

過渡応答解析における逐次積分法の比較について

工 藤 洋 三*・中 川 浩 二*

Comparison of Several Step-by-step Integration Methods for Simulating the Transient Response

Yōzo KUDO, Koji NAKAGAWA

Abstract

A lot of integration methods are currently used for the integration of motion $M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F$. Some investigators have concluded that particular method is superior for a certain type of problems. However, a procedure which can be used to compare the merits of these methods in practical application for complex structural system is lacking.

In the study of colliding of solids or blasting, the slope of the stress wave front is extremely steep. The simulation of the front slope by several steps makes the accuracy sometimes not good.

In this study, three groups of integration method were compared for the step loading in order to know the accuracy of these methods for steep loading. These groups are

1. Central difference method in time,
2. Direct step by step integration method and
3. Finite element method in time.

For the numerical example, the finite element bar model was employed.

1. はじめに

有限要素法の確立とこの手法の発展は、工学をはじめとする諸分野の解析に威力を発揮している。有限要素法は差分法などに比べて、境界条件の設定、構造物の形状や局所的な性格および逐次的な材料の特性変化の表現などに関して利点があり、構造物などの静的問題だけでなく、動的問題の一部においても、十分な精度ですでに実用の段階に入っている。

しかしながら、衝撃によって生じる構造物内の応力波の伝播に関する解析については、精度の点で未解決の問題を含んでいる。特に立上り時間の短い荷重をうける場合は、波頭の部分における応力波の近似において大きな誤差を生じることが、従来から指摘されている。著者らは、爆圧をうける土木構造物の動的応答を、実験的・数値解析的に明らかにしていく目的で研究を進めているが、このためには応力波についてのより深い知識を得ることが必要である。ダイナマイトなどの爆薬では、立上り時間が $1 \sim 2 \mu\text{sec}$ 程度で

あるといわれており²⁾、爆圧による現象を数値解析で解こうとする場合、解析しようとする系の大きさや時間間隔、時間増分や空間分割長の大きさ、解析方法の安定性などから、立上り部分を数ステップで近似させる必要がある。これらの点を考慮して数値解析に用いられるさまざまな手法に言及した資料は比較的少なく³⁾、また満足すべき結果も得られていないように思われる。

本研究は有限要素法を応力波伝播解析——特に過渡応答解析に適用する際の精度と実用性に関する基礎的資料を得ることを目的としている。このため棒モデルがステップ荷重をうける場合の数値解析の精度を質量マトリックスおよび逐次積分の方法などに関して考察する。特に逐次積分法については、一般の動的応答解析によく用いられている解析方法、最近提案された種々の解析方法について比較検討する。

2. 解析方法

離散化された系の動的応答に関する運動方程式は次

* 土木工学科

式で表わされる。

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{F\}$$

上式の線形連立常微分方程式の数値解法は、大別して調和解析による方法と逐次積分による方法がある。ここでは構造物が過渡的な荷重を受けた場合の比較的短時間後の応答を問題にしているのので、Graffらの指摘りにしたがって、逐次積分法を用いて解析する。

2・1 質量マトリックス

式(1)の質量マトリックスに集中質量マトリックス (lumped mass matrix) および適合質量マトリックス (consistent mass matrix) のいずれを使用するかという選択は、解の精度や計算時間に大きな影響を与える。はりに関する静的問題について、両者を比較・検討した Archer は、精度の点では一般に後者が優れていることを報告している。

しかし Costantino は波動伝播問題においては適合質量マトリックスを使用する場合、この計算方法の性質上、実際に波動が到達する以前に変位を生じるという系の伝播特性を無視した不合理な面があると指摘している⁹⁾。このため逐次積分法による精度の比較をする前に、質量マトリックスが解の精度に与える影響について検討する。

2・2 逐次積分法

逐次積分法については、今日までさまざまな方法が提案されている。ここでは、それらの方法の中から、

- 1) 時間に関する差分近似により与えられる方法
- 2) 加速度を積分して速度・変位を求める数値積分法

3) 時間場の有限要素化によって与えられる方法
 をとりだし検討する。1)として中央差分法、2)の方法として、現在動的応答解析に広く用いられている Newmak の β 法⁶⁾、Clough 法⁷⁾、Range-Kutta-Gill 法^{8),9)}、および Wilson の θ 法¹⁰⁾、3)として簡略化された Galerkin 法によって得られる式¹¹⁾について考察する。これらの具体的計算方法は付録に示してある。

なお計算には九州大学 計算機センター FACOM 230-60を使用した。

2・3 解析条件

過渡応答問題の数値解の精度を検討するための具体的基準は定められておらず、研究者により、まちまちである。本研究では、解析解が得られている完全弾性体よりなる二次元平面応力状態の半無限棒を考え、解析解に対する数値解の解析解からのオーバーシュート

分の比を精度の評価に用いた。要素の形状は汎用性があり、その形状関数の性質から三角形要素に比べて、高精度が期待できる四角形要素とした。

半無限棒を有限要素近似することは事実上不可能であるが、本研究では反射波の影響を除去するため棒端に Lysmer の方法を適用した。すなわち端部節点において、 $\sigma = -\rho c u$ なる応力を付加することになるが、この値に境界において節点が支配すると考えられる面積を乗じ、減衰力としてとりあつかうことにより半無限棒を近似した。

また本研究では主に衝撃時の立上り部分の近似を考えているので、荷重形はパルス状にせずステップ状とした。棒モデルおよび荷重形を Fig. 1 に示す。材料としてはコンクリートを想定した。用いた材料定数を Table 1 に示す。

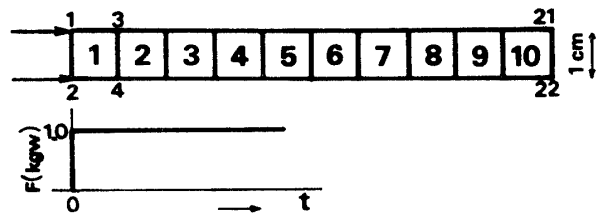


Fig. 1 Geometry of Problem

Table 1 Material constants

Density (g/cm ³)	2.2
Dynamic Young's Modulus(kgw/cm ²)	3×10 ⁵
Poisson's Ratio	0.16

3. 解析結果および考察

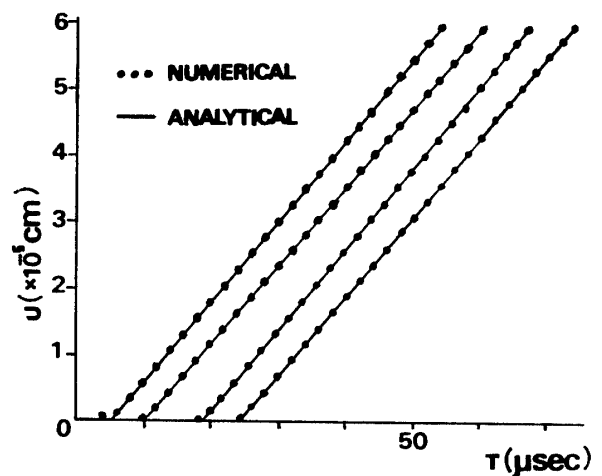


Fig. 2 Displacement Caused by Step Load, Central Difference Method

変位についての計算結果を Fig. 2 に示す。この変位の計算には最も簡単な差分近似である中央差分法と集中質量法を用いてある。他の解析法でも収束範囲内では、立上りのわずかな部分を除いて、解析解と極めてよい一致を示した。また変位波の伝播から求めた縦波の速度は3,700m/sec で、理論値 3,676m/sec とよく一致している。

3・2 応力

3・2・1 質量マトリックスによる比較

集中質量マトリックスおよび適合質量マトリックスを用いた場合の応力の計算値の比較を Fig. 3 に示す。

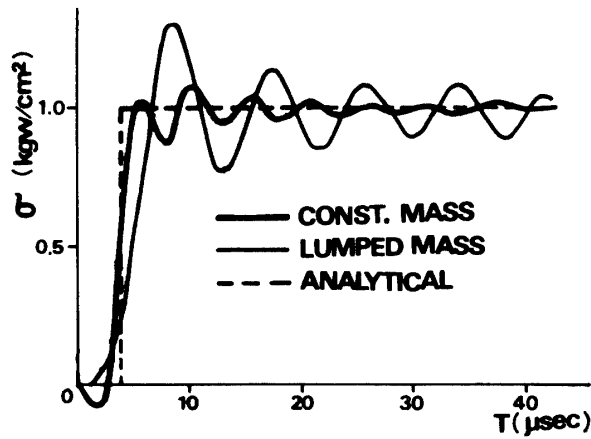


Fig. 3 Comparison of Consistent Mass Matrix and Lumped Mass Matrix, Runge-Kutta-Gill Method

集中質量マトリックスによるものは最初のピークにおいて30%以上の誤差を生じており、この点に関しては適合質量マトリックスが優れている。しかし Costantino が指摘しているように、適合質量マトリックスでは波頭前面に引張波を生じている。集中質量マトリックスを用いた場合においても波頭前面に圧縮波を生じているが、重要なことは、適合質量マトリックス法では実際には生じえない引張波が生じ、これが伝播の過程で増大する傾向にあるということである。

本研究では打撃端近くの応力状態を考えているので、以下の議論では中央差分法を除く他の方法には適合質量マトリックスを用いている。

3・2・2 逐次積分法による比較

各逐次積分法による結果を Fig. 4 ~ Fig. 9 に示す。また Table 2 に各計算法による同一条件 ($h=1 \mu\text{sec}$) の計算時間、解が収束する際の最大時間増分、最大誤差を示した。計算時間については、プログラム中の操作によってかなり異なるので、一応の目安と考えるべきであろう。

Table 2 Comparison of CPU Time, Maximum Time Increment and Error

METHOD	CPU TIME (sec)	$C_b/\Delta x$	ERROR (%)
Central Diff.	80	0.8	34
Newmark	120	0.8	8
Clough	200	0.9	9
R. K. G	200	0.5	7
Wilson	150	—	—
Galerkin	450	1.9	6

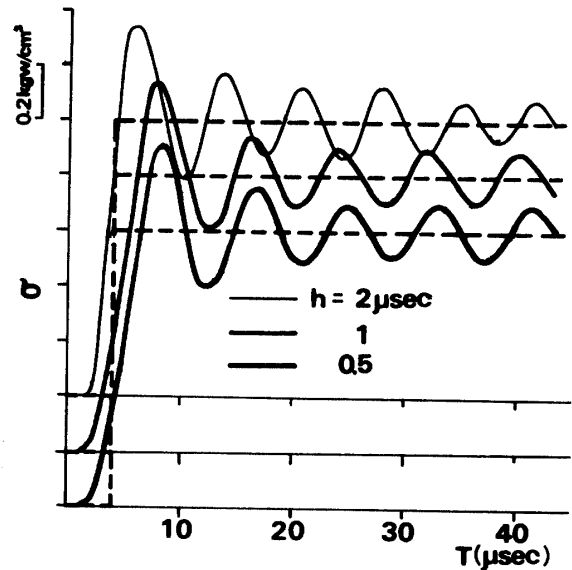


Fig. 4 Stress Caused by Step Load, Central Difference Method

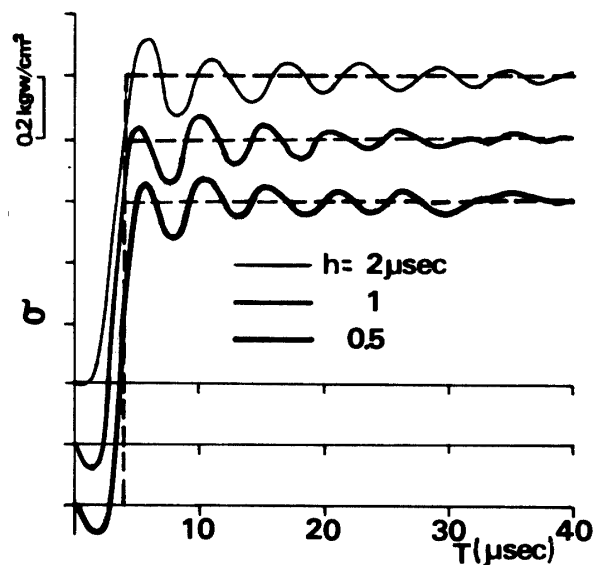


Fig. 5 (a) Stress Caused by Step Load, Newmark β -Method

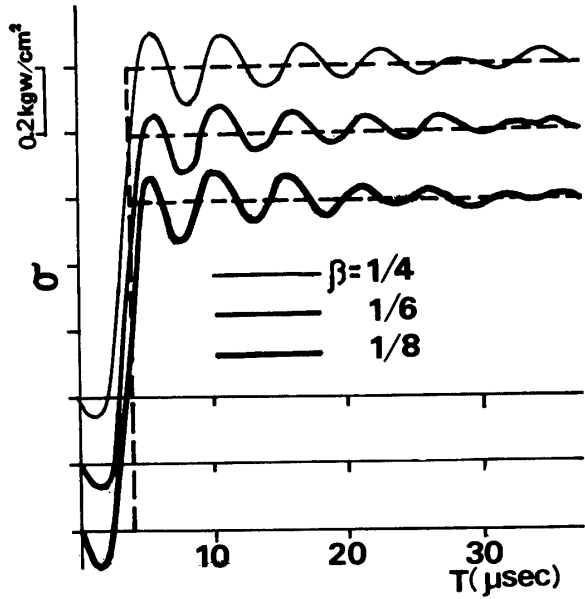


Fig. 5 (b) Stress Caused by Step Load, Newmark β Method

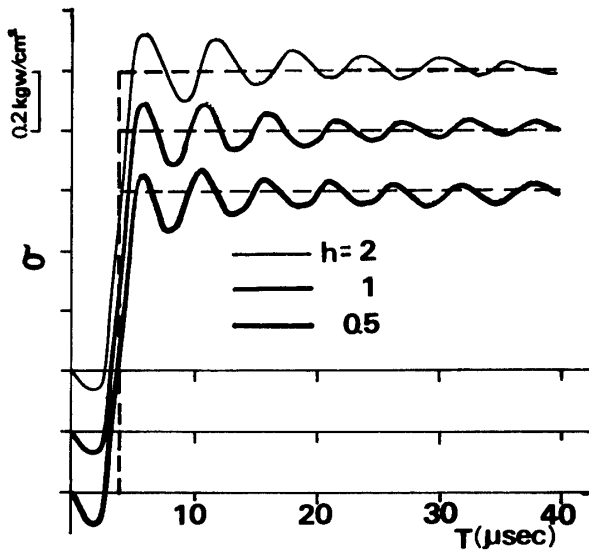


Fig. 6 Stress Caused by Step Load, Clough Method

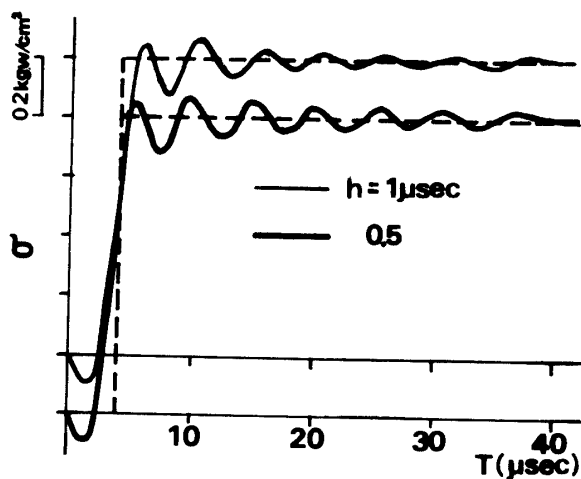


Fig. 7 Stress Caused by Step Load, Runge-Kutta-Gill Method
Vol.28 No.2 (1978)

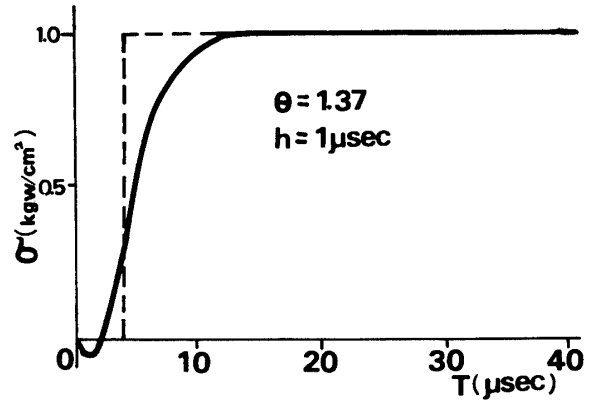


Fig. 8 Stress Caused by Step Load, Wilson θ -Method

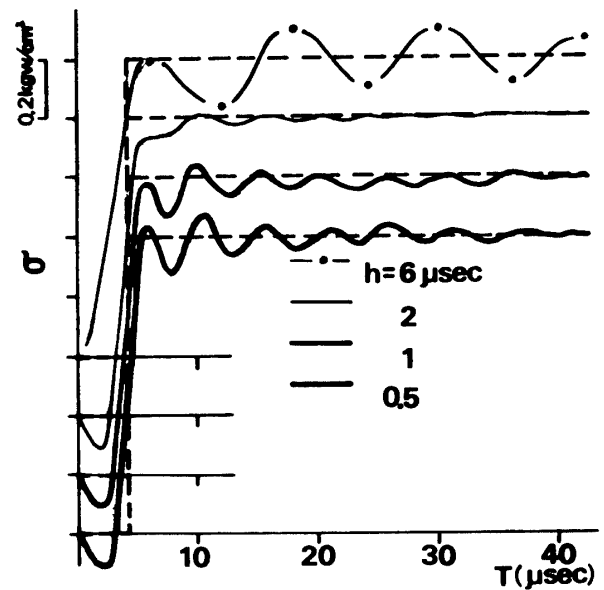


Fig. 9 Stress Caused by Step Load, Galerkin Method

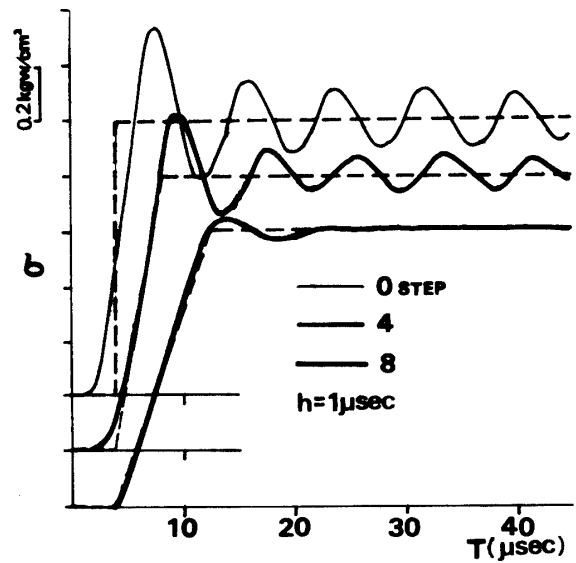


Fig. 10 Stress Caused by Inclined Load, Central Difference Method

中央差分法は集中質量法と結合してよりいっそうの効果がある。Fig. 4より急峻な立上りをもつ荷重に対しては、この方法を適用するには問題が多いが、波頭に傾きをつけて、立上り部分を漸増させていくとFig. 10に示すようになりによい近似を与えるようになる。この方法では適合質量マトリックスを用いても飛躍的な精度の向上は認められない。計算時間・記憶容量が他の方法と比較して著しく少ないのが、中央差分法の特徴である。

Newmarkのβ法、Clough法が同程度の近似を示しており、Runge-Kutta-Gill法が精度の点で、若干これらを上回っている。このことはそれぞれの式を誘導する理論的根拠からも明らかである。またRunge-Kutta-Gill法は時間間隔の変更が比較的容易にできるという利点があるが、一方で、時間増分—空間分割長の比に対する安定性の点で、他の方法に比べて若干不安定である。

Wilsonθ法はこの手法の本来の目的である時間的に安定となるような領域では、立上り部分の高周波成分が遮断されて粗雑な近似となる。これに対してGalerkin法では、時間増分を適当に選択するならばかなりの精度が期待できるが、記憶容量・計算時間が他の方法に比べて著しく大きくなり、土木構造物の解析に用いられる多くの自由度をもつ系については適用不可能である。

4. おわりに

以上の解析結果および考察により、次のような結論を得た。

- 1) いずれの方法によっても変位については相当の精度で解析可能である。
- 2) 質量マトリックスについてはいずれの方法にも一長一短あり、それぞれの目的に応じて使用すべきである。
- 3) 中央差分法を急峻な勾配をもつ荷重について適用することには問題があるが、漸増荷重については一定の精度で適用可能である。また計算時間が短いこと、記憶容量が少なくすむことなどの点で、他の方法に比べて大きな利点をもっている。
- 4) Runge-Kutta-Gill法は、記憶容量・計算時間の点で、他の数値積分法とほとんど変わらず、時間間隔の収束範囲内で任意に選択でき、精度の点で若干優れている。
- 5) 時間領域を有限要素化した手法を土木構造物に

適用するには、計算時間・記憶容量などの点が問題が残されている。

逐次積分法についてはこれらの方法の他にも、塩尻・中村が提案した解析的方法により、解を近似しようとする方法や¹²⁾、吉田らが提案した運動方程式と等価な変分汎関数によって、初期値問題を境界値問題として、解こうとする方法³⁾など数多くある。しかしこれらの方法といえども上に述べた方法の理論的または工学的欠陥を根本的に改善するものではないように思われる。今後の発展が期待される。

参 考 文 献

- 1) C. J. Costantino: Proc. ASCE, EM 2, 93, 5206 (1967)
- 2) 伊藤, 佐々: 日本鉱業会誌, 76, 2 (1960)
- 3) たとえば桜井, 小島: 日本鋼構造協会マトリックス解析法研究発表論文集, 338 (1971)
- 4) K.F. Graff: "Wave Motion in Elastic Solids", Ohio Univ. Press, 91 (1975)
- 5) J. S. Archer: Proc. ASCE, ST4, 161 (1963)
- 6) N. M. Newmark: Proc. ASCE, EM3, 67 (1959)
- 7) R. W. Clough: Japan-U.S. Semi. on Matrix Method of St. Analysis and Design, 1 (1969)
- 8) S. Gill: Proc. Camb. Phil. Soc., 57, 96 (1951)
- 9) 伊里, 松谷: 情報処理, 8, 2 (1967)
- 10) R.W. Clough and K. J. Bathe: "Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design", UAH Press, 153 (1972)
- 11) O.C. Zienkiewicz (吉識・山田監訳): マトリックス有限要素法, 培風館 (1975) P.337
- 12) J. Lysmer and I. Kuhlemeyer: Proc. ASCE, EM4, 859 (1969)
- 13) 塩尻, 中村: 土木学会論文報告集, 第246号, 21 (1976)
- 14) 吉田, 増田: 村田: 土木学会論文報告集, 第254号, 27 (1976)

付 録

1. 計算方法

1) 中央差分法

加速度を変位の時間に関する中央差分におきかえると

$$\{U_{n+1}\} = 2\{U_n\} - \{U_{n-1}\} + h^2\{\ddot{U}_n\}$$

が与えられこれより次式が得られる。

$$\{\ddot{U}_{n+1}\} = [\{U_{n+1}\} - \{U_n\}] / h$$

$$\{\ddot{U}_{n+1}\} = [M]^{-1} [\{F_{n+1}\} - [C] \{\dot{U}_{n+1}\} - [K] \{U_{n+1}\}]$$

2) Newmarkのβ法

通常陰型の連立方程式をくり返し計算によって、収束させていく方法がとられるが、ここでは本文式(1)に

β 法の公式を代入し陽型として直結積分した.

$$\begin{aligned} [M] \{\ddot{U}_{n+1}\} &= \{\overline{F}_{n+1}\} \\ [\overline{M}] &= [M] + \frac{h}{2} [C] + \beta h^2 [K] \\ \{\overline{F}_{n+1}\} &= \{F_{n+1}\} - [C] \left\{ \dot{U}_n + \frac{h}{2} \{\dot{U}_n\} \right\} \\ &\quad - [K] \left\{ U_n + h \{U_n\} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) h^2 \{\dot{U}_n\} \right\} \end{aligned}$$

より $\{\ddot{U}_{n+1}\}$ を求め、次式より $\{\dot{U}_{n+1}\}$, $\{U_{n+1}\}$ を得る.

$$\begin{aligned} \{\dot{U}_{n+1}\} &= \{\dot{U}_n\} + \frac{h}{2} \{\ddot{U}_n\} + \frac{h}{2} \{\ddot{U}_{n+1}\} \\ \{U_{n+1}\} &= \{U_n\} + h \{\dot{U}_n\} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) h^2 \{\ddot{U}_n\} \\ &\quad + \beta h^2 \{\ddot{U}_{n+1}\} \end{aligned}$$

3) Clough 法

線型加速度法の一種で次の式により与えられる.

$$\begin{aligned} [K] \{\Delta U\} &= \{\Delta F\} \\ [\overline{K}] &= [K] + \frac{3}{h} [C] + \frac{6}{h^2} [M] \\ \{\Delta \overline{F}\} &= \{\Delta F\} + 3 [M] \left\{ \dot{U}_n + \frac{2}{h} \{U_n\} \right\} \\ &\quad + [C] \left\{ 3 \{U_n\} + \frac{h}{2} \{\dot{U}_n\} \right\} \\ \{U_{n+1}\} &= \{U_n\} + \{\Delta U\} \\ \{\dot{U}_{n+1}\} &= \frac{3}{h} \{\Delta U\} - 2 \{\dot{U}_n\} - \frac{h}{2} \{\ddot{U}_n\} \end{aligned}$$

4) Runge-Kutta-Gill 法

Runge-Kutta 法と同じ 5 次のオーダーの精度を持ち、記憶容量が少なくすむ上、逐次計算によって生じる丸めの誤差を一定部分除去できる。また他の方法に比べて時間間隔の選択が容易である。

本文式(1)を変形し.

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{dU}{dt} \right\} &= \{F\} - [C] \{U\} - [K] \{U\} \\ \left\{ \frac{dU}{dt} \right\} &= \{\dot{U}\} \end{aligned}$$

として 1 次の連立常微分方程式にした後、Runge-Kutta-Gill 法を適用する。

5) Wilson の θ 法

Newmark の β 法や Clough 法などは、要素の分割長、時間増分の選び方によって解の安定性が異ってくる。Wilson はこの点を改善して、 $\theta \geq 1.37$ なる θ を選び $\tau = \theta h$ なる区間で線形であるとすれば、解が無条件に安定となるようなアルゴリズムを考案した。すなわち

$$[\overline{K}] \{U_{n+\theta}\} = \{F_{n+\theta}\}$$

$$\begin{aligned} [\overline{K}] &= [K] + \frac{3}{\tau} [C] + \frac{6}{\tau^2} [M] \\ \{\overline{F}_{n+\theta}\} &= \{F_{n+\theta}\} \\ &\quad + [M] \left\{ 2 \{\dot{U}_n\} + \frac{6}{\tau} \{\dot{U}_n\} + \frac{6}{\tau^2} \{U_n\} \right\} \\ &\quad + [C] \left\{ \frac{\tau}{2} \{\dot{U}_n\} + 2 \{U_n\} + \frac{3}{\tau} \{U_n\} \right\} \end{aligned}$$

より $\{U_{n+\theta}\}$ を求めれば $(n+1)h$ における諸量が次のように求まる。

$$\begin{aligned} \{\ddot{U}_{n+1}\} &= \frac{6}{\theta^3 h^2} \left\{ \{U_{n+\theta}\} - \{U_n\} \right\} \\ &\quad - \frac{6}{\theta^2 h} \{\dot{U}_n\} + \left(1 - \frac{3}{\theta}\right) \{\ddot{U}_n\} \\ \{\dot{U}_{n+1}\} &= \{\dot{U}_n\} + \frac{h}{2} \left\{ \{\ddot{U}_{n+1}\} + \{\ddot{U}_n\} \right\} \\ \{U_{n+1}\} &= \{U_n\} + h \{\dot{U}_n\} + \frac{h^2}{6} \left\{ \{\ddot{U}_n\} + \{\ddot{U}_{n+1}\} + 2 \{n\} \right\} \end{aligned}$$

6) Galerkin 法

文式(1)に対して、各時間間隔内で、Hermite の 3 次式を用いた最も、簡単な内挿式を用いて重みつき残差方程式をつくると、次のステップの変位と速度が次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{n+1} \\ \dot{U}_{n+1} \end{Bmatrix} &= \\ - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_n \\ \dot{U}_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A_{11}] &= -\frac{6}{5h} [M] + \frac{1}{2} [C] + \frac{13}{35} h [K] & [A_{12}] &= \frac{11}{10} [M] + \frac{h}{10} [C] - \frac{11}{210} h^2 [K] \\ [A_{21}] &= -\frac{1}{10h} [M] + \frac{1}{10} [C] + \frac{11}{210} h [K] & [A_{22}] &= \frac{2}{15} [M] - \frac{h^2}{105} [K] \\ [B_{11}] &= \frac{6}{5h} [M] - \frac{1}{2} [C] + \frac{9}{70} h [K] & [B_{12}] &= \frac{1}{10} [M] - \frac{h}{10} [C] + \frac{13}{420} h^2 [K] \\ [B_{21}] &= \frac{1}{10h} [M] - \frac{1}{10} [C] + \frac{13}{420} h [K] & [B_{22}] &= -\frac{1}{30} [M] - \frac{h}{60} [C] + \frac{h^2}{140} [K] \\ \{C_1\} &= \int_0^h (3S^2 - 2S^3) \{F\} dt & \{C_2\} &= - \int_0^h (S^3 - S^2) \{F\} dt \end{aligned}$$

2. 記号

- $[M]$: 質量マトリックス
- $[C]$: 減衰マトリックス
- $[K]$: 剛性マトリックス
- $\{U\}$: 変位ベクトル
- $\{\dot{U}\}$: 速度ベクトル
- $\{\ddot{U}\}$: 加速ベクトル
- $\{F\}$: 外力ベクトル
- $\{\Delta F\}$: 外力増分ベクトル
- $\{\Delta U\}$: 変位増分ベクトル
- t : 時間
- h : 時間増分
- Δx : 空間分割長
- σ : 直応力
- ρ : 密度
- C : 棒中の縦波の速度
- S : t/h
- n : 時間 nh (n : 自然数) を示す指標
- $n+1$: 時間 $(n+1)h$ を示す指標
- $n-1$: 時間 $(n-1)h$ を示す指標
- $n+\theta$: 時間 $(n+\theta)h$ を示す指標

(昭和52年10月15日受理)