

半無限領域での波動伝播数値解析のための一つの方法

中 川 浩 二*・工 藤 洋 三*

A Method for Numerical Analysis of Wave Propagation in an Elastic Half Space.

Koji NAKAGAWA, Yozo KUDO

The analytical studies of blast effects and earthquake, mechanical or traffic foundation vibrations are to consider them as wave propagation problems in an infinite solid. When the geometrical complications as structures on the foundation or openings are included, it is not possible to find closed form solutions and, therefore, only the numerical solutions are available. As a numerical method, finite element or finite difference method is useful. With these methods, only a finite number of nodal points can be considered, the numerical method can not be used the direct approximation of the infinite region. One of the methods through which an infinite system may be approximated by a finite system is to use a viscous boundary condition.

In this study it was considered that a continuous state is between the free and the fixed conditions. So the infinite region was approximated as the average of a finite system with free boundary condition and a system with fixed boundary condition.

The numerical results showed that the method of superposition is excellent in one dimensional problems and not so good in two dimensional problems.

1. はじめに

地震, 発破, 機械振動, 交通振動などともなう地盤振動の問題は近年特に大きくとり上げられてきている。地盤を対象とした力学的な解析を行うとき, 地盤は一般に半無限体として扱われており, そのため地盤の動的問題の解として解析解を得ることができれば無限領域を表わす上で望ましいことはいうまでもない。しかし, 地盤と構造物との相互作用を扱うとき, 構造物の存在により解析解を得ることは事実上不可能となり, 有限要素法, 差分法などの数値解析法を用いることが必要となる。

これらの数値解析法においては対象となる半無限領域を有限個の要素あるいは点で近似するため, 近似によって設けられた遠方境界での波の反射によって大きな誤差を生み出すことがある。この遠方境界での波の反射をなくし, 無限領域をさらに良く近似するための方法として, 表面波である Rayleigh 波, Love 波に対する境界条件を用いる方法と, 実体波である体積

波, せん断波に対する境界条件を用いる方法とが提案されている¹⁾。ここでは発破等ともなう波動の問題を主として考えることとし, 実体波に対する境界について考察する。実体波に対する Lysmer らの境界条件¹⁾は遠方境界上の点にダッシュポットを設けることにより波動のエネルギーを吸収しようとするものであり, かなりの成果をあげている²⁾。

本研究は連続という状態が自由境界と固定境界との中間状態にあると考えることにより, 自由境界および固定境界両者の状態を重ね合わせ, 境界により反射される波の影響を除去しようと試みたものである。

2. 一次元問題における弾性波の自由端および固定端での反射.

一次元弾性問題における波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

で与えられる。D'Alembert の解

$$u = f(c_0 t + x) + g(c_0 t - x)$$

* 土木工学科

をとり自由端 $x=0$ へ波が入射する場合を考える。入射波 f に対し反射波を g_1 で表わせば境界での応力が0である条件より

$$f'(cot) = g_1'(cot)$$

の関係がえられる。そこで入射波、反射波それぞれによる境界での応力 σ_1, σ_2 は

$$\sigma_1 = Ef'(cot), \quad \sigma_2 = -Eg_1'(cot)$$

となり、反射波の応力は入射波のそれに対し符号が逆になって反射される。

固定端へ波が入射する場合、反射波を g_2 で表わすと、

$$f(cot) + g_2(cot) = 0$$

となりこれより

$$f'(cot) + g_2'(cot) = 0$$

入射波、反射波それぞれによる境界での応力を σ_1, σ_2 とすると

$$\sigma_1 = Ef(cot), \quad \sigma_2 = -Eg_2'(cot)$$

は前と同様であり、反射波の応力は入射波のそれに対し符号を変えることなく反射される。

ここで自由端および固定端への入射、反射波をそれぞれ独立に求め重ね合わせるとき、合変位は

$$u = 2f(cot+x) + g_1(cot-x) + g_2(cot-x)$$

となり、境界での対応する応力 $(\sigma)_{x=0}$ は

$$(\sigma)_{x=0} = E\{2f'(cot) - g_1'(cot) - g_2'(cot)\} = 2Ef'(cot)$$

となり入射波による応力の2倍となって反射波による応力は現われてこない。すなわち自由端および固定端への入射、反射波の平均値をとることにより $x \geq 0$ の領域で反射波の影響を除去することができる。

3. 二次元境界における弾性波の反射

二次元問題においては一次元問題におけるようなとり扱いはできず、入射波として P 波 (体積波, Dilatation wave), S 波 (せん断波, Distortion wave) それぞれについて検討することが必要となる。ここではそれぞれの正弦波について検討することにする。

3-1. P波の反射³⁾

3-1-1. 自由面における反射

Fig. 1 のように x 軸と α_1 の角度をなして P 波が自由面 $x=0$ へ入射する場合を考える。入射波の波面に垂直な変位を ϕ_1 として

$$\phi_1 = A_1 \sin(pt + f_1x - g_1z)$$

で表わす。ここで A_1 は振幅であり、 c_1 を P 波の速度、 p を円振動数として

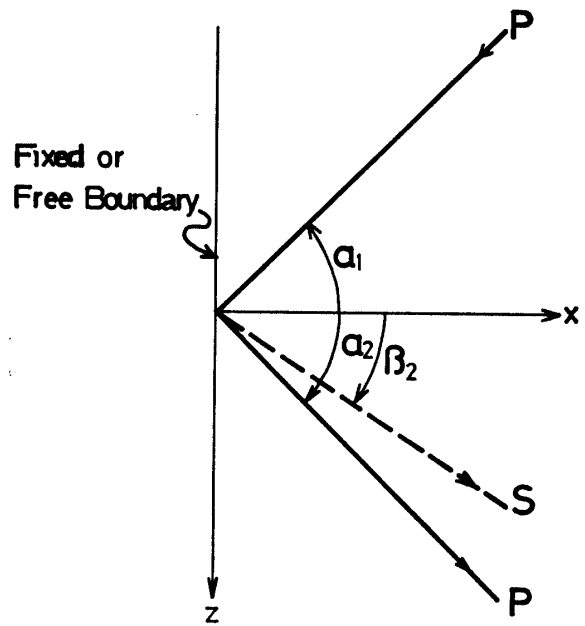


Fig. 1 Reflection of dilatation wave at free or fixed boundary

$$f_1 = \frac{p}{c_1} \cos \alpha_1, \quad g_1 = \frac{p}{c_1} \sin \alpha_1$$

であり変位は x 軸、 z 軸方向それぞれ

$$u_1 = \phi_1 \cos \alpha_1, \quad w_1 = -\phi_1 \sin \alpha_1$$

で表わされる。反射波には P 波と S 波があり、それによる変位を ϕ_2, ϕ_3 で表わすと

$$\phi_2 = A_2 \sin(pt - f_2x - g_2z + \delta_1)$$

$$f_2 = \frac{p}{c_1} \cos \alpha_2, \quad g_2 = \frac{p}{c_1} \sin \alpha_2$$

$$u_2 = -\phi_2 \cos \alpha_2, \quad w_2 = -\phi_2 \sin \alpha_2$$

$$\phi_3 = A_3 \sin(pt - f_3x - g_3z + \delta_2)$$

$$f_3 = \frac{p}{c_2} \cos \beta_2, \quad g_3 = \frac{p}{c_2} \sin \beta_2$$

$$u_3 = \phi_3 \sin \beta_2, \quad w_3 = -\phi_3 \cos \beta_2$$

となる。ここで c_2 は S 波の速度であり、 δ_1, δ_2 は反射による位相の変化である。いま $x=0$ の面は自由面であり、 $\sigma_x = 0, \tau_{xz} = 0$ となり、上記の変位条件をこれらの関係式に代入すると、 $\alpha_1 = \alpha_2$ であり、 $\delta_1 = \delta_2 = 0$ として

$$2(A_1 - A_2) \cos \alpha_1 \sin \beta_2 - A_3 \cos 2\beta_2 = 0,$$

$$(A_1 + A_2) \cos 2\beta_2 \sin \alpha_1$$

$$- A_3 \sin \beta_2 \sin 2\beta_2 = 0$$

となる。これらより入射波の振幅に対する反射波の振幅の比を求めると

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2(\sin 2\beta_2 \sin^2 \beta_2 \cos \alpha_1) - \cos^2 2\beta_2 \sin \alpha_1}{2(\sin 2\beta_2 \sin^2 \beta_2 \cos \alpha_1) + \cos^2 2\beta_2 \sin \alpha_1}$$

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{2 \sin 2\alpha_1 \sin \beta_2 \cos 2\beta_2}{2(\sin 2\beta_2 \sin^2 \beta_2 \cos \alpha_1) + \cos^2 2\beta_2 \sin \alpha_1}$$

で表わされる.

3-1-2 固定面における反射

固定面では

$$u = u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

$$w = w_1 + w_2 + w_3 = 0$$

が成立することより, 自由面の場合と同様にして

$$(A_1 - A_2) \cos \alpha_1 + A_3 \sin \beta_2 = 0$$

$$(A_1 + A_2) \sin \alpha_1 + A_3 \cos \beta_2 = 0$$

の関係が得られる. これより反射波振幅の入射波振幅に対する比は先と同様に $\delta_1 = \delta_2 = 0$ として

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1 - \tan \alpha_1 \tan \beta_2}{1 + \tan \alpha_1 \tan \beta_2}$$

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{-2 \sin \alpha_1 / \cos \beta_2}{1 + \tan \alpha_1 \tan \beta_2}$$

で表わされる.

3-2. S波の反射

3-2-1. 自由面における反射³⁾

今取り扱っている問題は二次元問題であるので xz 面内におけるせん断波すなわち SV 波のみを扱おう (Fig. 2). P 波の場合と同様に入射 S 波, 反射 S 波, 反射 P 波による変位をそれぞれ

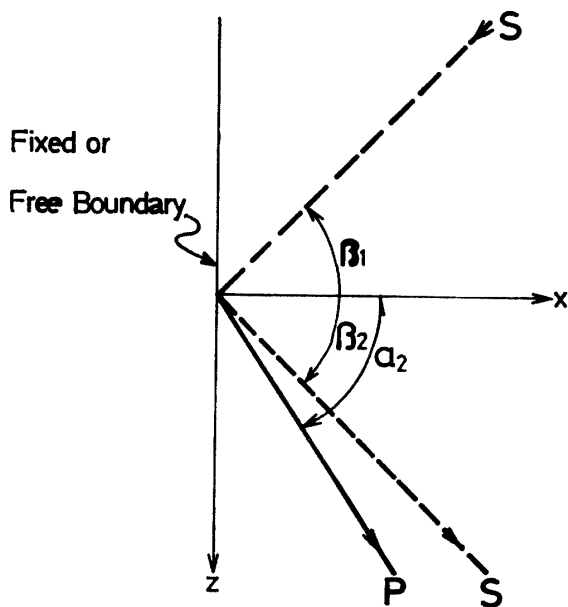


Fig. 2 Reflection of distortion wave at free or fixed boundary

$$\phi_1 = B_1 \sin (pt + f_1 x - g_1 z)$$

$$\phi_2 = B_2 \sin (pt - f_2 x - g_2 z + \delta_1)$$

$$\phi_3 = B_3 \sin (pt - f_3 x - g_3 z + \delta_2)$$

で表わすと自由面境界における境界条件 $\sigma_x = 0$, $\tau_{xz} = 0$ より

$$(B_1 - B_2) \sin 2\beta_1 \sin \beta_1 + B_3 \sin \alpha_2 \cos 2\beta_1 = 0$$

$$(B_1 + B_2) \cos 2\beta_1 + 2\beta_3 \cos \alpha_2 \sin \beta_1 = 0$$

が得られる. さらに B_1 に対する B_2 , B_3 の比を求めると

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{\tan \alpha_2 \cos 2\beta_1 - 2 \tan 2\beta_1 \sin^2 \beta_1}{2 \tan 2\beta_1 \sin^2 \beta_1 + \tan \alpha_2 \cos 2\beta_1}$$

$$\frac{B_3}{B_1} = \frac{2 \sin \beta_1 \sin 2\beta_1 \cos 2\beta_1}{2 \tan 2\beta_1 \sin^2 \beta_1 + \tan \alpha_2 \cos 2\beta_1}$$

となる.

3-2-2. 固定面における反射

固定表面での境界条件, $u = 0$, $w = 0$ を用いると

B_1, B_2, B_3 の間に

$$(B_1 - B_2) \sin \beta_1 + B_3 \cos \alpha_2 = 0$$

$$(B_1 + B_2) \cos \beta_1 + B_3 \sin \alpha_2 = 0$$

の関係が得られ, これより

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{\tan \alpha_2 \tan \beta_1 - 1}{\tan \alpha_2 \tan \beta_1 + 1}$$

$$\frac{B_3}{B_1} = \frac{-2 \sin \beta_1 / \cos \alpha_2}{\tan \alpha_2 \tan \beta_1 + 1}$$

となる.

3-3. 全反射

よく知られるように反射波の伝播速度が入射波のそれよりも大きい場合には反射角が $\pi/2$ となる臨界入射角が存在し, これよりも大きい入射角で入射した波に対しては光学における全反射に対応する現象が得られる. この臨界角は入射 S 波と反射 P 波の入射および反射角 β_1 , α_2 と弾性定数 λ , μ との関係において

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_1} = \frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}}$$

とし, ここで $\sin \alpha_2 = 1$ とおくことにより得られる. すなわち, $\sin \beta_1 = \sqrt{\mu / (\lambda + 2\mu)} = \sqrt{(1-2\nu) / 2(1-\nu)}$ より得られる. そしてこの関係を満足する入射角 β_1 より大きい入射角 β_1 に対して全反射が生じることになる. いま $\sin \beta_1 > \sqrt{(1-2\nu) / 2(1-\nu)} = c_1 / c_2$ とすると $\sin \alpha_2 > 1$ となり $\cos \alpha_2$ は虚数となる. この場合反射 P 波は一種の表面波となり, 表面から内部へのエネルギー伝達は P 波によっては行なわれない. そして反射 S 波の振幅は入射 S 波のそれと変わらないが, 反射波の位相に変化が生じることになる.

3-4. 自由, 固定面での反射波の重ね合わせ.

自由面および固定面へ P 波が入射した場合, 位相変化がないとして入射振幅に対する反射振幅の比を反射 P 波, 反射 S 波それぞれについて入射角との関係で表わしたものが Fig. 3 である. この場合, 自由,

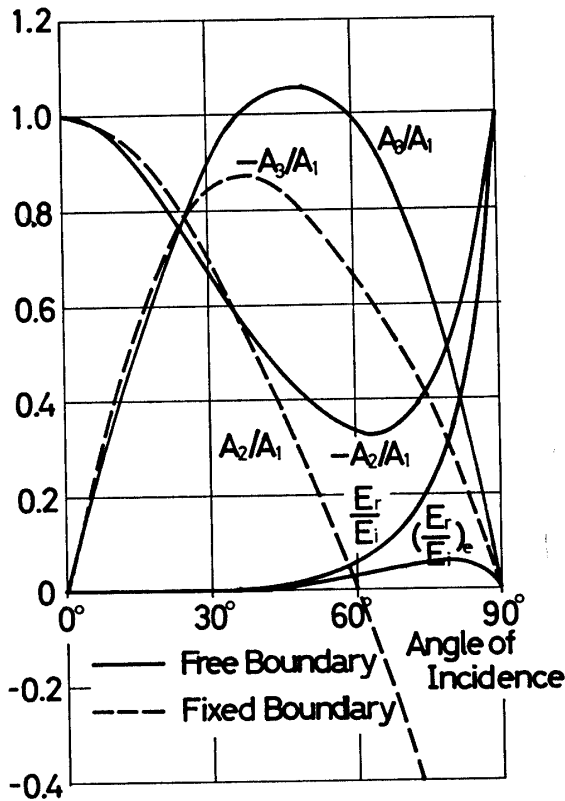


Fig. 3 Amplitudes of reflected waves and the energy ratio for incident P wave

固定両面での反射波の絶対値の関係を明らかにするため、適当に符号に変化を与えてある。図からみられるように入射角が35°程度までは反射波の振幅は P 波、S 波とも自由面、固定面について絶対値はよく一致し、重ね合わせると反射波はうまく除去されるようである。しかし入射角が40°あたりよりも大きくなると差は大きくなり、とくに反射 S 波において著しい。

この重ね合わせによる方法の合理性を検討するために、入射波のもつエネルギーに対し重ね合わせによって得られた反射波のもつエネルギーを考える。単位時間に単位面積を通過する P 波および S 波のエネルギーはそれぞれの振幅を A, B で表わすと

$$E_P = \frac{1}{2} \rho c_1 p^2 A^2$$

$$E_S = \frac{1}{2} \rho c_2 p^2 B^2$$

として与えられる。境界の単位面積に入射しかつ反射する波のそれぞれのエネルギーを E_i, E_r で表わすと

$$E_i = \frac{1}{2} \rho c_1 p^2 \cos \alpha_1 A_1^2$$

$$E_r = \frac{1}{2} \rho c_1 p^2 \cos \alpha_2 A_2^2 + \frac{1}{2} \rho c_2 p^2 \cos \beta_2 A_3^2$$

となる。自由、固定面における入射、反射波の重ね合わせをとると

$$E_i = \frac{1}{2} \rho c_1 p^2 \cos \alpha_1 (2 A_1)^2$$

$$E_r = \frac{1}{2} \rho c_1 p^2 \cos \alpha_2 (A_2' + A_2'')^2 + \frac{1}{2} \rho c_2 p^2 \cos \beta_2 (A_3' + A_3'')^2$$

となる。ここで、'、'' は自由面および固定面での反射波を表わす。したがって

$$\frac{E_r}{E_i} = \left(\frac{A_2' + A_2''}{2 A_1} \right)^2 + \frac{c_1 \cos \beta_2}{c_2 \cos \alpha_2} \left(\frac{A_3' + A_3''}{2 A_1} \right)^2$$

となり、入射角に対するこの値の変化は図に示すとおりである。

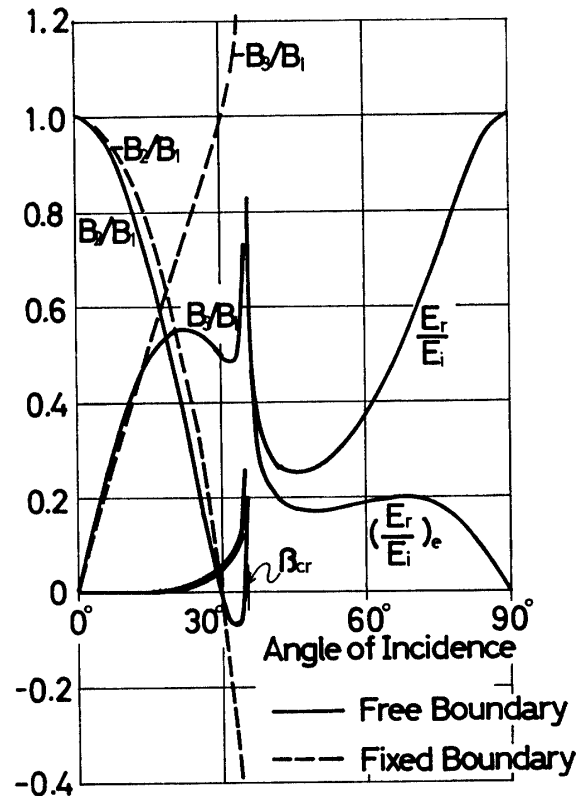


Fig. 4 Amplitudes of reflected waves and the energy ratio for incident S wave

入射波が S 波である場合、入射波振幅に対する反射波の振幅の比を図示すると Fig. 4 のとおりとなり、自由、固定面での反射波の振幅の絶対値は臨界角に近づくまでは比較的よく一致するのが認められる。しかし入射角が臨界角 β_{cr} に近くなるとその差は大きくなる。この傾向は反射 S 波、反射 P 波ともに認められる。入射角が臨界角をすぎると前述のように反射 P 波は存在せず、振幅が入射波と同じ反射 S 波のみ存在することになるので図には省略する。この場合、自由面

および固定面で反射波の位相変化はそれぞれ異なることはいままでの入射および反射エネルギーについては $\beta_1 < \beta_{cr}$ のとき重ね合わせの結果

$$E_i = \frac{1}{2} \rho c_2 p^2 \cos \beta_1 (2B_1)$$

$$E_r = \frac{1}{2} \rho c_2 p^2 \cos \beta_2 (B_2' + B_2'')^2 + \frac{1}{2} \rho c_1 p^2 \cos \alpha_2 (B_3' + B_3'')^2$$

より

$$\frac{E_r}{E_i} = \left(\frac{B_2' + B_2''}{2B_1} \right)^2 + \frac{c_1 \cos \alpha_2 (B_3' + B_3'')^2}{c_2 \cos \beta_1 (2B_1)^2}$$

となる。しかし、 $\beta_1 > \beta_{cr}$ となると自由、固定面に対する反射波は S 波のみとなり、それらの振幅を C, D とすると

$$C = CR + i CI$$

$$D = DR + i DI$$

と複素数で表わされる。これらはそれぞれ入射波に対しその実部と虚部で定められる位相のずれを有することを示しているが、重ね合わせの結果としての反射エネルギーの比は

$$\frac{E_r}{E_i} = \left(\frac{CR + DR}{2B_1} \right)^2 + \left(\frac{CI + DI}{2B_1} \right)^2$$

で与えられ、図に示すとおりとなる。

さらに Lysmer らは境界によって吸収されるエネルギーに関する指標として単位面積に入射するエネルギーが入射角によることを考慮し実効エネルギー比 $(E_r/E_i)_e$ として $(E_r/E_i) \cos \alpha_1$ あるいは $(E_r/E_i) \cos \beta_1$ をとっている¹⁾。いまの問題に対するこの値をも Fig. 3, 4 に併せて示しておく。

4. 数値計算例

波動伝播問題の数値解析には空間場に対して有限要素法を、時間場に対して中央差分公式を用いた逐次計算法によった。また有限要素法にはすべて四角形要素を用いた。

一次元波動伝播の問題として長さ20m、幅1mの棒 (Fig. 5) に正弦波一周期が入射する場合を考える。(弾性係数 $2.7 \times 10^9 \text{ kg/m}^2$, ポアソン比0.25, 密度 2.6 ton/m^3)。この場合要素は二次元であり問題は厳密な意味で一次元問題ではないが実用上ほとんど差がないので二次元棒モデルをもって一次元モデルとした。入射正弦波の周期は4.5msecとし、数値積分の時間刻み Δt は0.15msec とした。前述のとおり一次元波動が境界へ入射する場合、反射される波は自由境界では圧縮波は引張波、引張波は圧縮波として、固定境界

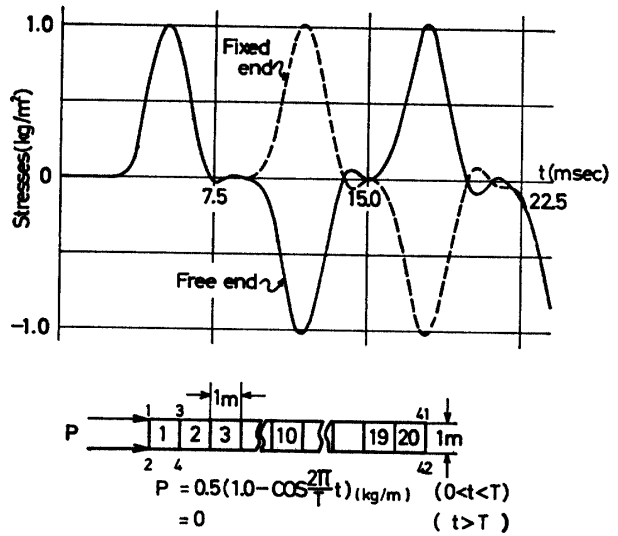


Fig. 5 Finite element bar model and reflected waves at free and fixed boundaries

では引張波は引張波、圧縮波は圧縮波として反射される。ここで図中要素10の応力の時間変化を検討する。自由端および固定端で反射された波による応力は棒中を一往復する間符号が固定端に対する反射波は自由端に対するそれに対して反対となる。そして載荷点(自由端と考える)での反射後の自由端および固定端での2度目の反射により再び符号が同じになって、両者の波による応力は一致することが認められる。

この要素10の応力を自由端および固定端をもつ棒に対して求め、平均値をとると Fig. 6 となり波が最初の反射後棒中を一往復する間はほぼ完全に反射波の影響を除去しうることが示される。しかし最初の反射後の一往復がすぎて、自由および固定端での2度目の反射が生じると再び応力符号の一致により、反射波が最初の入射波と振幅を変えずに現われることになる。そこでこの2度目の反射による反射波の出現をなくすために逐次計算の一回の時間刻み Δt ごとに棒端の変

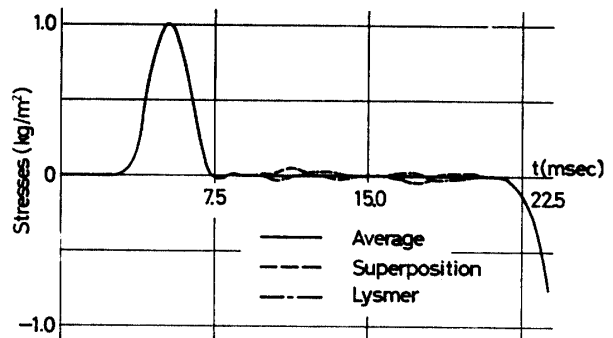


Fig. 6 Stresses in element 10 for various boundary conditions

位を自由境界と固定境界の平均値（固定境界の変位は0であるので事実上自由境界の変位の1/2となる）に設定し、逐次解析を行ったものを同図に示している（この方法を以下移動境界法と呼ぶ）。さらに比較のため Lysmer らの提案による境界応力を $\sigma = a\rho c\dot{u}$ とした結果（ $a = 1$ を採用）をも併せて図示した。これによると各繰り返しごとの変位設定による移動境界法にも若干の誤差を生じることが認められ、その大きさは Lysmer らの方法によるものとはほぼ同程度であった。さらにこの移動境界法の精度は時間刻み幅 Δt の大きさに若干依存するが、 $c\Delta t$ を要素長の60%近くにとると誤差は最小となるようである。

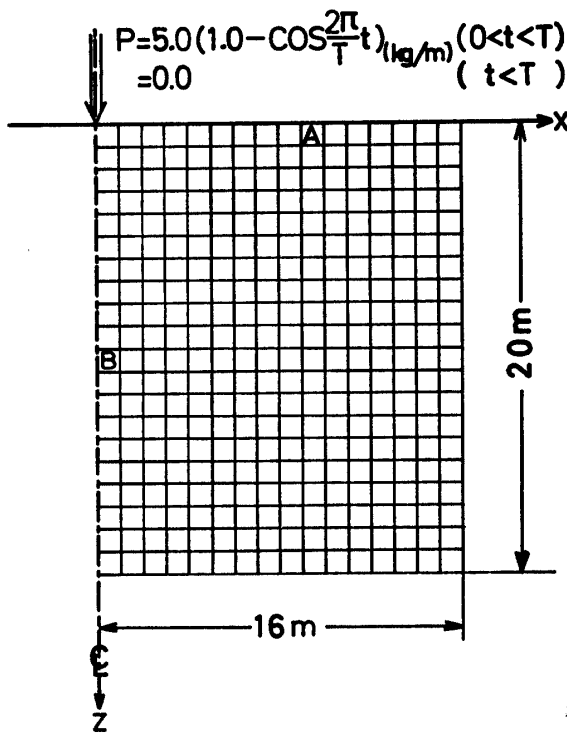


Fig. 7 Finite element half space model

次に二次元モデルとして Fig. 7に示すような二次元半無限弾性体表面上の一点に先と同様な過渡集中荷重が作用する場合を扱う。遠方境界としての自由および固定表面での反射波の重ね合わせを考える場合、二次元問題ではたとえば図の $x = 16m$ の面で反射された波が数回の時間刻みの間に $z = 20m$ の面で反射される可能性がある。そのため、自由境界による反射と固定境界による反射の状態を重ね合わせる方法が意味をもつ時間間隔はわずかとなり、実用的でない。そのため前述の意味での移動境界法を用いることが必要となる。図中の A および B の要素中の x 方向および z 方向の応力成分 (σ_x および σ_z) をこの移動境界法

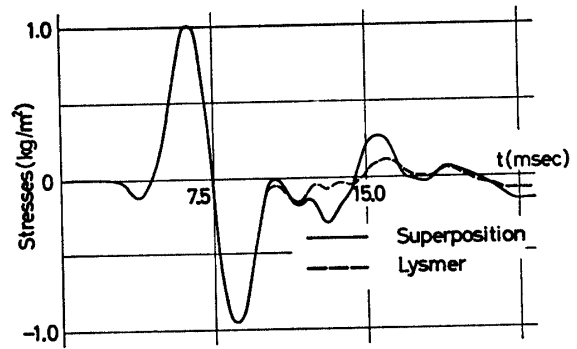


Fig. 8 σ_x in element A for superposition and Lysmer boundaries

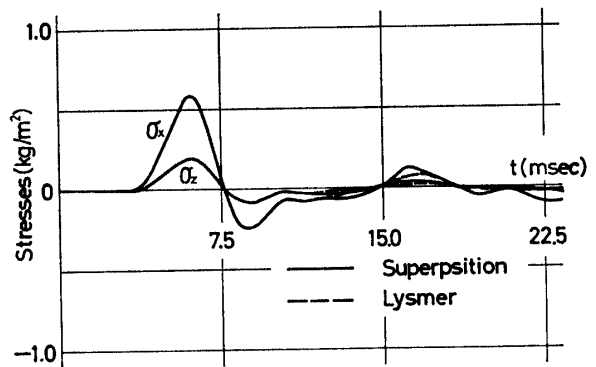


Fig. 9 σ_x and σ_z in element B for superposition and Lysmer boundaries

によって求め図示したものが Fig. 8 および Fig. 9 である。（要素の応力は要素中心の σ_x および σ_z で表わしている）。図中には実体波に対する Lysmer らの方法の結果をも併せて示している。このような二次元問題において垂直境界 ($x = 16m$ の境界) では載荷点からある程度離れると Rayleigh 波が支配的になるといわれており、Lysmer らが調和波動に対して与えた $\sigma_x = a\rho c_p\dot{u}$, $\tau_{xz} = b\rho c_s\dot{w}$ における深さ z に依存した a , b の値では数値計算上の複雑さを含んでいる¹⁾。そのためここでは $a = b = 1$ を採用した。

この問題において正解はいずれの応力状態も最初の大きな正のピークとそれに続く負のピークを持ち、その後急速に減衰するものと考えられる。数値計算の結果、両者の境界条件に対しかなりの応力が2つのピーク通過後も存在し、これらの境界近以にとまらぬ誤差であると考えられるとくに移動境界法では、Lysmer らの方法にくらべて反射波の影響が応力状態にいくらか大きく現われるようであり、その傾向は図中の要素 A に対するものの方が要素 B に対するものよりも大きい。これらについては前の P 波、S 波に対する反

射エネルギー比との関連で検討されるものであろう。

4. おわりに

本研究は無限領域での波動伝播問題を数値解析するための手法として連続状態を固定状態と自由状態と平均的な状態にあるとして扱おうことの妥当性について検討したものである。数値計算例としては入力波を周期が時間刻み Δt に対して $30\Delta t$ の正弦波であり計算法としては逐次計算法に限られているが得られた結果を列挙すると以下のとおりである。

1. 一次元波動の自由端および固定端における反射状態から予想されるように、それぞれで反射された波による応力状態はほぼ完全に絶対値等しく符号が逆となり、両者の重ね合わせによってほぼ完全な連続境界を作ることができる。

2. 自由端および固定端に対する反射を単位時間刻みごとに重ね合わせ、新しい境界を設定していく方法では若干の誤差を生じるが、これは Lysmer らの方法によるものと同程度である。またこの誤差は時間刻み間隔に若干依存する。

3. P 波がある入射角をもって自由および固定境界に入射する場合、入射角 α が小さい間は両者の境界に対して反射 P 波、反射 S 波ともそれらによる応力状態は絶対値はほぼ等しく符号が逆となり、重ね合わせられた反射波のエネルギーはほとんど零となる。入

射角の増加にともない、とくに反射 S 波の重ね合わせ応力値はかなり大きくなるが、実効反射エネルギーで考えるとき、特に大きくはない。これに対し S 波が入射する場合入射角が臨界角に近づくとつれて重ね合わせられた反射波のエネルギーは著るしく大きくなり、臨界角をすぎても反射されるエネルギーは大きい。

4. 二次元問題に重ね合わせにもとづく移動境界法を用いるとき、Lysmer らの方法とくらべて反射の影響をいくらか大きく受けるようである。これは前項に述べた S 波の反射が大きいためであると考えられる。

5. 移動境界法の境界条件の設定はきわめて簡単であり、一次元問題をはじめとし、問題によっては半無限領域に対する遠方境界として有用であると考えられる。

参 考 文 献

- 1) Lysmer, J. and R. L. Kuhlemeyer: "Finite Dynamic Model for Infinite Media", J. of ASCE, 95, EM 4, 859 ~ 877 (1969)
- 2) たとえば長岡弘明, 吉田映, 櫛信昭: "鋼矢板井筒の有限要素振動解析と野外実験結果との比較"土木学会論文報告集, 第254号, 1976年10月, pp. 61~72.
- 3) Kolsky, H.: "Stress Waves in Solids", Dover, 1963.

(昭和52年10月15日受理)