補間法の一公式

真　野　孝　義

1. 問題の提示

確率過程 $X(t)$ につき t の値が

$$t_{-n+1}< \cdots <t_{-1}<t_0<t_1< \cdots <t_n$$

にて，X の値既知なるとき $t_0<t<t_1$ なる t については X を如何に推定すべきかについては，既に A. Kolmogoroff によって解かれているが，これを別の見地から取扱ってみよう。

2. 考　　察

確率過程 $X(t)$ につき t の値が

$$t_{-n+1}< \cdots <t_{-1}<t_0<t_1< \cdots <t_n$$

にて X の値が既知なるとき

$$X(t_\nu)=X_\nu$$

とし，

$t_0<t<t_1$ なる t にての $X(t)$ を X とする確率過程 $X(t)$ の t_ν 及び t に於ける状況は $X_{-n+1}, \cdots, X_n, X$ の分布を規定する 2_{n+1}次元確率分布によって定められる。

この確率密度を

$$f(X_{-n+1}, \cdots, X_{-1}, X_0, X, X_1, \cdots, X_n)$$

とし，f が正規分布であると

$$f=(\text{const.})\times e^{-\frac{p}{2}} \quad (p \text{ は } X_\nu\ X, \text{ の二次形式})$$

二次形式 p を X を含む項と含まない項とに分ち，X を含む項を平方の形 γx^2 （x は X 及び X_ν の一次式）と書いて

$$p=\gamma x^2+p_1 \qquad (p_1 \text{ は } X \text{ を含まない})$$

X_ν が既知となれば p_1 従って $e^{-\frac{p_1}{2}}$ は常数となり，$e^{-\frac{\gamma x^2}{2}}$ の項が X の分布法則をきめることとなる。x は標準偏差が$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ である正確分布確率変数である。従って x が

$$x=X+\sum a_\nu X_\nu+b$$

であったとすれば，標準偏差1なる正規分布確率変数を u とすれば，X は

$$X=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}u-\sum a_\nu X_\nu-b$$

となる。

今　$E\{X(t)\}=0$, $E\{X(t^2)\}=1$ とし，

$$E\{X(t)\cdot X(t+k)\}=e^{-\lambda|k|}$$

なる場合には

$$p=X^2_{-n+1}+\sum_{\substack{\nu=-n+2\sim 0\\ 及\ 2\ \sim\ n}}\frac{1}{1-\mu_\nu^2}(X_\nu-\mu_\nu X_{m-1})^2+\frac{1}{1-\mu^2}(X-\mu X_0)^2+\frac{1}{1-u^2}(X_1-yX)^2$$

但 $\mu_\nu=e^{-\lambda(t_m-\ t_{m-1})}$, $\mu=e^{-\lambda(t-t_0)}$, $y=e^{-\lambda(t_1-t)}$ となる。従って

$$p=\frac{1-\mu^2u^2}{(1-\mu^2)(1-u^2)}\left\{X-\frac{\mu(1-u^2)X_0+u(1-\mu^2)X_1}{1-\mu^2u^2}\right\}+p_1$$

となる。上式の括弧 { } 中には X を夾む X_0, X_1 が入るのみで他の X_ν が這入らない，即ち X はこれを夾む X_0 及び X_1 によってだけ定められる。

上式は

$$X=\frac{\mu(1-u^2)X_0+u(1-\mu^2)X_1}{1-\mu^2u^2}$$

が標準偏差 $\sqrt{\dfrac{(1-\mu^2)(1-u^2)}{1-\mu^2u^2}}$ なる正規分布確率変数なることを示す。

即 $$X=\frac{\mu(1-u^2)X_0+u(1-\mu^2)X_1}{1-\mu^2u^2}+\sqrt{\frac{(1-\mu^2)(1-u^2)}{1-\mu^2u^2}}u$$

で補間が与えられる。

3. 結　　語

確率過程 $X(t)$ につき t の値が

$$t_{-\ +1}<\cdots<t_{-1}<t_0<t_1<\cdots<t_n$$

にて X の値が既知なる時

$t_0<t<t_1$ なる t について X は

$$X=\frac{\mu(1-u^2)X_0+u(1-\mu^2)X_1}{1-\mu^2u^2}+\sqrt{\frac{(1-\mu^2)(1-u^2)}{1-\mu^2u^2}}u$$

で補間が与えられる。

但し $E\{X(t)\cdot X(t+k)\}=e^{-\lambda|k|}$ とし，$\mu=e^{-\lambda(t-t_0)}$, u は標準偏差 1 なる正規分布確率変数とする。