

# 周期性従動荷重を受ける骨組構造物の 動的弾性安定解析

會田忠義\*・安部 保\*\*

Analysis of Dynamic Elastic Stability of Framed Structures  
Subjected to the Periodic Follower Loads

Tadayoshi AIDA and Tamotsu ABE

## Abstract

When the Structures be lacking in stiffness are subjected to the periodic loads, the parametrically excited vibration occur in it. Therefore, examination of dynamic elastic stability for these structures results in analysis of stability of the parametrically excited vibration. One of the authors, Aida, has presented a method of analysis for dynamic elastic stability of framed structures subjected to the unidirectional periodic loads in Ref. (10) and (11). In this report, a method of analysis for dynamic elastic stability under periodic follower loads is proposed.

Hsu's instability conditions are applied in judging the stability of solution of the differential equation with periodic elements, i.e., variational equation of motion by which stability of phenomenon are discussed. In last chapter, instability regions of columns and parabolic arches which are calculated by the proposed method are shown.

## 1. まえがき

周期性荷重を受ける骨組構造物は、構造物の変形が大きい場合は係数励振振動を起し、弾性安定性の調査は係数励振振動の安定性を調べることに帰着する。この係数励振振動の主な不安定現象としては、subharmonic resonance と combination resonance があり、これらについてはこれまでに多くの研究がなされている<sup>1)~9)</sup>。構造物により前者のみしか生じないものと、両者が生ずるものがあり、荷重によっても前者が主に生じ、後者は生じにくい場合と両者が同程度生じる場合がある。著者の一人、會田は一定方向周期性荷重を受ける骨組構造物の動的弾性安定性の解析法をすでに発表している<sup>10), 11)</sup>。本研究は荷重の作用方向が構造物の変形にとまって変化する周期性従動荷重が作用する場合の骨組構造物の動的弾性安定性の解析を試みたものである (Fig. 1参照)。

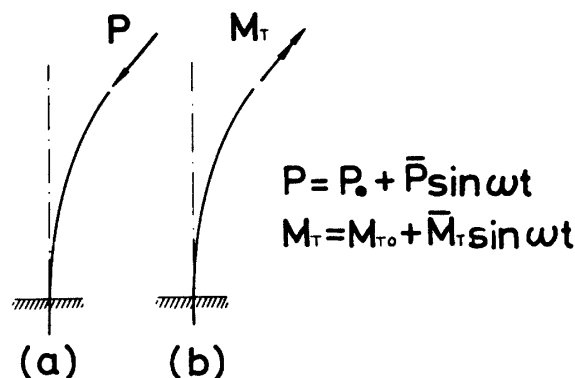


Fig.1 Structures subjected to the follower loads

本研究では減衰の影響を無視し、解析には下記に示す仮定を入れ、現象の安定あるいは不安定を論ずる運動の微分方程式 (variational equation) を次の手順で導いた。初めに、安定な微小振動状態の節点の運動方程式を求めた。次に、この状態に外乱、すなわち、変位変分を加えた状態について変形の大きさを考慮した節点の運動方程式を求め、両方の運動方程式より変位変分に関する周期係数をもつ微分方程式を導いた。ここで、かく乱状態の運動方程式を導くにあたり線形

\* 土木工学科

\*\* (株)熊谷組

化した有限変形法理論を適用した。

- ① 外力はすべて構造物の節点に作用する。
- ② 周期性荷重の振幅および非周期性荷重の大きさはそれぞれ一定の割合で漸変する。
- ③ 周期性荷重はすべて一定の周期をもつ。
- ④ 荷重は質量をもたない。
- ⑤ 骨組については骨組構造物一般の仮定が成立する。
- ⑥ 内力はすべて比例限内にある。
- ⑦ 局部的不安定現象は生じない。
- ⑧ 構造物の質量は節点に集中する (集中質量系である)。

周期係数をもつ微分方程式の解の安定あるいは不定定の判定には、摂動法を用い近似的に求められたHsuの不安定条件<sup>4)</sup>を用いた。

本文の最後には、本研究の方法を用いて柱および放物線アーチを解析し、柱については差分法を用いた杉山の解析結果<sup>7)8)</sup>と比較検討した。

2. 運動方程式

非周期性荷重の大きさおよび周期性荷重の振幅あるいは振動数の大きさが構造物固有のある限度内、すなわち、安定領域内にある場合、これらのわずかな変化に対してわずかな変位変化があるだけで時間の経過とともに変位の増加はない。しかし、上記の値がある限度を越えると、すなわち、不安定領域に入ると、これまでの変形様式と異なった振動が生じ、時間の経過とともに振動変位が無限度に増大する不安定現象が生ずる。安定領域では近似的に微小振幅の運動方程式が成立するが、不安定領域では微小振幅の運動方程式は成立せず、有限振幅の運動方程式が成立することになる。

本研究では、まず初めに、非周期性荷重の大きさおよび周期性荷重の振幅あるいは振動数の大きさが安定領域の境界近傍のある値をとり、安定振動状態にある場合を想定する。次に、これらの諸値の微小変化により不安定領域に入り不安定振動状態になった場合を想定する。不安定状態の節点の運動方程式を骨組構造物の変形後の節点の動的つり合い式より求める。以下に節点総数  $m$  の立体剛結構造物について運動方程式を示す。

2.1 微小振幅時の運動方程式

節点  $i$  に作用する非周期性荷重ベクトルを  $P_{oi}$ 、周期性荷重ベクトルを  $\bar{P}_i \sin \omega t$  とする。  $\omega$  は円振動数

である。

$$P_{oi} = \{X_{oi}, Y_{oi}, Z_{oi}, U_{oi}, V_{oi}, W_{oi}\}^T \dots (1)$$

$$\bar{P}_i = \{\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i, \bar{U}_i, \bar{V}_i, \bar{W}_i\}^T \dots (2)$$

節点  $i$  の変位ベクトルを  $d_i$  で表わす。特に、非周期性荷重による変位ベクトルを  $d_{oi}$ 、周期性荷重による変位ベクトルを  $\bar{d}_i$  とする。

$$d_i = \{u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}\}^T \dots (3)$$

$$d_{oi} = \{u_{oi}, v_{oi}, w_{oi}, \theta_{xoi}, \theta_{yoi}, \theta_{zoi}\}^T \dots (4)$$

$$\bar{d}_i = \{\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i, \bar{\theta}_{xi}, \bar{\theta}_{yi}, \bar{\theta}_{zi}\}^T \dots (5)$$

さらに、節点  $i$  の座標をベクトル  $f_i$  で表わし、部材  $ij$  の  $i$  端の断面の主軸回転角を  $\alpha_{ij}^{10)}$  で表わす。

$$f_i = \{x_i, y_i, z_i\}^T \dots (6)$$

すると、節点  $i$  の微小振幅時の運動方程式は次式で表わされる<sup>10)</sup>。

$$W_i \frac{d^2 \bar{d}_i}{dt^2} = - \sum_j T_{ij}(f_i, f_j, \alpha_{ij}) N'_{ij} (d_{oi} + \bar{d}_i, d_{oj} + \bar{d}_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) - P_{oi} - \bar{P}_i \sin \omega t \dots (7)$$

ここで、 $W_i$  は節点  $i$  の質量マトリックス<sup>10)</sup>、 $T_{ij}$  は局部座標軸方向の量を全体座標軸方向の諸量に変換するための座標変換マトリックス<sup>10)</sup>、 $N'_{ij}$  は部材  $ij$  の  $i$  端における局部座標系に関する材端力ベクトル<sup>10)</sup> である。また、式中、 $\sum_j$  は節点  $i$  と部材で連結される節点  $j$  についての和を表わす。

式 (7) を構造物の各節点に適用することにより、一連の運動方程式が得られる。拘束条件を考慮し、マトリックス表示すると次式となる。ただし、 $n < m$ 。

$$W \frac{d^2 \bar{d}}{dt^2} + K_1 (d_0 + \bar{d}) = -P_0 - \bar{P} \sin \omega t \dots (8)$$

$$W = \begin{pmatrix} W_1 & & O \\ & W_2 & \\ O & & W_n \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} P_{01} \\ P_{02} \\ \vdots \\ P_{0n} \end{pmatrix}, \bar{P} = \begin{pmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \bar{P}_n \end{pmatrix}$$

$$d_0 = \begin{pmatrix} d_{01} \\ d_{02} \\ \vdots \\ d_{0n} \end{pmatrix}, \bar{d} = \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \vdots \\ \bar{d}_n \end{pmatrix} \dots (9)$$

$K_1$ : 剛性マトリックス。

2.2 有限振幅時の運動方程式

安定領域の境界近傍にある状態から、非周期性荷重の大きさおよび周期性荷重の振幅あるいは振動数の大きさが微小量だけ変化し、動的不安定領域の境界近傍のある値を取った場合を想定する。この場合、変位増加 (変位変分) は有限量となり増加する。この変位の増加量を  $\Delta \bar{d}_i$  で表わすと、節点  $i$  の運動方程式は近似的であるが、次式で表わされる。

$$W_i \frac{d^2}{dt^2} (\bar{d}_i + \Delta \bar{d}_i) = - \sum_j T_{ij}(f_i + \Delta f_i, f_j + \Delta f_j, \alpha_{ij} + \Delta \alpha_{ij}) N'_{ij} (d_{oi} + \bar{d}_i + \Delta \bar{d}_i, d_{oj} + \bar{d}_j + \Delta \bar{d}_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) - P_{oi} - \bar{P}_i \sin \omega t - \varepsilon_i A_i (P_{oi} + \bar{P}_i \sin \omega t) \dots (10)$$

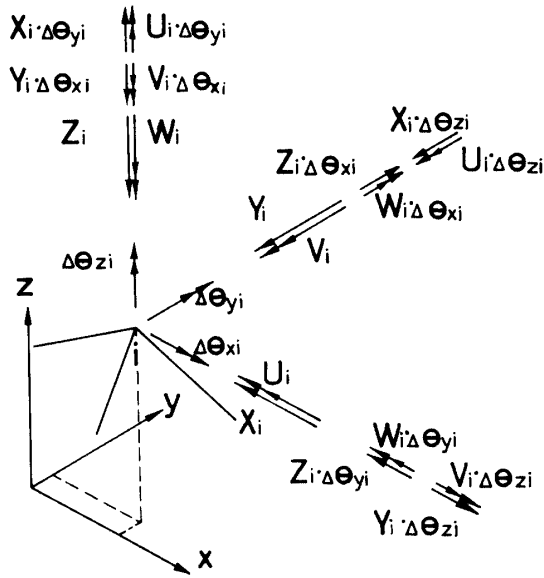


Fig. 2 Nodal follower forces and torques

ここで、 $\Delta f_i$  および  $\Delta f_j$  は変位増加による構造物の形状の変化にともなう節点座標の変化量であり、これらの量は節点  $i$  および  $j$  の変位増加量に等しい。すなわち、 $\Delta f_i = \Delta d_i$ 、 $\Delta f_j = \Delta d_j$ 、また  $\Delta \alpha_{ij}$  は  $\alpha_{ij}$  の変化量である。マトリックス  $A_i$  は回転変位 ( $\bar{\theta}_{xi}$ ,  $\bar{\theta}_{yi}$ ,  $\bar{\theta}_{zi}$ ) の変化量を ( $\Delta \bar{\theta}_{xi}$ ,  $\Delta \bar{\theta}_{yi}$ ,  $\Delta \bar{\theta}_{zi}$ ) するとき、荷重が完全な従動力あるいは従動トルクの場合、Fig. 2 より明らかなように次に示す値をもつ。

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta \bar{\theta}_{zi} & \Delta \bar{\theta}_{yi} & 0 & 0 & 0 \\ \Delta \bar{\theta}_{zi} & 0 & -\Delta \bar{\theta}_{xi} & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta \bar{\theta}_{yi} & \Delta \bar{\theta}_{xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta \bar{\theta}_{zi} & \Delta \bar{\theta}_{yi} \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \bar{\theta}_{xi} & 0 & -\Delta \bar{\theta}_{yi} \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta \bar{\theta}_{yi} & \Delta \bar{\theta}_{xi} & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$\epsilon_i$  は節点  $i$  に作用する荷重の従動度を表わす係数で、荷重が従動力あるいは従動トルクでない場合は  $\epsilon_i = 0$  になり、荷重が完全な従動力あるいは従動トルクの場合は  $\epsilon_i = 1$  になる。したがって、 $\epsilon_i A_i (P_{oi} + \bar{P}_i \sin \omega t)$  は従動にともなう荷重の変動量を表わす。以上より明らかなように  $A_i P_{oi}$  および  $A_i \bar{P}_i \sin \omega t$  は次のように書き直すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_i A_i P_{oi} &= \epsilon_i B_{oi} \Delta \bar{d}_i \\ \epsilon_i A_i \bar{P}_i \sin \omega t &= \epsilon_i \bar{B}_i \Delta \bar{d}_i \sin \omega t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

ここで、

式(10)において  $T_{ij}$  および  $N'_{ij}$  を展開して  $\Delta \bar{d}_i$  の2次以上の項を無視し、さらに、微小振幅時の運動方程式を考慮して  $\Delta \bar{d}_i$  を新たに  $d_i$  とおくと、式(10)は次のように整理される。

$$B_{oi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{oi} & -Y_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & -Z_{oi} & 0 & X_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & Y_{oi} & -X_{oi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_{oi} & -V_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & -W_{oi} & 0 & U_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & V_{oi} & -U_{oi} & 0 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (13)$$

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Z}_i & -\bar{Y}_i \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{Z}_i & 0 & \bar{X}_i \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Y}_i & -\bar{X}_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{W}_i & -\bar{V}_i \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{W}_i & 0 & \bar{U}_i \\ 0 & 0 & 0 & \bar{V}_i & -\bar{U}_i & 0 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (14)$$

$$W_i \frac{d^2 d_i}{dt^2} = - \sum_j T_{ij}(f_i, f_j, \alpha_{ij}) N'_{ij}(d_i, d_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) - \sum_j \{ H_{ij}(f_i, f_j, \alpha_{ij}, N'_{oij} + \bar{N}'_{ij}) d_i + H_{jij}(f_i, f_j, \alpha_{ij}, N'_{oij} + \bar{N}'_{ij}) d_j \} - \epsilon_i (B_{oi} + \bar{B}_i \times \sin \omega t) d_i \dots \dots \dots (15)$$

式中、 $N'_{oij}$  は  $P_o$  が作用したときの部材  $ij$  の  $i$  端の材端力ベクトル、 $\bar{N}'_{ij}$  は微小振幅時の同部材の材端力ベクトルである。

$$\left. \begin{aligned} N'_{oij} &= N'_{ij}(d_{oi}, d_{oj}, f_i, f_j, \alpha_{ij}) \\ \bar{N}'_{ij} &= N'_{ij}(\bar{d}_i, \bar{d}_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

$H_{ij}$  および  $H_{jij}$  は以下に示す<sup>10)</sup>である。

$$H_{ij}(f_i, f_j, \alpha_{ij}, N'_{oij} + \bar{N}'_{ij}) = \left\{ \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} (N'_{oij} + \bar{N}'_{ij}), \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_i} (N'_{oij} + \bar{N}'_{ij}), \frac{\partial T_{ij}}{\partial z_i} (N'_{oij} + \bar{N}'_{ij}), \lambda_{ij} \times \frac{\partial T_{ij}}{\partial \alpha_{ij}} (N'_{oij} + \bar{N}'_{ij}), \mu_{ij} \frac{\partial T_{ij}}{\partial \alpha_{ij}} (N'_{oij} + \bar{N}'_{ij}), \nu_{ij} \frac{\partial T_{ij}}{\partial \alpha_{ij}} (N'_{oij} + \bar{N}'_{ij}) \right\}$$

$$H_{jij}(f_i, f_j, \alpha_{ij}, N'_{oij} + \bar{N}'_{ij}) = \left\{ \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} (N'_{oij} + \bar{N}'_{ij}), \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j} (N'_{oij} + \bar{N}'_{ij}), \frac{\partial T_{ij}}{\partial z_j} (N'_{oij} + \bar{N}'_{ij}), O, O, O \right\} \dots \dots \dots (17)$$

いま、非周期性荷重の基準となる荷重（基準荷重とよぶ）状態における節点  $i$  に作用する荷重ベクトルを  $\bar{P}_{oi}$  で、周期性荷重の基準荷重状態における節点  $i$  に作用する荷重ベクトルを  $\bar{P}_i \sin \omega t$  とするとき、実際に作用する荷重（実荷重） $P_{oi}$  および  $\bar{P}_i$  は次の関係を満たす。

$$P_{oi} = P_o \bar{P}_{oi}, \quad \bar{P}_i = \bar{P} \bar{P}_i, \quad \dots \dots \dots (18)$$

( $i=1, 2, \dots, m$ )

ここで、

$$\bar{P}_{oi} = \{ \bar{X}_{oi}, \bar{Y}_{oi}, \bar{Z}_{oi}, \bar{U}_{oi}, \bar{V}_{oi}, \bar{W}_{oi} \}^T \dots \dots \dots (19)$$

$$\bar{P}_i = \{ \bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i, \bar{U}_i, \bar{V}_i, \bar{W}_i \}^T \dots \dots \dots (20)$$

$P_o$  および  $\bar{P}$  はそれぞれ非周期性荷重および周期性荷重について、実荷重と基準荷重との比である。すなわち、実荷重  $P_{oi}$  および  $\bar{P}_i$  はそれぞれ基準荷重の  $P_o$

倍および  $\bar{P}$  倍であることを示している。したがって、非周期性荷重および周期性荷重の基準荷重状態における部材  $ij$  の  $i$  端の局部座標系での材端力ベクトルをそれぞれ  $\tilde{N}'_{oij}$  および  $\tilde{N}'_{ij} \sin \omega t$  とすると、実荷重による同部材の材端力ベクトル  $N'_{oij}$  および  $\tilde{N}'_{ij}$  は次式で表わされる。

$$N'_{oij} = P_o \tilde{N}'_{oij} \dots \dots \dots (21)$$

$$\tilde{N}'_{ij} = \bar{P} \tilde{N}'_{ij} \sin \omega t \dots \dots \dots (22)$$

さらに、基準荷重作用状態におけるマトリックス  $\tilde{B}_{oi}$  および  $\tilde{B}_i$  をそれぞれ  $\tilde{B}_{oi}$  および  $\tilde{B}_i$  とすると、これらには前述と同様、次の関係が成立する。

$$\tilde{B}_{oi} = P_o \tilde{B}_{oi}, \quad \tilde{B}_i = \bar{P} \tilde{B}_i \dots \dots \dots (23)$$

( $i=1, 2, \dots, m$ )

$\tilde{B}_{oi}$  および  $\tilde{B}_i$  はそれぞれ次の値をもつ。

$$\tilde{B}_{oi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{Z}_{oi} & -\tilde{Y}_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{Z}_{oi} & 0 & \tilde{X}_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{Y}_{oi} & -\tilde{X}_{oi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{W}_{oi} & -\tilde{V}_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{W}_{oi} & 0 & \tilde{U}_{oi} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{V}_{oi} & -\tilde{U}_{oi} & 0 \end{pmatrix} \dots \dots (24)$$

$$\tilde{B}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{Z}_i & -\tilde{Y}_i \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{Z}_i & 0 & \tilde{X}_i \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{Y}_i & -\tilde{X}_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{W}_i & -\tilde{V}_i \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{W}_i & 0 & \tilde{U}_i \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{V}_i & -\tilde{U}_i & 0 \end{pmatrix} \dots \dots (25)$$

以上の関係より式(15)は次のように整理される。

$$W_i \frac{d^2 d_i}{dt^2} = - \sum_j T_{ij} (f_i, f_j, \alpha_{ij}) N'_{ij} (d_j, d_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) - P_o \sum_j \{ H_{ij} (f_i, f_j, \alpha_{ij}, \tilde{N}'_{oij}) d_i + H_{jij} (f_i, f_j, \alpha_{ij}, \tilde{N}'_{oij}) d_j \} - \bar{P} \sin \omega t \sum_j \{ H_{ij} (f_i, f_j, \alpha_{ij}, \tilde{N}'_{ij}) d_i + H_{jij} (f_i, f_j, \alpha_{ij}, \tilde{N}'_{ij}) d_j - \varepsilon_i (P_o \tilde{B}_{oi} + \bar{P} \tilde{B}_i \sin \omega t) d_i \} \dots \dots (26)$$

上式が節点  $j$  の有限振幅時の運動を表わす微分方程式 (Variational equation) である。

式(26)を骨組構造物のすべての節点に適用し、さらに、拘束条件を考慮してマトリックス表示すると、次式となる。

$$W \frac{d^2 d}{dt^2} + (P_o K_4 + \bar{P} K_5 \sin \omega t + P_o K_3 + \bar{P} K_2 \sin \omega t + K_1) d = 0 \dots \dots (27)$$

ここで、 $W$  と  $K_1$  は式(8)と同じであり、 $K_2$  および  $K_3$  はそれぞれ基準荷重  $\tilde{P}_i$  および  $\tilde{P}_{oi}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) が作用したときの初期応力マトリックスであり、 $K_4$  および  $K_5$  はそれぞれ次に示す値をもつ。

$$K_4 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \tilde{B}_{o1} & & 0 \\ & \varepsilon_2 \tilde{B}_{o2} & \\ 0 & & \varepsilon_n \tilde{B}_{on} \end{pmatrix}, \quad K_5 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \tilde{B}_1 & & 0 \\ & \varepsilon_2 \tilde{B}_2 & \\ 0 & & \varepsilon_n \tilde{B}_n \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \dots \dots \dots (28)$$

### 3. Hsu の不安定条件

Hsu は周期係数をもつ常微分方程式における解の不安定条件の第一近似を摂動法を応用して一般的な形で誘導している。詳細な式の説明は Hsu の原論文<sup>4)</sup> にゆずることとし、ここでは非減衰時の要件のみを示す。

本研究に示すような周期力を受ける非減衰有限自由度力学系の正規化された運動方程式を下記に示す形で表わすことができる。

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + (B^{(0)} + \delta D \cos \omega t) X = 0 \dots \dots (29)$$

ここで、 $\delta$  は正の微小パラメータであり、 $X$  は従属変数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  のベクトル、 $B^{(0)}$  はすべての要素が正である対角マトリックスで、その対角要素は上式において  $\delta=0$  のときの固有振動数の二乗  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$  からなる。ただし、 $\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$  とする。

$D$  は要素が  $d_{ij}$  であるような正方マトリックスである。

この場合、励振振動数  $\omega$  が系の固有振動数のある組み合わせに近いとき、すなわち、次の条件を満す範囲に  $\omega$  があるとき共振を起し不安定となる (Hsu の不安定条件) ことが明らかにされている。

- (a)  $\omega = \omega_k + \omega_l + \delta \lambda \quad k \neq l$   
 $(\omega_k + \omega_l) - \frac{\delta}{2} \sqrt{\frac{d_{kl} d_{lk}}{\omega_k \omega_l}} < \omega < (\omega_k + \omega_l) + \frac{\delta}{2} \sqrt{\frac{d_{kl} d_{lk}}{\omega_k \omega_l}} \dots \dots (30)$
- (b)  $\omega = 2\omega_k + \delta \lambda$   
 $2\omega_k - \frac{\delta}{2} \frac{|d_{kk}|}{\omega_k} < \omega < 2\omega_k + \frac{\delta}{2} \frac{|d_{kk}|}{\omega_k} \dots \dots (31)$
- (c)  $\omega = \omega_l - \omega_k + \delta \lambda \quad l > k$   
 $(\omega_l - \omega_k) - \frac{\delta}{2} \sqrt{\frac{-d_{kl} d_{lk}}{\omega_l \omega_k}} < \omega < (\omega_l - \omega_k) + \frac{\delta}{2} \sqrt{\frac{-d_{kl} d_{lk}}{\omega_l \omega_k}} \dots \dots (32)$

ここで、 $\lambda$  は任意の定数である。

上記(a)に対応する不安定領域を  $k$  次モードと  $l$  次モードの和形係数励振不安定領域、(b)に対応するものを  $k$  次モードの主不安定領域、(c)に対応するものを  $l$  次モードと  $k$  次モードの差形係数励振不安定領域とよばれている。

### 4. 柱およびアーチ系構造物の不安定領域

骨組構造物の有限振幅時の運動方程式(27)に Hsu の不安定条件を適用することにより、柱については境界条件の異なった四種類のものに周期性集中荷重と周期

性等分布接線従動荷重が作用する場合、アーチについては面内変形アーチと面外変形アーチと面外変形アーチに対してそれぞれに周期性鉛直従動荷重が作用する場合の不安定領域を調べた。

解析に当り、柱については柱長を10等分割し、アーチについてはスパン方向を10等分割して集中質量系とした。

4.1 柱の不安定領域

柱長 60cm, 断面 4.0cm×0.2cm のアルミニウム柱で、Fig. 3 および 4 に示す八種類を対象とする。

柱頭に周期性集中荷重が作用する場合 (Fig. 3) の不安定領域の計算結果を次の一般形で表わしたとき、

$$a - b \frac{\bar{P}}{P_*} < \frac{\omega}{2\omega_2} < a + b \frac{\bar{P}}{P_*} \dots\dots\dots(33)$$

各場合における  $a$  および  $b$  の値は Table 1 の通りである。ここで、 $\bar{P}$  は荷重振幅、 $P_*$  は Euler の臨界荷重、 $\omega$  は

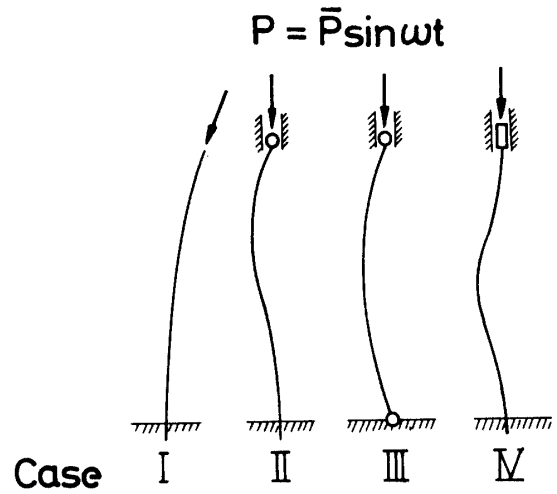


Fig.3 Columns subjected to the concentrated periodic loads

Table 1 Coefficients of Eq. (33) for columns under the periodic concentrated load

Kind of column Type of instability region	Case I		Case II		Case III		Case IV	
	$P_{**}=10.48$ $\omega_2=174.0$		$P_*=10.80$ $\omega_2=398.9$		$P_*=5.230$ $\omega_2=315.7$		$P_*=21.46$ $\omega_2=491.8$	
	a	b	a	b	a	b	a	b
Principal (for 1st mode)	0.163 (0.162)	0.058 (0.050)	0.313 (0.308)	0.076 (0.076)	0.253	0.063	0.368 (0.363)	0.089 (0.090)
Principal (for 2nd mode)	1.0 (1.010)	0.132 (0.153)	1.0 (0.989)	0.084 (0.088)	1.0	0.061	1.0 (0.995)	0.116 (0.122)
Sum type (between 1st and 2nd modes)	0.418* (0.418)*	0.124* (0.113)*	0.656 (0.649)	0.015 (0.010)	0.0	0.0	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
Sum type (between 1st and 3rd modes)	1.445 (1.403)	0.106 (0.081)	1.178 (1.168)	0.010 (0.011)	0.0	0.0	1.143 (1.143)	0.034 (0.032)

Unit:  $P_*$  and  $P_{**}$  kg,  $\omega_2$  rad/sec.  
 ( )...values from Ref. (7) and (8).  
 \*.....Difference type between 1st and 2nd modes.

励振振動数、 $\omega_2$  は柱の二次の固有円振動数である。特に、Case I の場合はフラッタ形不安定となるため  $P_*$  の代りに  $P_{**}$  (Beck の臨界荷重) を用いて無次元した結果である。

周期性等分布接線従動荷重が作用する場合 (Fig. 4) の不安定領域の計算結果を次の一般形で表わしたとき、

$$c - d \frac{\bar{q}}{q_{**}} < \frac{\omega}{2\omega_2} < c + d \frac{\bar{q}}{q_{**}} \dots\dots\dots(34)$$

各柱に対する  $c$  および  $d$  の値は Table 2 の通りである。ここで、 $\bar{q}$  は柱の単位長さ当りに作用する等分布接線従動荷重の振幅、 $q_{**}$  は同荷重が定常的に作用すると

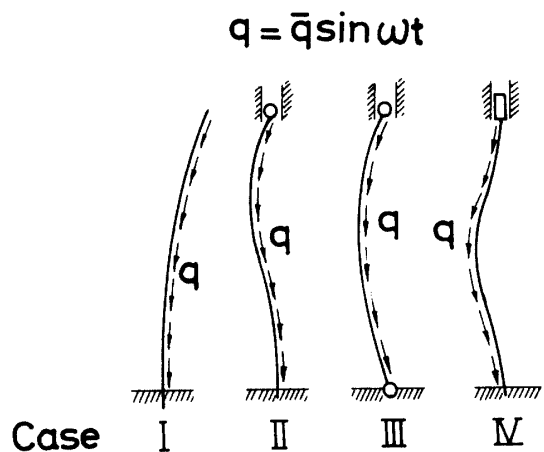


Fig.4 Columns subjected to the uniformly distributed periodic loads

Table 2 Coefficients of Eq. (34) for columns under the uniformly distributed periodic load

Kind of column Type of instability region	Case I		Case II		Case III		Case IV	
	$q_{**}=0.3500$ $\omega_2=174.0$		$q_{**}=0.5157$ $\omega_2=398.9$		$q_{**}=0.1678$ $\omega_2=315.7$		$q_{**}=0.7337$ $\omega_2=491.8$	
	c	d	c	d	c	d	c	d
Principal (for 1st mode)	0.163	0.010	0.313	0.013	0.253	0.010	0.368	0.015
Principal (for 2nd mode)	1.0	0.022	1.0	0.017	1.0	0.010	1.0	0.019
Difference type (between 1st and 2nd modes)	0.418	0.20	0.344	0.004	0.627*	0.004*	0.316	0.002
Sum type (between 1st and 3rd modes)	1.445	0.013	1.178	0.005	0.0	0.0	1.143	0.005

Unit:  $q_{**}$  kg/cm,  $\omega_2$  rad/sec.

\*.....Sum type between 1st and 2nd modes.

きの臨界値で、この値の算出は文献(12)の方法によった。

4.2 面内変形アーチの不安定領域

スパン 100cm (Fig. 5) で、Fig. 6 (a) に示す断面をもつアルミニウム製の放物線アーチを対象とし、各節点に大きさの等しい集中荷重が作用する場合を想定する。

対象アーチは面内変形が卓越する。したがって、変形前、鉛直下向きに作用していた荷重はアーチの変形にともなって荷重作用点の回転変位に等しいだけアー

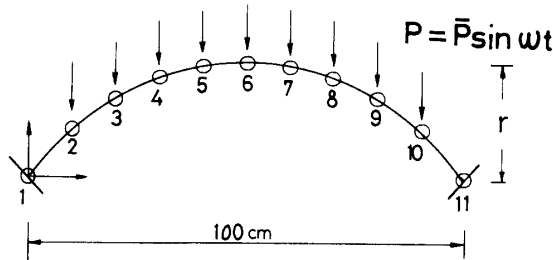


Fig. 5 Skeleton of parabolic arch subjected to the periodic follower loads

チ面内で回転しその方向をかえる。

境界条件として、両端固定および両端ヒンジを考え、アーチライズが 20, 40, 60, 80 および 100cm について不安定領域の変化状態を調べた。

不安定領域の計算結果を次の一般形で表わしたとき、  

$$e - f \frac{\bar{P}}{P_{**}} < \frac{\omega}{2\omega_2} < e + f \frac{\bar{P}}{P_{**}} \dots \dots \dots (35)$$
 各アーチについての  $e$  および  $f$  の値は Table 3 および 4

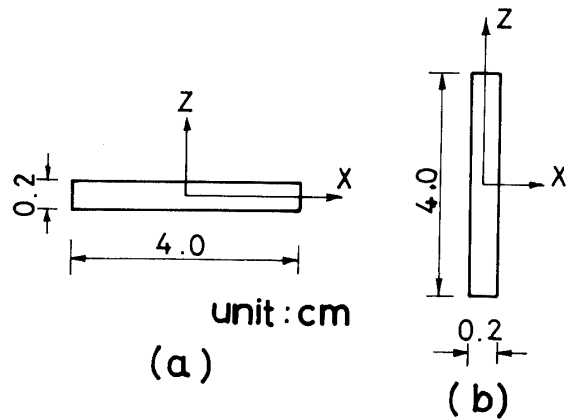


Fig. 6 Cross sections of arch

Table 3 Coefficients of Eq. (35) for in-plane deforming arches clamped at both ends

Kind of arch Type of instability region	Rise=20cm		Rise=40cm		Rise=60cm		Rise=80cm		Rise=100cm	
	$P_{**}=2.099$ $\omega_2=265.7$		$P_{**}=2.444$ $\omega_2=177.3$		$P_{**}=1.930$ $\omega_2=122.3$		$P_{**}=1.392$ $\omega_2=73.73$		$P_{**}=1.009$ $\omega_2=51.43$	
	e	f	e	f	e	f	e	f	e	f
Principal (for 1st mode)	0.510	0.125	0.455	0.120	0.438	0.119	0.432	0.120	0.430	0.119
Principal (for 2nd mode)	1.0	0.141	1.0	0.141	1.0	0.139	1.0	0.138	1.0	0.134
Sum type (between 1st and 3rd modes)	1.094	0.025	1.060	0.009	0.626*	0.018*	0.642*	0.023*	0.647*	0.025*

Unit:  $P_{**}$  kg,  $\omega_2$  rad/sec.

\*.....Difference type.

Table 4 Coefficients of Eq. (35) for in-plane deforming arches hinged at both ends

Kind of arch Type of instability region	Rise=20cm		Rise=40cm		Rise=60cm		Rise=80cm		Rise=100cm	
	$P_{**}=0.9048$ $\omega_2=199.1$		$P_{**}=0.8967$ $\omega_2=127.5$		$P_{**}=0.6414$ $\omega_2=78.86$		$P_{**}=0.4388$ $\omega_2=51.37$		$P_{**}=0.3077$ $\omega_2=35.60$	
	e	f	e	f	e	f	e	f	e	f
Principal (for 1st mode)	0.421	0.109	0.381	0.101	0.368	0.100	0.363	0.100	0.361	0.098
Principal (for 2nd mode)	1.0	0.105	1.0	0.102	1.0	0.99	1.0	0.100	1.0	0.094
Sum type (between 1st and 3rd modes)	1.100	0.003	1.100	0.012	1.120	0.017	1.134	0.019	1.140	0.019

Units are the same as Table 3.

の通りである。ここで、 $\bar{P}$ は節点に作用する荷重の振幅、 $P_{**}$ は荷重が定常的に作用するときの臨界値で、この値は文献(12)の方法により算出した。いずれのライズの場合もダイバージェンス形不安定の臨界値に対応する。

### 4.3 面外変形アーチの不安定領域

スパン 100cm (Fig. 5 と同じ) で、Fig. 6 (b) に示す断面をもつアルミニウム製の放物線両端固定アーチを

対象とし、前項と同様の荷重状態を想定する。対象アーチは面外変形が卓越する。したがって、荷重は変形前、鉛直下向きに作用しているが、アーチの変形にもなって荷重作用点の回転変位に等しいだけアーチ面外へ回転しその方向をかえる。

アーチライズが 20, 40, 60, 80 および 100cm である場合について不安定領域を調べた。不安定領域の計算結果を次の一般形で表わしたとき、

$$g - h \frac{\bar{P}}{P_{**}} < \frac{\omega}{2\omega_2} < g + h \frac{\bar{P}}{P_{**}} \quad (36)$$

Table 5 Coefficients of Eq. (36) for out-of-plane deforming arches clamped at both ends

Kind of arch Type of instability region	Rise=20cm		Rise=40cm		Rise=60cm		Rise=80cm		Rise=100cm	
	$P_{**}=1.311$ $\omega_2=141.9$		$P_{**}=2.602$ $\omega_2=63.32$		$P_{**}=2.088$ $\omega_2=59.13$		$P_{**}=1.375$ $\omega_2=41.27$		$P_{**}=0.9538$ $\omega_2=30.81$	
	g	h	g	h	g	h	g	h	g	h
Principal (for 1st mode)	0.353	0.086	0.342	0.053	0.305	0.027	0.283	0.064	0.264	0.078
Principal (for 2nd mode)	1.0	0.148	1.0	0.252	1.0	0.235	1.0	0.191	1.0	0.164
Difference type (between 1st and 3rd modes)	1.155*	0.034*	0.891	0.124	0.793	0.195	0.734	0.203	0.684	0.199

Units are the same as Table 3.

\*.....Sum type.

各アーチについての  $g$  および  $h$  の値は Table 5 の通りである。ここで、 $P_{**}$ は荷重が定常的に作用するときの臨界値で、算出方法は前項と同様である。ライズが 20cm の場合はダイバージェンス形不安定の臨界値、ライズが 60cm 以上の場合はフラッタ形不安定の臨界値である。

### 5. 結 び

線形化した有限変形法理論を用い、有限振幅時の運動方程式を導びくことにより周期性従動荷重を受ける

一般的な骨組構造物の動的弾性安定性の一解析法を Hsu の不安定条件を適用することにより提示した。

本研究の方法を柱頭に周期性荷重を受ける柱に適用した結果、既往の研究結果とよく一致し、本研究の妥当性を確かめることができた。ついで、周期性等分布接線従動荷重を受ける柱の不安定領域も明らかにした。鉛直下向きの周期性従動荷重を受ける面内変形アーチの不安定領域はライズの変化にもなってその幅が変化することは勿論であるが、両端ヒンジアーチでは 1 次と 3 次の和形不安定領域がライズの増加にもなって差形不安定領域に変化することが認められた。

面外変形アーチにおいても同時，不安定領域の幅が変化することは勿論であるが，1次と3次の和形不安定領域がライズの増加にともなって差形不安定領域に変化することが認められた。

本研究の数値計算は，九州大学大型計算機センターのFACOM 230-75 および山口大学電子計算機室のFACOM 230-28により行なった。

#### 参 考 文 献

- 1) 西野吉次：東京帝国大学航空研究所彙報，**176**，93 (1934)
- 2) Utida, I. and Sezawa, K.: Rep. Aero. Inst., Tokyo Imp. Univ., **193**，139 (1940)
- 3) Bolotin, V.V.: The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day, Inc., San Francisco, 1964
- 4) Hsu, C.S.: Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., **30**，367 (1963)
- 5) 山本敏男，斎藤明彦：日本機械学会論文集，**33**，215 (1967)
- 6) 山本敏男，斎藤明彦：日本機械学会論文集，**33**，905 (1967)
- 7) 杉山吉彦，岩壺卓三，石原国彦：日本機械学会論文集，**39**，1850 (1973)
- 8) 岩壺卓三，杉山吉彦，西郷宗玄：日本機械学会論文集，**40**，1576 (1974)
- 9) Iwatusbo, T., Sugiyama, Y. and Ogino, S.: J. Sound & Vibr., **33**，211 (1974)
- 10) 會田忠義，佐伯博三，窪田 彰：土木学会論文報告集 **249**，29 (1976)
- 11) Aida, T: Tech. Rep. Yamaguchi Univ. **1**，537 (1976)
- 12) 會田忠義，波木健一：土木学会論文報告集，**263**，25 (1977)

(昭和52年4月14日受理)