ランダム荷重を受ける単純支持矩形板

中　川　建　治*

Simply Supported Rectangular Plates under Random Loads

Kenji NAKAGAWA

Abstract

This paper deals with the problem of simply supported rectangular plate that is subjected to tranverse loads distributed statically at random, and shows the computing methods of following problems.

1) Mean values and variances of stress and deflection of these loaded plates.
2) Sum of square of the natural periods of unloaded rectangular plate ($T=\Sigma t_i$).
3) Mean and variance of T under random loads.

1. まえがき

構造物に作用する外力のランダム性に着目して，それぞれの構造物に特有な外力を定常確率過程とみなしてパワースペクトル解析に基づいて動的設計を行なうことが試みられている．パワースペクトル解析は，元来，動的設計に適用すべきものであって，外力を確率過程とみなしてその平均値と分散値を求めるほかに，周波数成分の計測を必要とする．

本文では，パワースペクトル解析によってランダムな外力に対する構造物の動的応答を解析する問題と，規定の静荷重による構造物の静的応答を解析する問題の中間的なものとして，ランダムに配列する外力に対する構造物の静的応答を求める方法を論ずる．外力は静的に，かつ，ランダムに配列するものとするので周波数成分というものは考えなくてよく，構造物の応答も平均値と分散値のみを取り扱った．

構造物としては，橋梁の床板における縦桁と横桁で囲まれた矩形板をとり，交通車両の輪荷重を外力とみなして，つぎに示す仮定のように非常に限定された構造物と荷重の系を対象とする．

1）構造物は Fig. 1 で示すような4辺単純支持された矩形板とする．寸法はx方向y方向にaとbとして，板剛度D，ポアッソン比をν，単位面積あたりの質量をζ_0とする．

2）板をそれぞれの辺に平行な直線で，x方向にM等分，y方向にN等分してMN個の区間を想定する．

3）荷重は，分布強度q，分布巾$2u=a/M$，$2v=b/M$とする矩形分布荷重を単位とする．それぞれの単位荷重は，任意のMN個の区間に配列するものとするが，1区間に2個以上は載荷せず，2区間以上にわたって1個の荷重が配置することもないものとする．

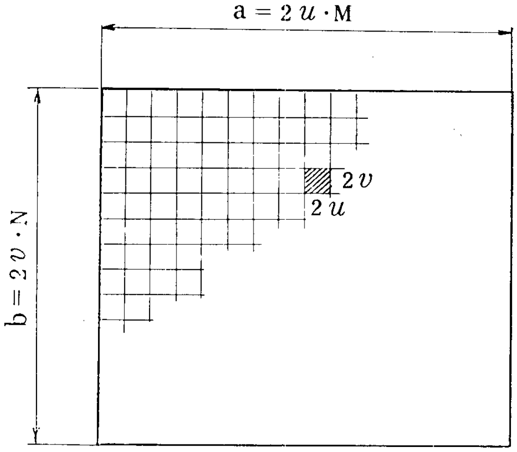

Fig. 1

4）自由振動の問題に限り上記の単位荷重$q\times 2u\times 2v$を，$\zeta\times 2u\times 2v$という単位質量とする．

5）荷重の分布確率としては，面積ab（あるいはMN個の区間）にr個の単位荷重が載荷する確率を$P_1(r)$として具体的にどのような分布にしたがうかを規定しない．ただし，載荷荷重の個数の平均値をr_0分散値をσ^2とする．

$$\left.\begin{aligned} E(r) &= \bar{r} = r_0 \\ V(r) &= E\{(r-r_0)^2\} = \sigma^2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\quad (1.1)$$

* 土木工学教室

r個載荷したという条件 $P_1(r)$ のもとにおける r 個の荷重の MN 個の区間への分布は一様分布を仮定する．すなわち，$P_1(r)$ という条件のもとにおいて任意の一区間に荷重の存在する確率は $P_2(r)=r/MN$ であり，存在しない確率は $1-P_2(r)$ とする．

数式の簡略化を計るために，以下の記述においてつぎのような略記号も使用する．

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{M}=\sum\limits_{i}^{M} \quad \cdot \quad \sum\limits_{m=1.3.5}=\sum\limits_{m}^{O} \\ \sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}=\sum\limits_{ji} \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty}=\sum\limits_{m} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (1.2)$$

2. ランダム荷重による応答

薄板のたわみに関する微分方程式は，

$$\Delta^2\Delta^2 w(x,\ y)=\frac{q(x,\ y)}{D} \qquad \cdots\cdots\cdots (2.1)$$

として与えられている．図—1に示す4辺単純支持の矩形板の任意の区間 $(i,\ j)$ に単位の荷重が載荷したときの点 $(x,\ y)$ に現われるたわみ，および，曲げモーメントなどの影響値 $z_0(x,\ y;i,\ j)$ はつぎのように与えられる．

$$z_0(x,\ y;i,\ j)=q\sum_{m}\sum_{n}A_{mn}\sin\frac{m\Pi}{2M}\sin\frac{n\Pi}{2N}$$
$$\sin\frac{m\Pi}{M}\left(i-\frac{1}{2}\right)\sin\frac{n\Pi}{N}\left(j-\frac{1}{2}\right)\sin\frac{m\Pi}{a}x\ \sin\frac{n\Pi}{b}y \qquad \cdots\cdots\cdots (2.2)$$

ここで，$z_0(x,\ y;i,\ j)$をたわみとするならば，

$$A_{mn}=\frac{16}{\Pi^6 D}\times\frac{1}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)^2} \qquad \cdots\cdots\cdots (2.3)$$

であり，x 方向の曲げモーメントとするならば，

$$A_{mn}=-\frac{16}{\Pi^4}\times\frac{\left(\frac{m^2}{a^2}+\nu\frac{n^2}{b^2}\right)}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2} \cdots\cdots\cdots (2.4)$$

である．

式(2.2)の $z_0(x,\ y;i,\ j)$を影響値と表現をして，あえてわたみとも曲げモートメントとも区別しないのは，以下の演算においては両者とも全く同等な取り扱いとなり，A_{mn} という関数で代表させることが可能であるからである．y 方向の曲げモーメントやセン断力などについても全く同様であり，式(2.3)あるいは式(2.4)に相当する関係式を導くことは容易である．

さて，任意の個数の荷重がランダムに配置する場合の点 $(x,\ y)$ における影響値 $z(x,\ y)$は，個々の荷重によるものの代数和として得られる．

$$z(x,\ y)=\sum_{i}^{M}\sum_{j}^{N}f_{ij}z_0(x,\ y;i,\ j)\cdots\cdots (2.5)$$

ここで f_{ij} は，区間 $(i,\ j)$ に荷重が存在すれば $f_{ij}=1$ であり，存在しなければ $f_{ij}=0$ とする．これが荷重のランダムな配置を決定するものであって，荷重がランダムな確率過程であるとするならば，f_{ij}がその確率変数である．

したがって，式(1.1)との関係はつぎのようになる．

$$\left.\begin{array}{l} P(\sum\limits_{ij}f_{ij}=r)=P_1(r) \\ E(\sum\limits_{ij}f_{ji})=r_0 \\ V(\sum\limits_{ij}f_{ij})=\sigma^2 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (2.6)$$

さらに，r 個載荷という条件のもとにおいては，

$$\left.\begin{array}{l} P\left\{(f_{ij}=1)/r\right\}=\dfrac{r}{MN}=P_2(r) \\ P(f_{ij}\,f_{kl}=1/r)=\dfrac{r(r-1)}{MN(MN-1)} \end{array}\right\} \cdots\cdots (2.7)$$

となる．

式(2.6)式(2.7)の関係より，r 個載荷という条件のもとにおける $z_0(x,\ y;i,\ j)$ の平均値 $\bar{z}_r(x,\ y)$と全体の平均値 $\bar{z}(x,\ y)$を求めると，つぎのようになる．

$$\bar{z}_r(x,\ y)=\frac{r}{MN}\sum_{i}^{M}\sum_{j}^{M}z_0,\ (xy;i,\ j) \qquad \cdots\cdots\cdots (2.8)$$

$$z(x,\ y)=\sum_{r}^{MN}P_1(r)\bar{z}(x,\ y)$$
$$=\frac{r_0}{MN}\sum_{i}^{M}\sum_{j}^{N}z_c(x,\ y;i,\ j) \qquad (2.9)$$

同様にして，r 個載荷という条件のもとにおける分散値 $V_r(z_r)$ と全体としての分散値 $V(z)$ とは，

$$V_r(z_r)=E(z_r{}^2)-(\bar{z}_r)^2 \qquad \cdots\cdots\cdots (2.10)$$

$$V(z)=\sum_{r=1}^{MN}P_1(r)V_r+\sum_{r=1}^{MN}P_1(r)(\bar{z}_r-\bar{z})^2$$
$$=E(V_r)+E\{(\bar{z}_r-\bar{z})^2\} \qquad \cdots\cdots\cdots (2.11)$$

として一般式が得られる．

上記の関係式に式(2.2)を代入すれば逐次平均値や分散値を得るが，式(2.2)はフーリェ級数であるから多少煩雑な演算を必要とする．しかし，$m,\ n$に関しては無限級数であっても，$r,\ i,\ j$については3角関数の有限級数和となるので途中の演算過程はすべて省略して $m,\ n$ に関するもののみを残して結果を示す．

式(2.8)より z_r を求めるために，

$$S_1=\sum_{i}^{M}\sum_{j}^{N}z_0(x,\ y;i,\ j) \qquad \cdots\cdots\cdots (2.12)$$

として式(2.2)を代入すれば，

$$S_1=p\sum_{m}^{O}\sum_{n}^{O}A_{mn}\sin\frac{m\Pi}{a}x\sin\frac{n\Pi}{b}y \cdots\cdots (2.13)$$

$$\therefore \bar{z}_r(x,\ y)=\frac{r}{MN}S_1 \cdots\cdots\cdots (2.14)$$

$$\bar{z}(x,\ y)=\frac{r_0}{MN}S_1 \cdots\cdots\cdots (2.15)$$

となる．ここで S_1 とは，全面に等分布荷重が作用した場合の値にほかならない．影響値の平均値は，散在する荷重を全面に平均分布させた場合の影響値であることを示している．

$$E(z_r{}^2)=P(f_{ij}f_{kl}=1/r)(S_1)^2+\{P(f_{ij}{}^2=1/r)\cdots P(f_{ij}f_{kl}=1/r)\}$$

$$\cdot\sum_{ij}\sum_{m}\sum_{n}A^2{}_{mn}\sin^2\frac{m\Pi}{2M}\sin^2\frac{n\Pi}{2N}\sin^2\frac{m\Pi}{M}\left(i-\frac{1}{2}\right)$$

$$\sin^2\frac{n\Pi}{N}\left(j-\frac{1}{2}\right)\sin^2\frac{m\Pi}{a}x\ \sin^2\frac{n\Pi}{b}y$$

$$=\frac{q^2r}{4}\left(1-\frac{r-1}{MN-1}\right)\sum_{m}\sum_{n}A^2{}_{mn}\ \sin^2\frac{m\Pi}{2M}$$

$$\sin^2\frac{n\Pi}{2N}\sin^2\frac{m\Pi}{a}x\ \sin^2\frac{n\Pi}{b}y$$

$$+\frac{r(r-1)}{MN(MN-1)}S_1{}^2 \cdots\cdots\cdots (2.16)$$

$$\therefore V(z_r)=\frac{q^2r}{4}\left(1-\frac{r-1}{MN-1}\right)\sum_{m}\sum_{n}A^2{}_{mn}\sin^2\frac{m\Pi}{2M}$$

$$\sin^2\frac{n\Pi}{2N}\sin^2\frac{m\Pi}{a}x\sin^2\frac{n\Pi}{b}y$$

$$-\frac{r(MN-r)}{(MN)^2(MN-1)}\ S_1^2 \cdots\cdots\cdots (2.17)$$

載荷数 r は級数和とは独立しているので，全体としての分散を計算するには式（2．6）と式（2．11）より簡単に求められる．

$$V(z)=\frac{q^2(MNr_0-r_0{}^2-\sigma^2)}{4(MN-1)}\sum_{m}\sum_{n}A^2{}_{mn}\sin^2\frac{m\Pi}{2M}$$

$$\sin^2\frac{n\Pi}{2N}\sin^2\frac{m\Pi}{a}x\ \sin^2\frac{n\Pi}{b}\ y$$

$$-\frac{q^2(MNr_0-r_0{}^2-\sigma^2)}{(MN)^2(MN-1)}\ S_1^2+\frac{\sigma^2}{(MN)^2}\ S_1^2$$

$$=\frac{q^2(MNr_0-r_0{}^2-\sigma^2)}{4(MN-1)}\sum_{m}\sum_{n}A^2{}_{mn}\sin^2\frac{m\Pi}{2M}$$

$$\sin^2\frac{n\Pi}{2N}\sin^2\frac{m\Pi}{a}x\ \sin^2\frac{n\Pi}{b}y$$

$$+\frac{\sigma^2MN-r_0(MN-r_0)}{(MN)^2(MN-1)}\ S_1^2 \cdots\cdots\cdots (2.18)$$

3. 固有周期の自乗和

はり，あるいは，ラーメンの自由振動における固有周期 t_i の自乗和 T_0は，単位の荷重を作用させて生ずる載荷点の載荷方向たわみ $w(x)$ にその点の構造部材の単位長さ当りの質量を乗じたものを，構造物のすべての点ですべての自由度方向に積分することによって得られる[2)].

$$T_0=\sum_i t_i^2$$

$$=4\Pi^2\int\zeta(x)w(x)dx \cdots\cdots\cdots (3.1)$$

この関係は矩形板の自由振動においてもそのまま成立することが，つぎのようにして簡単に証明される．

条件1）で規定したような板の自由振動の運動方程式は，

$$\zeta_0\frac{\partial^2w}{\partial t^2}+D\Delta^2\Delta^2w=0 \cdots\cdots\cdots (3.2)$$

となり固有値は式（3．3）となることは周知のことである．

$$\omega^2{}_{mn}=\frac{\Pi^2D}{\zeta_0}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2 \cdots\cdots\cdots (3.3)$$

したがって固有周期の和はつぎのようになる．

$$T_0=\frac{4\zeta_0}{\Pi^2D}\sum_{mn}\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2} \cdots\cdots\cdots (3.4)$$

さて，式（3．1）を上述の矩形板に適用して固有周期の自乗和を求めるには，任意の1区間に $\zeta_0\times 2u\times 2v$ なる単位荷重を載荷したときのその区間の中央点のたわみを板全体にわたって総和すればよい．

$$T_0{}'=4\Pi^2\zeta_0\sum_{ij}\sum_{m}\sum_{n}A_{mn}\sin\frac{m\Pi}{2M}\sin\frac{n\Pi}{2N}$$

$$\sin^2\frac{m\Pi}{M}\left(i-\frac{1}{2}\right)\sin^2\frac{n\Pi}{N}\left(j-\frac{1}{2}\right)$$

$$=MN\Pi^2\zeta_0\sum_{m}\sum_{n}A_{mn}\sin\frac{m\Pi}{2M}\sin\frac{n\Pi}{2N}$$

$$\cdots\cdots\cdots (3.5)$$

ここでM，$N\to\infty$ とすれば，

$$T_0{}'=\frac{\Pi^4}{4}\zeta_0\sum_{m}\sum_{u}A_{mn}\cdot mn$$

となる．A_{mn}はたわみに関するものであるから，式（2．3）を代入すればよい．

$$\therefore T_0{}'=\frac{4\zeta_0}{\Pi^2D}\sum_{mn}\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2} \cdots\cdots\cdots (3.6)$$

$$=T_0$$

この場合は回転振動の成分は考慮していないが，たわみに比べて微小であるから省略した．

4. 質量が散在する矩形板

構造物に活荷重が作用して強制振動が起こる場合に，活荷重を質量を持たない強制力とみなして解析することが多い．ここでは活荷重を強制力とはせずに，質量とみなして矩形板の一部分として全体で自由振動するものとする．すなわち，単位面積当り ζ_0 の質量をもつ矩形板の任意の区間に $\zeta\times 2u\times 2v$ という質量が散在しているものとして，この系の固有周期の自乗

和の変動を求める．

各々の固有周期の変動を求めるかわりに固有周期の自乗和の変動を求めるのは，固有周期の変動を求めるのは非常に困難であることと，強制振動において重要な要素となる低次振動周期ほど自乗和の中において大きな部分を占め，低次振動周期の変動が自乗和の変動において支配的となるであろうと推定し得ることに基づいたものである．

無載荷時の周期の自乗和は式（3．4）におけるT_0であるから，r個の質量が載荷したことによるTの変動を$\varDelta T_r$とする．ランダムに配置する質量の分布法則は前述の単位荷重の場合と等しいとすれば，$\varDelta T_r$についてはつぎの結果を得る．

$$E(\varDelta T_r)=r\cdot\zeta\sum_m\sum_n A_{mn}\sin\frac{m\Pi}{2M}\sin\frac{n\Pi}{2N} \quad \cdots\cdots\cdots (4.1)$$

$\varDelta T$ を全体としての変動とすれば，

$$E(\varDelta T)=r\cdot\zeta\sum_m\sum_n A_{mn}\sin\frac{m\Pi}{2M}\sin\frac{n\Pi}{2N} \quad \cdots\cdots\cdots (4.2)$$

を得る．3角関数の有限級数和については式（4．3）が成立するので，分散値はつぎのようになる．

$$\sum_i^N\sin^4\frac{m\Pi}{M}\left(i-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}M$$

$$\sum_i^N\sin^2\frac{m\Pi}{M}\left(i-\frac{1}{2}\right)\sin^2\frac{m'\Pi}{M}\left(i-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\sum_i^N\sin^2\frac{m\Pi}{M}\left(i-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}M \quad \cdots\cdots\cdots (4.3)$$

$$V(\varDelta T_r)=E\{(\varDelta T_r)^2\}-\{E(\varDelta T_r)\}^2 \cdots (4.4)$$

$$E\left\{(\varDelta T_r)^2\right\}=\frac{\zeta^2\Pi^4MNr(r-1)}{(MN-1)}\left(\sum_m\sum_n A_{mn}\sin\frac{m\Pi}{2M}\sin\frac{n\Pi}{2N}\right)^2+\frac{\zeta^2\Pi^4r}{4}\left(1-\frac{r-1}{MN-1}\right)\left\{\sum_m\sum_n A^2_{mn}\sin^2\frac{m\Pi}{2M}\sin^2\frac{n\Pi}{2N}\right.$$
$$+2\sum_m\sin^2\frac{m\Pi}{2M}\left(\sum_n A_{mn}\sin\frac{n\Pi}{2N}\right)^2+2\sum_n\sin^2\frac{n\Pi}{2N}\left(\sum_m A_{mn}\sin\frac{m\Pi}{2M}\right)^2$$
$$\left.+4\left(\sum_m\sum_n A_{mn}\sin\frac{m\Pi}{2M}\sin\frac{n\Pi}{2N}\right)^2\right\} \cdots\cdots (4.5)$$

$$\therefore V(\varDelta T_r)=\frac{\zeta^2\Pi^4r}{4}\left(1-\frac{r-1}{MN-1}\right)\left\{\sum_m\sum_n A^2_{mn}\sin^2\frac{m\Pi}{2M}\sin^2\frac{n\Pi}{2N}+2\sum_m\sin^2\frac{m\Pi}{2M}\left(\sum_n A_{mn}\sin\frac{n\Pi}{2N}\right)^2\right.$$
$$\left.+2\sum_n\sin^2\frac{n\Pi}{2N}\left(\sum_m A_{mn}\sin\frac{m\Pi}{2M}\right)^2\right\} \cdots\cdots (4.6)$$

$$V(\varDelta T)=\frac{\zeta^2\Pi^4(MNr_0r_0^2-\sigma^2)}{4(MN-1)}\left\{\sum_m\sum_n A^2_{mn}\sin^2\frac{m\Pi}{2M}\sin^2\frac{n\Pi}{2N}+2\sum_m\sin^2\frac{m\Pi}{2M}\left(\sum_n A_{mn}\sin\frac{n\Pi}{2N}\right.\right.$$
$$\left.+2\sum_n\sin^2\frac{n\Pi}{2N}\left(\sum_m A_{mn}\sin\frac{m\Pi}{2\mathrm{M}}\right)^2\right\}$$
$$+\sigma^2\zeta^2\left(\sum_m\sum_n A_{mn}\sin\frac{m\Pi}{2M}\sin\frac{n\Pi}{2N}\right)^2 \cdots\cdots (4.7)$$

ここで，級数和の部分のみ M，$N\to\infty$ とすれば，それぞれつぎのように簡単になる．

$$E(\varDelta T_r)=\frac{4\zeta_1 r}{D\Pi^2MN}\sum_m\sum_n\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2} \quad (4.8)$$

$$E(\varDelta T)=\frac{4\zeta r_0}{D\Pi^2MN}\sum_m\sum_n\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2} \quad (4.9)$$

$$V(\varDelta T_r)=\frac{\zeta^2r(MN-r)}{4D^2\Pi^4(MN)^2(MN-1)}\left[\sum_m\sum_n\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^4}+\sum_m\left\{\sum_n\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\right\}^2+\sum_n\left\{\sum_m\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\right\}^2\right] \quad \cdots\cdots\cdots (4.10)$$

$$V(\varDelta T)=\frac{\zeta^2(MNr_0-r_0^2-\sigma^2)}{4D^2\Pi^4(MN)^2(MN-1)}\left[\sum_m\sum_n\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^4}+\sum_m\left\{\sum_n\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\right\}^2+\sum_n\left\{\sum_m\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\right\}^2\right]+\frac{\sigma^2\zeta^2}{(MN)^2D^2\Pi^4}\left\{\sum_m\sum_n\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\right\}^2 \quad \cdots\cdots\cdots (4.11)$$

5．バネによって支えられる場合

矩形板上に散在する質点がバネ定数Kのバネによって支えられている場合，直接板によって支えられている場合に比べて固有周期の自乗和がどのように変化するであろうか．

式（3．1）の積分を行なうについて，バネが介在したことによって質量$\zeta\times2u\times2v$に対する$P=1$によるたわみが$1/K$だけ増加する．これによるT_0の増分は，バネがどの質点と板の間に介在しようとも等しくなり，r個の質点がバネによって支えられているならば

$$\delta_r=\frac{r}{K}\frac{ab}{MN\zeta} \quad \cdots\cdots\cdots (5.1)$$

となる．それぞれ強さの異なったバネが介在するならば

$$\delta_r=\frac{ab\zeta}{MN}\sum_1^r\frac{1}{K_i} \quad \cdots\cdots\cdots (5.2)$$

となることは，式（3．1）より明らかである．

このようにして，バネによって支えられた質点が散在する矩形板全体を一つの振動系とするならば，固有周期の自乗和の変動は比較的簡単に求められる．

6. む　す　び

矩形板に荷重がランダムに，かつ，静的に作用した場合の影響値の変動の計算法を導いたが，フーリェ複級数を含む級数和で表現されるために，卓上計算機によって計算することは困難である．それぞれの場合について電子計算機によって計算しなければ満足し得る結果を得難い．

実際にこのような問題はどのような場合に要求されるかについてはまだ確証し得ない．

満載荷重を受けることがきわめて稀れな矩形板の疲労の問題を検討するような場合に，平均応力と変動量は不可欠な要素になろう．しかしこのような問題ではさらに一歩進めて時間のパラメーターを考慮し，変動周期について解明する必要がある．今後の課題としたい．

参　考　文　献

1) S. Timoshenko : Theory of Plates and Shells. (1940)
2) S. H. Crandall : Engineering Analysis. (1956)

（昭和41年10月14日受理）