{i(k+c)} = e^{ia_0}, \quad e^{i(\frac{k}{2}+c)} = e^{ia_1}$$

$$\therefore k = 2(\alpha_0 - \alpha_1), \quad C = 2\alpha_1 - \alpha_0$$

また $e^{i(\frac{3}{2}k+c)} = e^{i(\pi-\alpha_1)}, \quad e^{i(k+c)} = e^{i(\pi-\alpha_0)}$

$$\therefore k = 2(\alpha_0 - \alpha_1), \quad C = \pi + 2\alpha_1 - 3\alpha_0$$

したがって

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\zeta} \log \frac{dz}{d\zeta} &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{d\lambda}{\zeta - e^{i(2\alpha_0 - \alpha_1)} e^{ik\lambda}} + \int_{\frac{3}{2}}^1 \frac{d\lambda}{\zeta + e^{i(2\alpha_1 - 3\alpha_0)} e^{ik\lambda}} \\ &= -\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2(\alpha_0 - \alpha_1)} \log \frac{(\zeta - e^{ia_0})(\zeta + e^{-ia_1})}{(\zeta - e^{ia_1})(\zeta + e^{-ia_0})} \\ &= -\frac{1}{\zeta} + \frac{2i(\alpha_0 - \alpha_1)}{2i\zeta(\alpha_0 - \alpha_1)} \left[\log(1 - e^{-ia_0}\zeta) + \log(1 + e^{ia_1}\zeta) - \log(1 - e^{-ia_1}\zeta) \right. \\ &\quad \left. - \log(1 + e^{ia_0}\zeta) \right] \times \frac{1}{2i(\alpha_0 - \alpha_1)} \\ \therefore \frac{d}{d\zeta} \log \frac{dz}{d\zeta} &= \frac{1}{2(\alpha_0 - \alpha_1)} i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n'}{n} \zeta^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n''}{n} \zeta^{n-1} \dots\dots\dots(43) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} a_n' &= e^{-in\alpha_0} + (-1)^{n+1} e^{in\alpha_0} - e^{in\alpha_1} - (-1)^{n+1} e^{in\alpha_1} \\ &= \cos n\alpha_0 \{1 + (-1)^{n+1}\} - i \sin n\alpha_0 \{1 - (-1)^{n+1}\} \\ &\quad - \cos n\alpha_1 \{1 + (-1)^{n+1}\} + i \sin n\alpha_1 \{1 - (-1)^{n+1}\} \\ &= \{1 + (-1)^{n+1}\} (\cos n\alpha_0 - \cos n\alpha_1) \\ &\quad - i \{1 - (-1)^{n+1}\} (\sin n\alpha_0 - \sin n\alpha_1) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} a_n'' &= 2i (\sin n\alpha_0 - \sin n\alpha_1) \times \frac{i}{2(\alpha_1 - \alpha_0)} \\ &= \frac{\sin n\alpha_0 - \sin n\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0}, \quad n: \text{偶数} \end{aligned}$$

又は

$$\begin{aligned} &= 2(\cos n\alpha_0 - \cos n\alpha_1) \times \frac{i}{2(\alpha_1 - \alpha_0)} \\ &= \frac{i(\cos n\alpha_0 - \cos n\alpha_1)}{\alpha_1 - \alpha_0}, \quad n: \text{奇数} \end{aligned}$$

故に

$$\log \frac{dz}{d\xi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n''}{n^2} \xi^n \dots\dots\dots (44)$$

したがって前の結果と加えあわせると

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{C}{1-\xi^2} e^{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi^n} \dots\dots\dots (45)$$

ここで

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} \cos n\alpha_2 + \frac{1}{n^2} \frac{\sin n\alpha_0 - \sin n\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0}, \quad n: \text{偶数} \\ &= \frac{-i}{n} \sin n\alpha_2 + \frac{i}{n^2} \frac{\cos n\alpha_0 - \cos n\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0}, \quad n: \text{奇数} \end{aligned}$$

となる。

いま $\alpha_1 = \alpha_0$ の場合を考えると

$$\sin n\alpha_0 - \sin n\alpha_1 = -2 \sin \frac{n}{2} (\alpha_1 - \alpha_0) \cos \frac{n}{2} (\alpha_1 + \alpha_0) = n(\alpha_1 - \alpha_0) \cos n\alpha_0$$

$$\cos n\alpha_0 - \cos n\alpha_1 = 2 \sin \frac{n}{2} (\alpha_1 - \alpha_0) \sin \frac{n}{2} (\alpha_1 + \alpha_0) = n(\alpha_1 - \alpha_0) \sin n\alpha_0$$

故に

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} \cos n\alpha_2 + \frac{1}{n^2} \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_0)} \left\{ \frac{n}{2} (\alpha_1 - \alpha_0) \cos n\alpha_0 \right\} = \frac{1}{n} (\cos n\alpha_2 - \cos n\alpha_0) \\ &\quad, \quad n: \text{偶数} \\ &= \frac{-i}{n} \sin n\alpha_2 + \frac{i}{n^2} \frac{n(\alpha_1 - \alpha_0)}{\alpha_1 - \alpha_0} \sin n\alpha_0 = \frac{i}{n} (\sin n\alpha_0 - \sin n\alpha_2), \quad n: \text{奇数} \end{aligned}$$

したがって $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$ とすると前の(36)の結果と一致し、隅に丸みのない角のある場合となる。

故に

$$z = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C}{n+1} \cdot \xi^{n+1} = C \sum_{n=0}^{\infty} d_n \xi^{n+1} \dots\dots\dots (46)$$

$$C = \frac{2}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \pi}$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} k + \rho &= R C \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{i(n+1)a_0} \\ 1 + \rho &= I_m C \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{i(n+1)a_1} \\ 1 + h &= I_m C \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{i(n+1)a_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(47)$$

となる。

こうして不連続個所を有する平面問題の根本となる写像関数は初等的な三角級数によって、簡単に支えられることになる。

4. 数 値 計 算

上の簡単な関係によって数値計算するわけであるが、一番問題となるのは $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n$ を無限べき級数に展開することである。すなわち

$$\begin{aligned} e^{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n} &= e^{a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + a_3 \zeta^3 + a_4 \zeta^4 + \dots\dots\dots} \\ &= e^{a_1 \zeta} e^{a_2 \zeta^2} e^{a_3 \zeta^3} e^{a_4 \zeta^4} \dots\dots\dots \end{aligned}$$

となり、たとえば

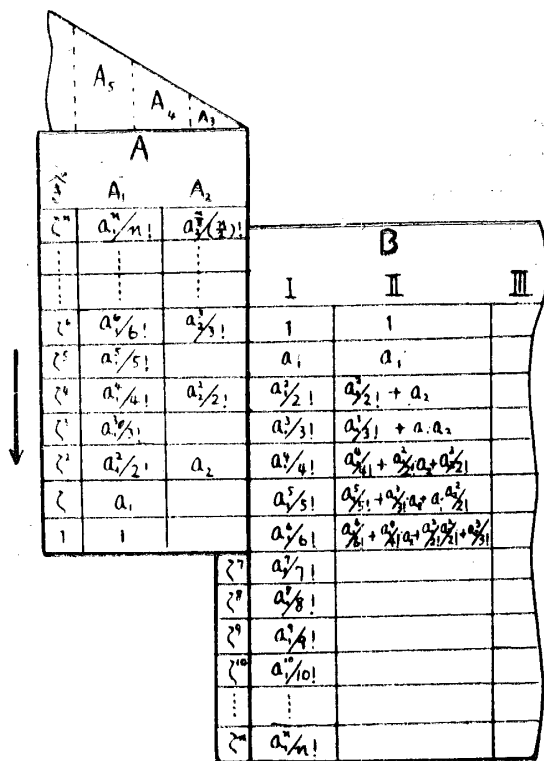
$$e^{a_1 \zeta} = 1 + a_1 \zeta + \frac{a_1^2}{2!} \zeta^2 + \frac{a_1^3}{3!} \zeta^3 + \frac{a_1^4}{4!} \zeta^4 + \dots\dots\dots$$

となって、こういう無限べき級数をまた無限個（数値計算であるから有限個で切るわけであるが、それにしても収斂がわるいから40~50項はとる）かけ合わせねばならないから相当の手数がかかる。そこで

$$\begin{aligned} &e^{a_1 \zeta} e^{a_2 \zeta^2} e^{a_3 \zeta^3} e^{a_4 \zeta^4} \dots\dots\dots \\ &= (1 + a_1 \zeta + \frac{a_1^2}{2!} \zeta^2 + \frac{a_1^3}{3!} \zeta^3 + \frac{a_1^4}{4!} \zeta^4 + \frac{a_1^5}{5!} \zeta^5 + \dots\dots\dots) (1 + a_2 \zeta^2 + \frac{a_2^2}{2!} \zeta^4 + \frac{a_2^3}{3!} \zeta^6 + \frac{a_2^4}{4!} \zeta^8 + \dots\dots\dots) \dots \\ &= \left[1 + a_1 \zeta + (\frac{a_1^2}{2!} + a_2) \zeta^2 + (\frac{a_1^3}{3!} + a_1 a_2) \zeta^3 + (\frac{a_1^4}{4!} + \frac{a_1^2}{2!} a_2 + \frac{a_2^2}{2!}) \zeta^4 + (\frac{a_1^5}{5!} + \frac{a_1^3}{3!} a_2 \right. \\ &\quad \left. + a_1 \frac{a_2^2}{2!}) \zeta^5 + \dots\dots\dots \right] \dots\dots\dots \\ &= \left[1 + B_1 \zeta + B_2 \zeta^2 + B_3 \zeta^3 + B_4 \zeta^4 + B_5 \zeta^5 + \dots\dots \right] (1 + a_3 \zeta^3 + \frac{a_3^2}{2!} \zeta^6 + \frac{a_3^3}{3!} \zeta^9 + \dots\dots\dots) \dots\dots\dots \\ &= \left[1 + B_1 \zeta + B_2 \zeta^2 + (B_3 + a_3) \zeta^3 + (B_4 + B_1 a_3) \zeta^4 + (B_5 + B_2 a_3) \zeta^5 \right. \\ &\quad \left. + (B_6 + B_3 a_3 + \frac{a_3^2}{2!}) \zeta^6 + \dots\dots \right] \dots\dots\dots \end{aligned}$$

であるから第12図の如くA紙、B紙の二枚の計算用紙をつくり、A紙には下から1, ζ , ζ^2 , ζ^3 , ζ^4 , ζ^5 , ……と順序にA₁欄には1, a_1 , $\frac{a_1^2}{2!}$, $\frac{a_1^3}{3!}$, $\frac{a_1^4}{4!}$, $\frac{a_1^5}{5!}$, ……とかき入れ、A₂欄には0, 0, a_2 , 0, $\frac{a_2^2}{2!}$, 0, $\frac{a_2^3}{3!}$, 0, $\frac{a_2^4}{4!}$, 0 ……という風にかき入れる。ここで0はかき入れずとも白紙のままでよい。こうして次のA₃欄には ζ^3 , ζ^6 , ζ^9 ……の段に a_3 , $\frac{a_3^2}{2!}$, $\frac{a_3^3}{3!}$ ……をA₄欄には

$\zeta^4, \zeta^8, \zeta^{12}, \dots$ の段に $a_4, \frac{a_4^2}{2!}, \frac{a_4^3}{3!}, \dots$ とつぎつぎにかきこむ。



第 12 図

の横にそれらの和 $a_1^3/3! + a_1 a_2$ とかく。

またA紙をずらして、こんどは A₁欄の a_2 をB紙第1欄の $a_1^2/2!$ の横において同じように計算を行うと ζ^4 の係数として $a_2 \times \frac{a_1^2}{2!}$, および第1段の $a_1^2/2! \times 1 = a_2^2/2!$ と ζ^4 の段の $a_1^4/4!$ の和すなわち $a_1^4/4! + \frac{a_1^2}{2} a_2 + \frac{a_2^2}{2!}$ とかきこむ。このようにして順次A紙をずらして計算を行うと、とるべき“べき”まで容易にとれる。その欄がすむと、つぎは $(e^{a_1 \zeta} e^{a_2 \zeta^2}) \times e^{a_3 \zeta^3}$ の計算をA紙の A₃欄 ($\zeta^3, \zeta^6, \zeta^9, \dots$ の段にそれらの係数として $a_3, a_3^2/2!, a_3^3/3!, \dots$ がかいてある) と今計算したB紙第II欄とを上と同様ならべて、ずらせながら計算してゆくのである。

このようにすれば機械的に $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n$ を40乗でも50乗でも計算機によって計算を行うことができるわけであり、無限級数の積は機械的に運算される。(同様にして無限級数の商も出来る。)

(1) 隅に角のある場合。

まず a_n を求め、しかる後 $e^{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n}$ に展開した b_n を求めて $C_n/n+1 = d_n$ を計算したのが第1表である。ここでは

$$\alpha_0 = 30^\circ \qquad \alpha_1 = 60^\circ$$

としてある。そうして (41) の関係から k, h を計算すると

$$k = 0.6503$$

$$h = 0.4123$$

となる。ただしここでは第40項までとってある。

つぎにB紙上には上から「べき」の欄に 1, $\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \zeta^5, \dots$ とかき入れ、次の第1欄にその横に $1, a_1, \frac{a_1^2}{2!}, \frac{a_1^3}{3!}, \frac{a_1^4}{4!}, \dots$ とかきこむ。これで準備がおわり、いよいよ計算にとりかかるわけである。

まず第一段階として $e^{a_1 \zeta} \times e^{a_2 \zeta^2}$ の計算にはA紙の A₂欄の $e^{a_2 \zeta^2}$ の係数の最下段の a_2 をB紙の第1欄の最上段の1にならべる。そうして $a_2 \times 1$ のかけ算を行うと $a_2 \times 1 = a_2$ は ζ^2 の係数であるから第1欄の ζ^2 の係数の段、すなわち $a_1^2/2!$ の横にそれらの和 $a_1^2/2! + a_2$ とかきこむ。その上の1および ζ の係数の段には第1欄の 1, a_1 をそのままかきこめばよいわけである。

つぎにA紙をずらして、A₂欄の a_2 をB紙第1欄の第2段の a_1 にならべて、かけ算を行うと $a_2 \times a_1 = a_1 a_2$ は ζ^3 の係数であるから、第1欄の ζ^3 の係数の段すなわち $a_1^3/3!$

第 1 表

	a_n	b_n		$C_n/n+1=d_n$	
		b_0	+1	d_0	+1
a_1	-0.366 025 <i>i</i>	b_1	-0.366 025 <i>i</i>	d_1	-0.188 013 <i>i</i>
a_2	-0.500 000	b_2	-0.566 987	d_2	+0.144 338
a_3	+0.333 333 <i>i</i>	b_3	+0.524 519 <i>i</i>	d_3	+0.039 624 <i>i</i>
a_4	0	b_4	+0.281 250	d_4	+0.142 853
a_5	+0.273 205 <i>i</i>	b_5	+0.034 315 <i>i</i>	d_5	+0.034 269 <i>i</i>
a_6	+0.333 333	b_6	+0.284 465	d_6	+0.142 295
a_7	-0.195 147 <i>i</i>	b_7	-0.389 968 <i>i</i>	d_7	-0.024 645 <i>i</i>
a_8	0	b_8	-0.351 497	d_8	+0.071 915
a_9	-0.111 111 <i>i</i>	b_9	+0.223 476 <i>i</i>	d_9	+0.022 632 <i>i</i>
a_{10}	-0.100 000	b_{10}	+0.068 900	d_{10}	+0.065 103
a_{11}	+0.033 275 <i>i</i>	b_{11}	+0.070 172 <i>i</i>	d_{11}	+0.088 041 <i>i</i>
a_{12}	0	b_{12}	+0.175 612	d_{12}	+0.068 673
a_{13}	-0.028 156 <i>i</i>	b_{13}	-0.237 962 <i>i</i>	d_{13}	-0.010 105 <i>i</i>
a_{14}	-0.071 429	b_{14}	-0.246 194	d_{14}	+0.043 103
a_{15}	+0.066 667 <i>i</i>	b_{15}	+0.191 163 <i>i</i>	d_{15}	+0.003 106 <i>i</i>
a_{16}	0	b_{16}	+0.083 710	d_{16}	+0.042 956
a_{17}	+0.080 354 <i>i</i>	b_{17}	+0.049 126 <i>i</i>	d_{17}	+0.005 490 <i>i</i>
a_{18}	+0.111 111	b_{18}	+0.163 371	d_{18}	+0.046 928
a_{19}	-0.071 897 <i>i</i>	b_{19}	-0.222 889 <i>i</i>	d_{19}	-0.006 204 <i>i</i>
a_{20}	0	b_{20}	-0.203 310	d_{20}	+0.032 777
a_{21}	-0.047 619 <i>i</i>	b_{21}	-0.147 096 <i>i</i>	d_{21}	+0.001 047 <i>i</i>
a_{22}	-0.045 455	b_{22}	+0.050 914	d_{22}	+0.032 141
a_{23}	+0.015 914 <i>i</i>	b_{23}	+0.039 448 <i>i</i>	d_{23}	+0.002 561 <i>i</i>
a_{24}	0	b_{24}	+0.131 205	d_{24}	+0.034 818
a_{25}	-0.014 641 <i>i</i>	b_{25}	-0.178 578 <i>i</i>	d_{25}	-0.004 504 <i>i</i>
a_{26}	-0.038 462	b_{26}	-0.191 997	d_{26}	+0.025 127
a_{27}	+0.037 037 <i>i</i>	b_{27}	+0.138 192 <i>i</i>	d_{27}	+0.000 753 <i>i</i>
a_{28}	0	b_{28}	+0.056 568	d_{28}	+0.025 345
a_{29}	+0.047 112 <i>i</i>	b_{29}	+0.041 544 <i>i</i>	d_{29}	+0.002 088 <i>i</i>
a_{30}	+0.066 667	b_{30}	+0.125 957	d_{30}	+0.027 773
a_{31}	-0.044 065 <i>i</i>	b_{31}	-0.171 547 <i>i</i>	d_{31}	-0.003 404 <i>i</i>
a_{32}	0	b_{32}	-0.167 064	d_{32}	+0.021 027
a_{33}	-0.030 303 <i>i</i>	b_{33}	+0.117 744	d_{33}	+0.000 260 <i>i</i>
a_{34}	-0.029 412	b_{34}	+0.040 761	d_{34}	+0.020 990
a_{35}	+0.010 458 <i>i</i>	b_{35}	+0.033 611 <i>i</i>	d_{35}	+0.001 179 <i>i</i>
a_{36}	0	b_{36}	+0.106 941	d_{36}	+0.022 746
a_{37}	-0.009 893 <i>i</i>	b_{37}	-0.148 123 <i>i</i>	d_{37}	-0.022 781 <i>i</i>
a_{38}	-0.026 316	b_{38}	-0.150 148	d_{38}	+0.017 730
a_{39}	+0.025 641 <i>i</i>	b_{39}	+0.112 583 <i>i</i>	d_{39}	+0.000 172 <i>i</i>
a_{40}	0	b_{40}	+0.046 826	d_{40}	+0.018 007
		$\sum_{n=0}^{40} b_n = 0.738283 + 0.006897i$			

第 2 表

	a_n	b_n		$Cn/n+1=d_n$	
		b_0	+1	d_0	+1
a_1	-0.259 002i	b_1	-0.259 004i	d_1	-0.129 502i
a_2	-0.377 937	b_2	-0.411 478	d_2	+0.196 174
a_3	+0.300 106i	b_3	+0.400 887i	d_3	+0.035 471i
a_4	+0.081 749	b_4	+0.243 758	d_4	+0.166 456
a_5	+0.148 924i	b_5	-0.015 437i	d_5	+0.021 091i
a_6	+0.272 770	b_6	+0.190 788	d_6	+0.146 153
a_7	-0.246 349i	b_7	-0.306 126i	d_7	-0.022 472i
a_8	-0.114 187	b_8	-0.308 195	d_8	+0.079 430
a_9	-0.033 345i	b_9	+0.218 572i	d_9	+0.003 906i
a_{10}	-0.121 277	b_{10}	+0.058 719	d_{10}	+0.070 327
a_{11}	+0.128 391i	b_{11}	+0.095 927i	d_{11}	+0.011 235i
a_{12}	+0.083 333	b_{12}	+0.210 398	d_{12}	+0.075 692
a_{13}	-0.021 061i	b_{13}	-0.260 132i	d_{13}	-0.008 958i
a_{14}	+0.000 652	b_{14}	-0.238 445	d_{14}	+0.049 697
a_{15}	-0.012 004i	b_{15}	+0.156 431i	d_{15}	+0.001 955i
a_{16}	-0.018 328	b_{16}	+0.037 059	d_{16}	+0.046 036
a_{17}	+0.030 151i	b_{17}	+0.086 801i	d_{17}	+0.005 552i
a_{18}	+0.043 767	b_{18}	+0.18 1579	d_{18}	+0.050 746
a_{19}	-0.047 262i	b_{19}	-0.222 104i	d_{19}	-0.005 195i
a_{20}	-0.033 270	b_{20}	-0.198 776	d_{20}	+0.036 399
a_{21}	+0.006 125i	b_{21}	+0.124 622i	d_{21}	+0.000 932i
a_{22}	-0.021 660	b_{22}	+0.020 928	d_{22}	+0.034 145
a_{23}	+0.038 800i	b_{23}	+0.082 254i	d_{23}	+0.004 280i
a_{24}	+0.041 667	b_{24}	+0.159 200	d_{24}	+0.037 781
a_{25}	-0.033 670i	b_{25}	-0.192 624i	d_{25}	-0.003 458i
a_{26}	-0.019 992	b_{26}	-0.173 972	d_{26}	+0.028 539
a_{27}	+0.003 705i	b_{27}	+0.110 631i	d_{27}	+0.000 740i
a_{28}	-0.013 638	b_{28}	+0.018 888	d_{28}	+0.027 222
a_{29}	+0.028 141i	b_{29}	+0.077 342i	d_{29}	+0.003 269i
a_{30}	+0.037 577	b_{30}	+0.151 696	d_{30}	+0.030 360
a_{31}	-0.034 189i	b_{31}	-0.184 164i	d_{31}	-0.002 691i
a_{32}	-0.018 855	b_{32}	-0.165 130	d_{32}	+0.023 516
a_{33}	-0.022 480i	b_{33}	+0.101 082i	d_{33}	+0.000 441i
a_{34}	-0.020 870	b_{34}	+0.011 277	d_{34}	+0.022 494
a_{35}	+0.029 648i	b_{35}	+0.078 649i	d_{35}	+0.002 601i
a_{36}	+0.027 778	b_{36}	+0.144 596	d_{36}	+0.025 186
a_{37}	-0.019 017i	b_{37}	-0.170 267i	d_{37}	-0.002 016i
a_{38}	-0.008 221	b_{38}	-0.152 109	d_{38}	+0.019 944
a_{39}	-0.001 775i	b_{39}	+0.082 172i	d_{39}	+0.000 389i
a_{40}	-0.010 433	b_{40}	+0.008 586	d_{40}	+0.019 228
		$\sum_{n=0}^{40} +0.788367+0.015552i$			

(2) 隅に丸みのある場合。

上と同様にして

$$\alpha_0 = 30^\circ, \quad \alpha_1 = 45^\circ, \quad \alpha_2 = 60^\circ$$

の場合の $a_n, b_n, C_n/n+1 = d_n$ を計算したのが第2表である。ここでも第40項までとってある。そうして(47)の関係から

$$k + \rho = 0.6010$$

$$1 + \rho = 1.1070$$

$$1 + h = 1.3865$$

となるから

$$k = 0.4940$$

$$h = 0.3865$$

$$\rho = 0.1070$$

となる。

すなわち上のようにして計算すると、写像関数は容易に求められ、数値計算は収斂のわるいということはあるが、これは機械的に運算できるから、あとはただ手数をかけることだけでわれわれの求めたい写像関数は無限級数の形で与えられることとなる。

5. 結 語

隅の角を丸めた不連続個所を有する平面応力問題を取扱うとき、その不連続個所をもった領域を単位円に写像する方法について述べ、实例として、角のある場合、丸みのある場合を数値計算した。こういう場合、理論的にむつかしく表現されるものは、理論的には解けても数値計算がほとんど困難であり、数値計算に便利な方法に従えば、数値計算の収斂のわるいという手数はあるが、それも機械的に運算できるから、割りに容易に計算できる。

こうして上記の方法によると、今まで数値計算のほとんど不可能だった不連続個所をもつ帯板などの平面応力問題は、上にのべた写像関数を用いることによって、容易にとけることとなり、あとは応力境界値問題における応力解析の問題のみとなる。しかしてこれも写像関数がこうして与えられると、簡単に出来るが、これは紙数の関係で後に発表することにする。

なお本研究は昭和33年度科学研究(各個研究)による研究のごく一部である。そして本研究にあたり大阪大学教授太田友彌博士、菊川真博士、山口大学講師久保敏彦氏から終始御指導いただいたことに厚く謝意を表するものである。

文 献

- 宮本慶巳, 二次元問題(修教社) p. 149~p. 180 Makoto, KIKUKAWA, Proceedings of the 3rd Japan National Congress for Applied Mechanics p. 5~p. 9.
 菊川 真, 第5回応用力学講演会 別刷(1955) p. 17.
 掛谷宗一, 一般関数論 p. 293.
 太田友彌, 半田孝男, 造船協会会報 83号 p. 53~57.
 野村恭雄, 山口大学工学部学報 7巻1号 p. 25~30.