

# レールに作用する縦荷重について

最 上 幸 夫

## 1. 緒 言

動荷重によるレールの応力計算については、その動的影響を垂直荷重、横荷重及び縦荷重（レール方向）の三つに分けて取扱う必要がある。実際の走行車輛ではこれらが同時に作用して相互干渉を生ずるわけであるが、このような場合の厳密解をうることは殆んど不可能といつて差支えない。従つて著者はこのような場合の近似解法として各々の荷重を独立に取扱ひこれより各応力値を求めて加算し、所要の応力を計算する方法を採つた。かくすると相互干渉のある場合より多少大なる結果を与えるものと考えられるが、その誤差は一応安全側となるわけである。このような計算法の一環としてここでは縦荷重の場合について考察しこれによる応力の計算法ならびに計算例について述べる。

## 2. レールに作用する縦方向荷重

縦方向荷重の影響については従来レールの<sup>(1)</sup>挫屈の問題を対稱として実験が行われているが、実際の走行車輛がレールに及ぼす縦方向荷重については余り研究が行われていないようである。そこで著者はこのような縦荷重について若干の考察を行つた。以下筆者の見解を述べる。鉄道車輛が走行中においては車輪とレールの間には当然摩擦を生じ、このためレール表面にさうして摩擦力が作用する。すなわち車輪とレールの接觸点においてレール方向にある外力が作用する。いま車輛が一定速度 $v$ をもつて走行中を考えると、車輪とレールの間にはレール表面の状態に応じた粘着力が作用している。従つて機関車の牽引力がこの粘着力より大となつた場合は車輪に空転を生じ、また一方制動力が作用する場合は制動力が粘着力より大となつた場合には車輪は回転せず静止状態のままレール面上を滑走することになる。故に車輪が順調な回転をして走行中においてはレール方向に作用する外力としては、レールと車輪間の粘着力が最大値と考へて差支えない。従つて縦方向荷重の範囲

としてはこの場合（±）粘着力（+は車輛進行方向を表わす）の間にあるものと考えられる。これを一働輪について記号で表わせば、

$$\mu\{W + Q \cos(\omega t + \varphi)\} \geq N_t \geq -\mu\{W + Q \cos(\omega t + \varphi)\} \quad (1)$$

ここに、 $\mu$ =粘着係数、 $W$ =1働輪の静軸重、 $Q$ =1働輪の遠心力、 $\omega$ =働輪回転角速度、 $\varphi$ =任意位相、 $N_t$ =1働輪によりレール方向に作用する外力

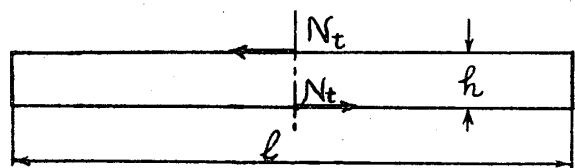
縦方向荷重 $N_t$ は式(1)の範囲内にあるものと考えられるが、これを理論的に求めることは困難であるから、レール応力の計算に対してはその最大影響を及ぼす場合について検討をすれば十分である。従つてここではレールに作用する縦荷重として

$$N_t = \mu\{W + Q \cos(\omega t + \varphi)\} \quad (2)$$

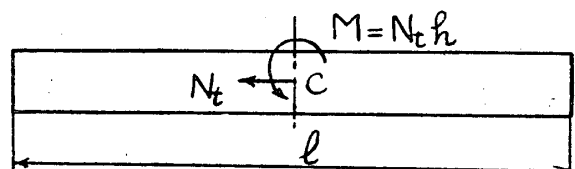
とおくことにする。以下このような作用外力を用いて応力計算を進めることとする。

## 3. 縦荷重による応力計算式

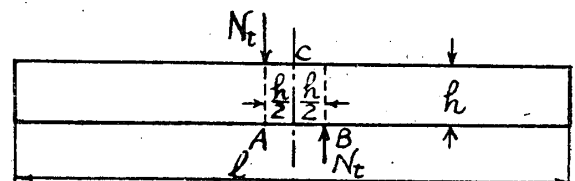
いまレールを近似的に弾性床土上の桁と仮定し、 $N_t$ は図-1の如くレールの表面に作用して



第 1 圖



第 2 圖



第 3 圖

いるとすれば、 $N_t$ の影響は図-2の如く作用点断面の重心に作用する  $N$  と同断面に作用する  $M=N_t h$  なる振れモーメントの二つに分けて考えられる。この振れモーメントによる梁の鉛直面内における変位曲線を求めるには、近似的にこの振れモーメントを図-3の如き鉛直荷重におきかえて取扱うことにする。この場合振れモーメントの作用点  $c$  における曲げモーメント  $M_c=M_A(1+h/l)$  によつて求められる。この場合  $N_t$  の値は比較的小さく、従来の実験結果に

$$\begin{aligned} T &= 1/2 \rho a \int_0^l (\partial \xi / \partial t)^2 dx \\ V &= E a / 2 \int_0^l (\partial \xi / \partial x)^2 dx + \kappa / 2 \int_0^l \xi^2 dx \\ F &= 1/2 \rho a K \int_0^l (\partial \xi / \partial t)^2 dx + R / 2 \int_0^l (\partial \xi / \partial t)^2 dx \end{aligned}$$

ここに、 $\rho$ =レール密度、 $a$ =レール断面積、 $E$ =レール弾性係数、 $\kappa$ =弾性床縦方向抵抗力( $\text{cm}^2$  当り)、 $K$ =弾性床縦方向抵抗係数、 $R$ =内部摩擦抵抗力(単位質量当り)、 $\xi$ =外力による縦方向変位、いま

$$\xi_{xt} = \sum_{r=1}^{\infty} \sin(r\pi x/l) q_{rt} \quad (4)$$

とおけば、式(4)を式(3)に代入し直交函数の性質を考慮して Lagrange の運動方程式を解けば、次式をうる。

$$\ddot{q}_{rt} + 2\epsilon \dot{q}_{rt} + n_r^2 q_{rt} = 2/\rho a l \Psi \quad (5)$$

ここに  $\epsilon = 1/2(K+R/\rho a)$ 、 $n_r^2 = 1/\rho a \{Ea(r\pi/l)^2 + \kappa\}$ 、またこの場合の一般力は、

$$\begin{aligned} \Psi &= N_t \sin r\pi(vt+S)/l \\ &= \mu \{W + Q \cos(\omega t + \varphi)\} \sin r\pi(vt+S)/l \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)を式(5)に代入し、恒数変化の方法により  $q_{rt}$  を求めれば、強制振動の項のみとつて

$$\begin{aligned} q_{rt} &= 2\mu/\rho a l \{W \{a_r \cos r\pi(vt+S)/l + a'_r \sin r\pi(vt+S)/l\} + Q/2 \{ \beta_r \cos \{(r\pi v/l + \omega)t + \varphi + S\} + \beta'_r \sin \{(r\pi v/l + \omega)t + \varphi + S\} + \gamma_r \cos \{(r\pi v/l - \omega)t + S - \varphi\} + \gamma'_r \sin \{(r\pi v/l - \omega)t + S - \varphi\} \} \} \quad (7) \end{aligned}$$

ここに、 $a_r$ 、 $a'_r$ 、 $\beta_r$ 、 $\beta'_r$ 、 $\gamma_r$ 、 $\gamma'_r$  はそれぞれ  $n_r$ 、 $r\pi v/l$ 、 $\epsilon$ 、 $\omega$  等によつて表わされる常数である。 $q_{rt}$  が式(7)で与えられるからこれを式(4)

よれば、縦荷重に対しては1ヶ所の犬釘によつて約2100kg<sup>(2)</sup>程度の抵抗力を示しているから、小さい  $N$  の値に対しては一枕木間隔程度の短スパンを考慮すればよい。そこで弾性床上の桁としてのスパン  $l$  はこの場合枕木間隔と考へて差支えない。以下最初に重心軸にそつ軸力  $N_t$  による応力計算を行う。

(A) 軸力  $N_t$  によるレール応力

桁のスパンを  $l$  とし、この場合の運動、位置、減衰のエネルギーはそれぞれ次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} T &= 1/2 \rho a \int_0^l (\partial \xi / \partial t)^2 dx \\ V &= E a / 2 \int_0^l (\partial \xi / \partial x)^2 dx + \kappa / 2 \int_0^l \xi^2 dx \\ F &= 1/2 \rho a K \int_0^l (\partial \xi / \partial t)^2 dx + R / 2 \int_0^l (\partial \xi / \partial t)^2 dx \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

に代入すれば、所要の  $\xi_{xt}$  が求められ、これより応力は、

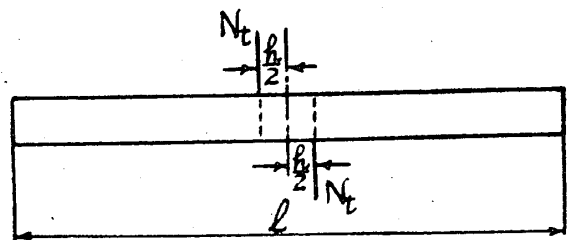
$$\begin{aligned} \sigma_{xt} &= E(\partial \xi_{xt} / \partial x) \\ &= E \sum_{r=1}^{\infty} (r\pi/l) q_{rt} \cos r\pi x/l \end{aligned} \quad (8)$$

として求められる。特にスパン中点における応力は  $x=l/2$  とおき

$$\sigma_{1/2} = E \sum_{r=2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{r/2} (r\pi/l) q_{rt} \quad (9)$$

となる。

(B) 振れモーメント  $M_t = N_t h$  による計算



第4図

前述の如く  $M_t$  による影響は近似的に作用断面より  $h/2$  の距離に反方向の鉛直外力が作用するものとし、この場合の垂直方向変位を  $\psi$  とすれば、全く前と同様に取扱うことができる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} T &= 1/2 \rho a \int_0^l (\partial y / \partial t)^2 dx, \\ V &= EI/2 \int_0^l (\partial^2 y / \partial x^2)^2 dx + \kappa/2 \int_0^l y^2 dx, \\ F &= 1/2 \rho a K \int_0^l (\partial y / \partial t)^2 dx + R/2 \int_0^l (\partial y / \partial t)^2 dx \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

こゝに、 $\kappa$  = 弾性床の垂直方向抵抗力 (cm<sup>2</sup> 当り)  
 $K$  = 弾性床垂直方向抵抗係数  
 $R$  = 垂直方向内部摩擦係数 (単位質量当り)

の運動方程式によつて

$$\ddot{q}_{rt} + 2\epsilon \dot{q}_{rt} + n_r^2 q_{rt} = 2/\rho a l \Psi \quad (12)$$

を得る。こゝに

$$y_{rt} = \sum_{r=1}^{\infty} q_{rt} \sin(r\pi x/l) \quad (11)$$

$$\epsilon = 1/2 (K + R/\rho a),$$

$$n_r^2 = 1/\rho a \{EI(r\pi/l)^4 + \kappa\} \quad (13)$$

前同様に式 (11) を式 (10) に入れ Lagrange

$$\begin{aligned} \Psi &= N_t \{ \sin r\pi(vt+S)/l - \sin r\pi/l(vt+S+h) \} \\ &= -2\mu \{ W + Q \cos(wt+\varphi) \} \sin(r\pi h/2l) \cos r\pi/l(vt+S+h/2) \end{aligned} \quad (14)$$

式 (14) を式 (12) に入れ計算を行つた結果、  
 強制振動の項のみとすれば

$$\begin{aligned} q_{rt} &= -2\mu/\rho a l \{ W \sin(r\pi h/2l) [ \alpha_r \cos r\pi/l(vt+S+h/2) + \alpha'_r \sin r\pi/l(vt+S+h/2) ] \\ &+ Q/2 \sin(r\pi h/2l) [ \beta_r \cos \{ (r\pi v/l+w)t+S+h/2l+\varphi \} + \beta'_r \sin \{ (r\pi v/l+w)t+S+h/2l+\varphi \} \\ &+ \gamma_r \cos \{ (r\pi v/l-w)t+S+h/2l-\varphi \} + \gamma'_r \sin \{ (r\pi v/l-w)t+S+h/2l-\varphi \} ] \} \end{aligned} \quad (15)$$

ここに、 $\alpha_r, \alpha'_r, \beta_r, \beta'_r, \gamma_r, \gamma'_r$  は  $r\pi v/l, w, \epsilon, n_r$  によつて表わされる常数である。かくして  $q_{rt}$

は式 (15) によつて求められるからモーメントは

$$M_{xt} = -EI \frac{\partial^2 y_{xt}}{\partial x^2} = EI \sum_{r=1}^{\infty} q_{rt} (r\pi/l)^2 \sin(r\pi x/l) \quad (16)$$

となる。従つて式 (16) によつて鉛直荷重作用点のモーメントを求め、これを  $M_1$  とすれば、偶力  $M_t$  の作用点におけるモーメントは

$$M = M_1 (1 + h/l) \quad (17)$$

として近似的に所要のモーメントが得られる。

#### 4. 数値計算例

与えられた Data として次のものを用いる。  
 $W=7500\text{kg}, Q=750\text{kg}, V=20\text{m/sec}, \rho=8.07 \times 10^{-6}\text{kg}\cdot\text{sec}^2\cdot\text{cm}^{-4}, a=64.33\text{cm}^2, I=1744\text{cm}^4, E=2,100,000\text{kg}\cdot\text{cm}^{-2}, l=75\text{cm}, \kappa=1.2\text{kg}\cdot\text{cm}^{-2}$  (縦方向),  $5\text{kg}\cdot\text{cm}^{-2}$  (垂直方向),  $\mu=0.2, \epsilon=30\text{sec}^{-1}$

以上の数値を用い計算を行つた結果は、

(A) 軸力  $N_t$  による応力

スパン中点で  $\sigma = \pm 5.2\text{kg}\cdot\text{cm}^{-2}$ , 固定端  $\sigma = 24.6\text{kg}\cdot\text{cm}^{-2}$

(B) 捩れモーメント  $M_t$  による応力

この場合  $M=12.440\text{kg}\cdot\text{cm}$  をうるからレール

底応力  $\sigma_2=47.7\text{kg}\cdot\text{cm}^{-2}$  となる。(A), (B) を考慮すれば、レール底における最大応力  $\sigma_{\max} = \pm 53\text{kg}\cdot\text{cm}^{-2}$  となる。もちろんこの値は縦荷重の影響が最大の場合であるから、一般にはこれより小さい値をとることとなり、縦荷重の影響はレール応力に対しては左程大なる影響はないという結論になる。

#### 5. 結 言

以上の近似計算法ならびに数値計算の結果より検討して走行車輛による縦荷重については、おほよそ次の結論が得られる。

1、走行車輛によつてレールに作用する縦方向外力は、車輪、レール間の粘着力を極限範囲としてかなり広範囲に変化し、その作用方向は車輛進行方向に作用することもあれば、逆方向に作用する場合もある。いずれにせよこれを厳密な理論によつて求めることは困難でただ実験的に求める以外その実体を把握することは不可能で

あろう。しかしレール応力の計算に対しては近似的に外力の最大値を用いて行つておけば一応安全側となる。

2、走行中車輛による縦荷重の影響は最悪の場合でもレール応力に対しては余り大なる影響はないが、レール底において  $50\text{kgcm}^{-2}$  程度の応力を生ずるから、垂直荷重による応力の約10%程度の増加を見込む必要があると思われる。

3、縦荷重がレールに及ぼす影響は、レール応

力に対するよりも、むしろレールの逼進 (Creeping) の現象に対してより重大な意義をもつものであり、これについては今後機会を得ればさらに研究を進める考えである。

— 註 —

(1) 堀越一三、軌条の捩屈について、土木学会誌 第20巻10号、P.1187.

(2) 小野諒兄、鉄道線路の構造及強度、P.53.

## 枕木に生ずる動的應力の1計算について

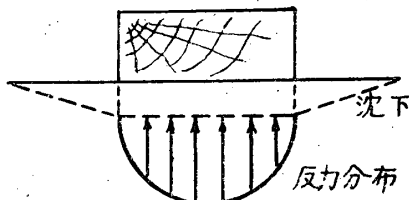
最 上 幸 夫

### 1. 緒 言

枕木に生ずる応力の計算法については静的の場合は殆んど完全に解かれており、動的の場合も既に研究が発表されているが、<sup>(1)</sup> 著者は枕木直下の圧力分布の状態を考慮し、枕木に作用する動的外力は3連モーメント定理を利用して近似的に求め、これによる枕木の動的応力を計算する1近似解法について検討を行つたのでここに報告する次第である。

### 2. 算式の誘導

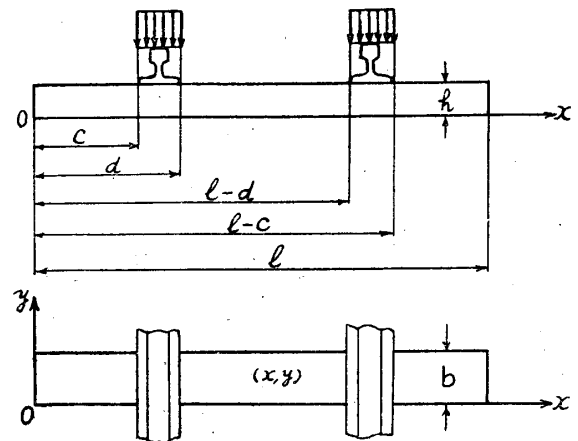
枕木に生ずる動的応力の計算法については従来一般に枕木を弾性基礎上の梁として取扱つてあるが、この方法では枕木横方向の反力分布が一様なものとの仮定に基いている。しかるに枕木下における沈下及び反力分布の状態は実験結果によれば、<sup>(2)</sup> ほぼ砂質土上の剛性板の場合に相似している。(図-1参照)従つてこれによれ



第 1 図

ば枕木のレール方向における沈下は一様で反力分布は大體拋物線形状と見なして大過ないようである。従つて以下このような仮定が適用しうるものとして考察を進めることにする。いま坐

標軸、荷重状態ならびに諸記号を図-2の如くする。



第 2 図

しからは、最初の仮定により枕木内任意の一点における沈下量  $W_{xyt}$  は次の如く表わしうる。

$$W_{xyt} = \sum_{m=1}^{\infty} U_m(x) q_{mt} \quad (1)$$

ただし  $U_m(x)$  は枕木が弾性基礎上に自由におかれた場合の自由端条件を満足する正規函数で次式で表わされる。

$$U_m(x) = (\cos r - \cosh r)(\cos rx/l + \cosh rx/l) + (\sin r + \sinh r)(\sin rx/l + \sinh rx/l) \quad (2)$$

$r$  は  $\cos r \cdot \cosh r = 1$  を満足する値である。次に運動、位置、抵抗のエネルギーはそれぞれ次の如く表わされる。