

有限要素法による混合モードに対する J 積分値の精度の向上について

清水 茂俊*・河野 俊一*・山村 基久**

On the Accuracy of J -integral Value Evaluated by Finite Element Method for Mixed Mode

Shigetoshi SHIMIZU, Shun-ichi KAWANO and Motohisa YAMAMURA

Abstract

G. R. Irwin proposed that the stresses at the vicinity of a crack tip were approximately expressed by using the stress intensity factor K , and the critical K_c -value was denoted the fracture toughness characterized as one of the material properties for the cracked plate.

Several cases of K -value were formulated by M. Isida, A. S. Kobayashi, O. L. Bowie, B. Gross and et al. However, for the K -value of a finite plate with the complex geometry, it is very difficult to obtain analytically. Therefore the numerical methods were proposed, which were the boundary collocation method and the Finite Element Method (FEM) and so on.

Recently, G. P. Anderson, I. R. Dixon, W. K. Wilson, Y. Yamamoto and et al. suggested the method to evaluate the K -value by using FEM.

On the other hand, J. R. Rice proposed the J -integral method and indicated that the J -value was path-independent. The J -value was expressed that $J=G=K^2/E$ for the plane stress condition on Mode I. It is advantage of the method that small mesh divisions in the vicinity of crack tip are not required in order to evaluate the accurate J -integral value by using FEM.

Almost these investigation were for K_I (Mode I) and few analysis for mixture mode using by FEM. T. K. Hellen has defined that $J=J_1-iJ_2$ and theoretically proved that

$$J_1=(K_I^2+K_{II}^2)/E, J_2=-2K_I K_{II}/E \text{ (plane stress)}$$

on mixed mode. Applying this new J -integral method to the numerical solutions of FEM were called "direct method", however, J_2 -values contained many errors along the path of crack edges.

The aim of this paper is to make less these errors by extending the "superposition method" which is already proposed by authors for the Mode I. In order to investigate the accuracy of this method, the results are compared with the numerical results obtained by W. K. Wilson's method.

1. 緒 言

G. R. Irwin¹ は、亀裂先端近傍の応力場を 応力拡大係数 (K 値) の導入によって記述し、この K 値が材料定数としての臨界値 K_c に達したときに破壊が生じることを提案して脆性破壊の定量的な説明に成功した。

これに伴って、N. I. Muskhelishvili²⁾ の方法など

の二次元弾性理論によって K 値に対する数多くの解析が行なわれ、M. Isida³⁾、A. S. Kobayashi⁴⁾、O. L. Bowie⁵⁾、B. Gross⁶⁾ などにより種々の境界条件に対する K 値が公式化されている⁷⁾⁸⁾。

しかし、一般に複雑な境界条件の場合 K 値を理論的に求めるのは困難であるため、選点法や有限要素法 (FEM) などの数値解析が用いられている。特に FEM による解析^{9)~15)} は、その汎用性と最近の急速な電子計算機の発達によって、数値解析の主流となっている。一方、J. R. Rice¹⁶⁾ は亀裂先端を囲む J 線積分法を提唱し、 J 積分値と K 値との間には $J=G=K^2/E$ (平

* 機械工学科

** 帝人精機株式会社

面応力) の関係があり, また J 値は積分経路に依存せず一定となることを示した。この J 値の経路独立性の特長は, 応力勾配の大きな個所, 換言すると亀裂先端近傍では微細な要素分割を必要とする FEM の本質的な欠点を緩和し, 比較的粗い要素分割で精度のよい K_I 値を得ることを可能とした。

ところで, これらの FEM を用いた数値解析は全て Mode I (K_I 値) を対象にしており, 外力が亀裂面に対してある角度をもつ斜め亀裂のように, Mode I と Mode II が共存する混合モードに対してはほとんど報告されていない。特に Rice の提唱した J 積分は, 混合モードに対して $J=G=(K_I^2+K_{II}^2)/E$ (平面応力) となり, K_I と K_{II} 値を分離して決定できない欠点がある。

これに対して, T. K. Hellen¹⁷⁾ は, 混合モードに対する J 値を $J=J_1-iJ_2$ と定義することによって, 平面応力状態では $J_1=(K_I^2+K_{II}^2)/E$, $J_2=-2K_I K_{II}/E$ となることを理論的に証明し, K_I と K_{II} 値を分離決定することが可能となることを示した。しかし, FEM に直接この理論を適用すると, J_2 の積分路に亀裂先端が含まれるため, 亀裂先端近傍の要素を極端に細分化しない限り計算誤差が大きくなる恐れがある。また, J_1, J_2 値を用いて K_I, K_{II} 値を求める際, J_1, J_2 値の誤差の相乗効果により誤差が拡大されることが考えられるので, 精度の良い J_1, J_2 値を得る必要がある。

既報¹⁸⁾¹⁹⁾ で著者らは, 亀裂先端近傍の応力場をあらゆる無限板に対する解析解と FEM による計算結果を重ね合せ, これに J 積分法を用いる方法を提案し高精度の K_I 値および J 値が求まることを報告した。

本報告は著者らの方法を混合モードに適用拡大し, J_1 および J_2 値の精度の高上を試みたものである。

まず, 重ね合せ法に用いる解析解を得るため, 引張方向に傾斜した直線亀裂を有する無限板について Muskhelishvili²⁾ の方法によって応力解析を行った。

次に, 本方法による計算結果と選点法を用いた W. K. Wilson²¹⁾ の解を比較検討し, 本計算方法による精度の確認を行った。

2. 基礎式の導入

2.1 混合モードにおける J 積分値

Fig. 1 (a) に示すように, 負荷方向に対し β だけ傾いた亀裂をもつ有限板の境界 S に一様な外力 σ_0 が作用する場合, 亀裂先端近傍の応力ベクトル σ^a は次式で表わせる²⁰⁾。

$$\sigma^a = [K_I^\infty \cdot F_I^a(2a/W, \beta)/(2\pi r)^{1/2}] \cdot f_I(r, \theta)$$

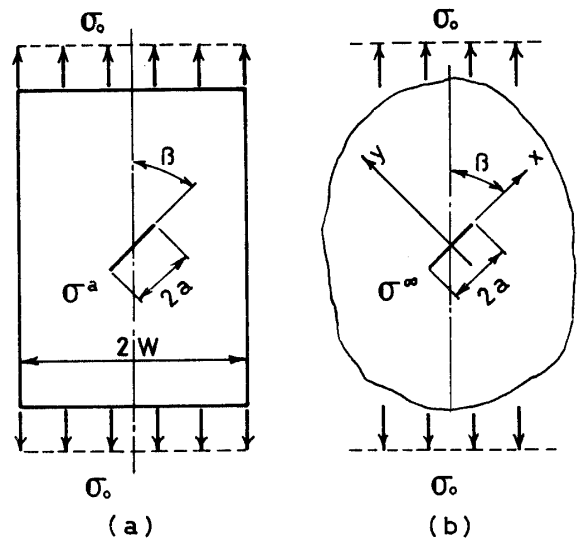


Fig. 1 Finite and infinite plate contained a slant crack subjected to a uniform tension.

$$+ [K_{II}^\infty \cdot F_{II}^a(2a/W, \beta)/(2\pi r)^{1/2}] \cdot f_{II}(r, \theta) \quad (1)$$

ただし

F_I^a, F_{II}^a : 有限板の無限板に対する修正係数

$2a/W$: 亀裂長さと板幅の比

β : 亀裂の長さ方向の荷重方向のなす角

r, θ : 亀裂共端を原点にとった場合の極座標

ここで, $K_I^\infty, K_{II}^\infty$ は Fig. 1(b) に示すように, 無限遠方で σ_0 が作用する場合の応力拡大係数であり,

$$\left. \begin{aligned} K_I^\infty &= \sigma_0 \sqrt{\pi a} \sin^2 \beta \\ K_{II}^\infty &= \sigma_0 \sqrt{\pi a} \sin \beta \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となる。また f_I^a, f_{II}^a は平面応力の場合, 次のようになる²⁰⁾。

$$\left. \begin{aligned} f_I^a &= \begin{cases} \cos(\theta/2) [1 - \sin(\theta/2) \cdot \sin(3\theta/2)] \\ \cos(\theta/2) [1 + \sin(\theta/2) \cdot \sin(3\theta/2)] \\ \cos(\theta/2) \cdot \sin(\theta/2) \cdot \cos(3\theta/2) \end{cases} \\ f_{II}^a &= \begin{cases} -\sin(\theta/2) [2 + \cos(\theta/2) \cdot \cos(3\theta/2)] \\ \sin(\theta/2) \cdot \cos(\theta/2) \cdot \cos(3\theta/2) \\ \cos(\theta/2) [1 - \sin(\theta/2) \cdot \sin(3\theta/2)] \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(1) 式右辺の K_I^∞ と $F_I^a(2a/W, \beta)$, ($i=I, II$) の積を有限板の応力拡大係数 K_I^a , ($i=I, II$) と定義すると

$$K_I^a = K_I^\infty \cdot F_I^a(2a/W, \beta), \quad (i=I, II)$$

となる。従って無限板に対する有限板の修正係数は次式で表わされる。

$$F_I^a(2a/W, \beta) = K_I^a / K_I^\infty, \quad (i=I, II) \quad (4)$$

なお、添字 a は有限板に、 ∞ は無限板に対する関数を表わすものとする。

一方 Hellen¹⁷⁾ は、Fig. 2 に示すような亀裂先端を含む応力場の任意の閉曲線 Γ について、次のような複素 J 積分を定義した。

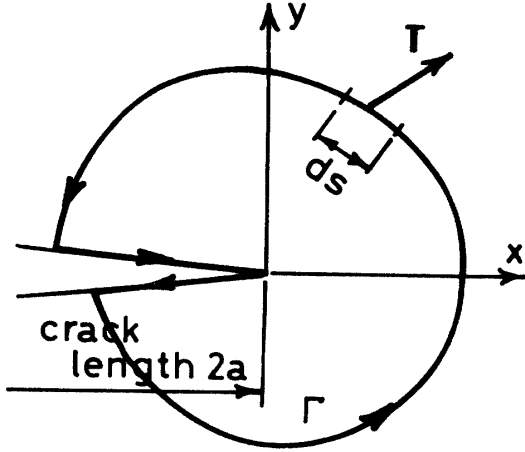


Fig. 2 Crack tip coordinates and typical J -integral contour.

$$\left. \begin{aligned} J &= J_1 - iJ_2 \\ J_i &= \oint_{\Gamma} \left[W n_i - T \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] ds, \quad (i=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで

W : ひずみエネルギー密度, u : 変位ベクトル,

T : Γ 上のトラクションベクトル

n_i : x_i 方向の方向余弦

また Hellen は J_1, J_2 が積分経路独立性を有し、 J_1, J_2 と K_I, K_{II} との間に関係が成り立つことを示した。

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= G = (1+\nu)(1+\chi)(K_I^2 + K_{II}^2)/4E \\ J_2 &= -(1+\nu)(1+\chi)K_I K_{II}/4E \\ \chi &= \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu) & \text{(平面応力)} \\ 3-4\nu & \text{(平革ひずみ)} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ただし、 ν はポアソン比、 E は縦弾性係数、 G はひずみエネルギー解放率である。(6) の第1式が Rice の提案した J 積分¹⁶⁾ であり、また第1、第2式から K_I, K_{II} は次式で表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \lambda [c_1(J_1 + J_2)^{1/2} + d_1(J_1 - J_2)^{1/2}] \\ K_{II} &= \lambda [c_2(J_1 + J_2)^{1/2} + d_2(J_1 - J_2)^{1/2}] \\ \lambda &= [E / \{(1+\nu)(1+\chi)\}]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで c_i, d_i ($i=1, 2$) はそれぞれ応力場によって

定まり、 ± 1 の値をとる。

2.2 混合モードに対する重ね合せ法

(5) 式で示した J 積分を直接 FEM の計算結果に適用した場合、 J_1 については上下の亀裂面上における値が相殺するため、亀裂先端近傍の要素分割を極端に細くする必要はない。すなわち、亀裂先端からある程度離れた積分路をとることによって、応力勾配が大きく従って FEM による計算誤差が大きい亀裂先端近傍を避けることができる。しかし、 J_2 は亀裂面上で上述の相殺がないため、亀裂先端近傍の応力解析の精度の向上、換言すると FEM において亀裂先端近傍を細分化する必要があり、要素分割の方法によっては誤差が大きくなる恐れがある。そこで、亀裂先端近傍の応力場を表わす解析解と FEM の計算結果を重ね合せ、これに J 積分法を適用した著者らの方法を混合モードへ拡張し、 J 値の精度向上を試みる。

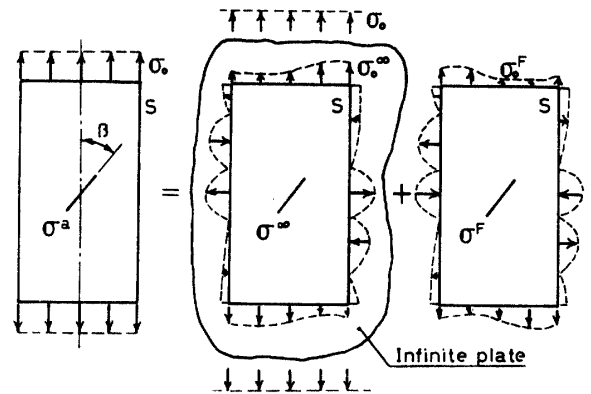


Fig. 3 Superposition method based on analytical and numerical solution by using FEM.

Fig. 3 に示すように、負荷方向に対し傾き角 β の亀裂を有する有限板の境界 S に外力 σ_0 が作用する場合、有限板中の応力ベクトル σ^a は次のように表わすことができる。

$$\sigma^a = \sigma^\infty + \sigma^F \quad (8)$$

ここで σ^∞ は無限板の無限遠方で一様な外力 σ_0 が作用する場合の亀裂先端近傍の応力ベクトルであり、Fig. 3 に示す σ^∞ は無限板中に境界 S を仮想した場合の境界 S に作用する外力ベクトルである。また、 σ^F は S に $\sigma_0^F = \sigma_0 - \sigma_0^\infty$ が作用する場合の応力ベクトルである。

Fig. 3 に示すように、 S に σ_0^F の外力が作用する場合の応力拡大係数を K_I^F, K_{II}^F とすると (1)、(4) 式に

より $F_i(2a/W, \beta)$ ($i=I, II$) は次のようになる。

$$F_i(2a/W, \beta) = 1 + K_i^f / K_i^\infty \quad (i=I, II) \quad (9)$$

J_1, J_2 と K_I, K_{II} の間には (7) 式の関係があるので、これを (9) 式に代入することによって次のような式を得る。

$$F_i(2a/W, \beta) = \left[1 + \left(\frac{J_1^f}{J_1^\infty} \right)^{1/2} \cdot \left\{ C_i^f \left(1 + \frac{J_2^f}{J_1^f} \right)^{1/2} + d_i^f \left(1 - \frac{J_2^f}{J_1^f} \right)^{1/2} \right\} \right. \\ \left. / \left\{ C_i^\infty \left(1 + \frac{J_2^\infty}{J_1^\infty} \right)^{1/2} + d_i^\infty \left(1 - \frac{J_2^\infty}{J_1^\infty} \right)^{1/2} \right\} \right] \quad (i=I, II) \quad (10)$$

(9), (10) 式が混合モードに重ね合せ法を適用した場合の修正係数である。 K_i^∞ ($i=I, II$), および J_i^∞ ($i=1, 2$) は無限板に対する解析解から容易に求められるので、 J_1^f, J_2^f のみを FEM によって求めればよい。

3. 一様な引張りをうける無限板に斜め亀裂がある場合の応力解析

2.2 節で述べた σ^∞ および σ_0^∞ の厳密解は次のようにして求めることができる。

Fig. 1 (b) に示すように、荷重方向に対して β だけ傾いた長さ $2a$ の亀裂を有する無限板の応力は、Muskhelishvili の応力関数を用いて次のように表わせる²⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\text{Re}\Phi'(z) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z} \cdot \Phi''(z) + \Psi''(z)] \\ z &= x + iy \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここで ()' は d/dz を、 Re は実数部を、() は共役複素数を表わす。 z 平面から ζ 平面への写像関数を次のようにおくと

$$\left. \begin{aligned} z = \omega(\zeta) &= a(\zeta + 1/\zeta)/2 \\ \zeta &= \xi + i\eta \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(11) 式の複素応力関数は

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi(\omega(\zeta)) = \varphi(\zeta) \\ \Psi'(z) &= \Psi'(\omega(\zeta)) = \psi(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

に写像される。一般に $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ は次のように置くことができる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{a}{2} A \zeta - \frac{P+iQ}{2\pi(1+\chi)} \log \zeta + \varphi_0(\zeta) \\ \psi(\zeta) &= \frac{a}{2} A' \zeta + \frac{\chi(P-iQ)}{2\pi(1+\chi)} \log \zeta + \psi_0(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここで、 P, Q は亀裂面に作用する外力の和の x, y 方向の成分であり、 A, A' は (14) 式を (11) 式に代入して $|z| \rightarrow \infty$ とすることにより、無限遠点で作用する外力から求まる値である。また (14) 式右辺の最後の項は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(\zeta) &= \frac{-1}{2\pi i} \oint_r \frac{f_0}{\delta - \zeta} d\delta \\ \psi_0(\zeta) &= \frac{-1}{2\pi i} \oint_r \frac{f_0}{\delta - \zeta} d\delta + \frac{\zeta(1+\zeta^2)}{1+\zeta^2} \varphi_0'(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ただし、 $\delta = e^{i\theta}$, θ は ζ 平面における偏角、 r は単位円を表わす。また、 f_0 は

$$\begin{aligned} f_0 &= f - \frac{a}{2} A \left\{ \delta + \frac{\delta^2+1}{\delta(1-\delta^2)} \right\} - \frac{A' a}{2\delta} \\ &+ \frac{P+iQ}{2\pi} \log \delta + \frac{P-iQ}{2\pi(1+\chi)} \frac{\delta^2+1}{1-\delta^2} \end{aligned} \quad (16)$$

となり、境界条件は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} f &= \varphi(\delta) + \frac{1}{\delta} \frac{1+\delta^2}{1-\delta^2} \overline{\varphi'(\delta)} + \overline{\psi(\delta)} \\ \bar{f} &= \overline{\varphi(\delta)} + \frac{1}{\delta} \frac{1+\delta^2}{1-\delta^2} \varphi'(\delta) + \psi(\delta) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Fig. 1 (b) に示すように無限遠方で一様な引張応力 σ_0 を受ける場合、 $P=Q=0$ であり、これより

$$\left. \begin{aligned} A &= \bar{A} = \sigma_0/4 \\ A' &= -\sigma_0 e^{-2i\beta}/2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

となる。(18) 式を (16) 式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= -\frac{\sigma_0 a}{8} \left[\delta + \frac{1+\delta^2}{\delta(1-\delta^2)} \right] + \frac{\delta_0 a}{4} e^{2i\beta} \\ \bar{f}_0 &= -\frac{\sigma_0 a}{8} \left[\frac{1}{\delta} + \frac{\delta(1+\delta^2)}{1-\delta^2} \right] + \frac{\sigma_0 a \delta}{4} e^{2i\beta} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

となり、(19) 式を (15) 式に代入して φ_0, ψ_0 を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta) &= \frac{-1}{2\pi i} \left[-\frac{\sigma_0 a}{8} \oint_r \frac{\delta}{\delta - \zeta} d\delta - \frac{\sigma_0 a}{8} \right. \\ &\left. \int_r \frac{1+\delta^2}{\delta(1-\delta^2)} \frac{d\delta}{(\delta - \zeta)} + \frac{\sigma_0 a e^{2i\beta}}{4} \int_r \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{\delta - \zeta} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

ここで Cauchy の積分定理によれば

$$\int_r \frac{\delta}{\delta - \zeta} d\delta = 0, \quad \int_r \frac{1}{\delta(\delta - \zeta)} d\delta = -\frac{2\pi i}{\zeta},$$

$$\int_r \frac{1+\delta^2}{\delta(1-\delta^2)(\delta-\zeta)} d\delta = 0$$

であるから上式を (20) 式に代入して整理すると $\varphi_0(\zeta)$ は次式に示すようになる。

$$\varphi_0(\zeta) = -\sigma_0 a (1 - 2e^{2i\beta}) / (8\zeta) \quad (21)$$

同様にして

$$\phi_0(\zeta) = -\frac{\sigma_0 a}{8} \left\{ \frac{1}{\zeta} + \frac{2\zeta}{\zeta^2 - 1} + \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta(\zeta^2 - 1)} (1 - 2e^{2i\beta}) \right\} \quad (22)$$

(21), (22) 式を (14) 式に代入して整理すると

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{\sigma_0 a}{8} \left(\zeta + \frac{2e^{2i\beta} - 1}{\zeta} \right) \\ \phi(\zeta) &= -\frac{\sigma_0 a}{4} \left[e^{-2i\beta} \zeta + \frac{e^{2i\beta}}{\zeta} + \frac{2\zeta(1 - e^{2i\beta})}{\zeta^2 - 1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

となる。(11) 式の第 1 式の $\Phi'(z)$ は (13) 式より

$$\begin{aligned} \Phi'(z) &= d\{\varphi(\zeta)\} / dz \\ &= [d\{\varphi(\zeta)\} / d\zeta] / (dz / d\zeta) \end{aligned} \quad (24)$$

(23) 式および (12) 式より

$$\begin{aligned} d\{\varphi(\zeta)\} / dz &= \sigma_0 a [1 - (2e^{2i\beta} - 1) / \zeta^2] / 8 \\ dz / d\zeta &= a(\zeta^2 - 1) / (2\zeta^2) \end{aligned}$$

となるので、上式を (24) 式に代入して

$$\Phi'(z) = \sigma_0 \{1 - 2(e^{2i\beta} - 1) / (\zeta^2 - 1)\} / 4 \quad (25)$$

同様にして $\Phi''(z)$, $\Psi''(z)$ は

$$\Phi''(z) = 2\sigma_0 \zeta^3 (e^{2i\beta} - 1) / \{(\zeta^2 - 1)^3 \cdot a\}$$

$$\Psi''(z) = -\frac{\zeta^2}{2(\zeta^2 - 1)} \sigma_0 \left[e^{-2i\beta} - \frac{e^{2i\beta}}{\zeta^2} - \frac{(1 - e^{2i\beta})(\zeta^2 + 1)}{(\zeta^2 - 1)^2} \right]$$

となり、

$$\bar{z} = a(\bar{\zeta} + 1 / \bar{\zeta}) / 2 \quad (27)$$

であるから、(25), (26) および (27) 式を (11) 式に代入すると、負荷方向に対し β だけ傾斜した亀裂を有する無限板の応力成分は次に示すように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} - \frac{e^{2i\beta} - 1}{\zeta^2 - 1} - \frac{(e^{2i\beta} - 1)(\bar{\zeta}^2 + 1)\zeta^3}{\zeta(\zeta^2 - 1)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\zeta^2}{2(\zeta^2 - 1)} \left\{ e^{-2i\beta} - \frac{e^{2i\beta}}{\zeta^2} + \frac{2(e^{2i\beta} - 1)(\zeta^2 + 1)}{(\zeta^2 - 1)^2} \right\} \right] \\ \sigma_y &= \sigma_0 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} - \frac{e^{2i\beta} - 1}{\zeta^2 - 1} + \frac{(e^{2i\beta} - 1)(\bar{\zeta}^2 + 1)\zeta^3}{\zeta(\zeta^2 - 1)^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\zeta^2}{2(\zeta^2 - 1)} \left\{ e^{-2i\beta} - \frac{e^{2i\beta}}{\zeta^2} + \frac{2(e^{2i\beta} - 1)(\zeta^2 + 1)}{(\zeta^2 - 1)^2} \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \sigma_0 \operatorname{Im} \left[\frac{(e^{2i\beta} - 1)(\bar{\zeta}^2 + 1)\zeta^3}{\zeta(\zeta^2 - 1)^3} - \frac{\zeta^2}{2(\zeta^2 - 1)} \right. \\ &\quad \left. \left\{ e^{-2i\beta} - \frac{e^{2i\beta}}{\zeta^2} + \frac{2(e^{2i\beta} - 1)(\zeta^2 + 1)}{(\zeta^2 - 1)^2} \right\} \right] \end{aligned} \right\}$$

ただし Re および Im はそれぞれ実数部および虚数部を表わす。

4. 計算結果及び考察

FEM による計算は、Fig. 3 に示すように境界 S に σ_0 が作用する場合と、 $\sigma_0^E = \sigma_0^o - \sigma_0$ が作用する場合について行なった。 J_i 値および $F_i(2a/W, \beta)$ については前者の FEM の計算結果に直接 J 積分を適用して求めた、いわゆる直接法と後者の計算結果に (28) 式を重ね合せ、これに J 積分を適用した重ね合せ法の精度の検討を行なった。

ここで 2 章の (5) 式で示した J_i は次のように書きなおすことができる。

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \oint \left[\mathbf{W} dy - \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} ds \right] \\ &= \oint \left[\mathbf{W} dy - \left(T_x \frac{\partial u}{\partial x} + T_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) ds \right] \\ J_2 &= -\oint \left[\mathbf{W} dx + \left(T_x \frac{\partial u}{\partial y} + T_y \frac{\partial v}{\partial x} \right) ds \right] \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ただし

$$\mathbf{W} = (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) / 2$$

$$T_x = \sigma_x N_x + \tau_{xy} N_y, \quad T_y = \sigma_y N_y + \tau_{yx} N_x$$

N_x, N_y : トラクションベクトルに対する方向余弦である。

また K_{ii}^o, K_{ii}^E は (2) 式で与えられるので、(4), (9) 式で示した修正係数は次のようになる。

i) 直接法

$$\left. \begin{aligned} F_i(2a/W, \beta) &= K_i^o / (\sigma_0 \sqrt{\pi a} \sin^2 \beta) \\ F_{ii}(2a/W, \beta) &= K_{ii}^o / (\sigma_0 \sqrt{\pi a} \sin \beta \cos \beta) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

ii) 重ね合せ法

$$\left. \begin{aligned} F_i(2a/W, \beta) &= 1 + K_i^E / (\sigma_0 \sqrt{\pi a} \sin^2 \beta) \\ F_{ii}(2a/W, \beta) &= 1 + K_{ii}^E / (\sigma_0 \sqrt{\pi a} \sin \beta \cos \beta) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

なお、重ね合せ法による J 値は (6) 式と (31) 式より

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= J_1^o + J_1^E + 2(K_{ii}^o K_i^E + K_{ii}^E K_{ii}^o) / E \\ J_2 &= J_2^o + J_2^E - 2(K_{ii}^o K_i^E + K_{ii}^E K_{ii}^o) / E \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

となる。

Fig. 4 に要素分割の一例を示す。計算の対象となる図形は、左右対称、上下対称ではないので、各亀裂長

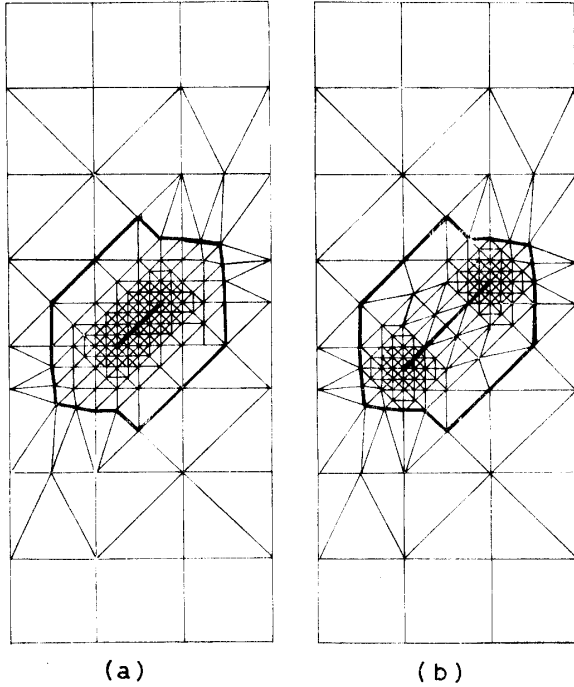


Fig. 4 Finite-element idealization for crack configuration.

さおよび亀裂角度 β に対応する要素分割を行なう必要がある。しかし、この作業は大変煩雑であり多くの時間と労力を要するため、同図の太線で示す要素分割を規準にとり、角度 β および亀裂長さの変化に対する要素群の移動を、人力命令によって自動的に行うプログラムを組みこんだ。

Fig. 5 および Fig. 6 に亀裂長さと板幅の比, $2a/W$ をパラメータにとった場合の, J_i 値と β の関係を示す。なお、実線は選点法による Wilson の解²¹⁾ であり、破線は無有限板に対する厳密解である。

Fig. 5 から明らかなように、 $\square \triangle \circ$ 印で示す重ね合せ法によって求めた J_1 値は Wilson の計算値に極めてよく一致し、また $\blacksquare \blacktriangle \bullet$ 印で示す直接法による J_1 値もかなり精度が高いことがわかる。

これに対して、Fig. 6 に見られるように重ね合せ法による J_2 値は Wilson の解に一致しているが、直接法ではこれらの値と比較して約 50%低い値を示し、きわめて精度が悪いことがわかった。この原因は 2.2 節で述べたように、 J_2 の積分経路に応力勾配の大きな亀裂面を含むため、亀裂先端近傍における FEM の計算精度に帰着される。

また、有限板と無有限板の J_i 値を比較すると、 $2a/W$

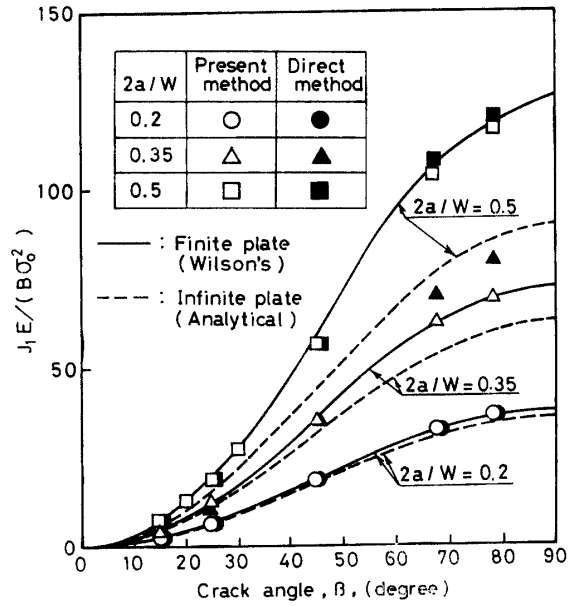


Fig. 5 Relation between $J_1E/(B\sigma_0^2)$ and crack angle β .

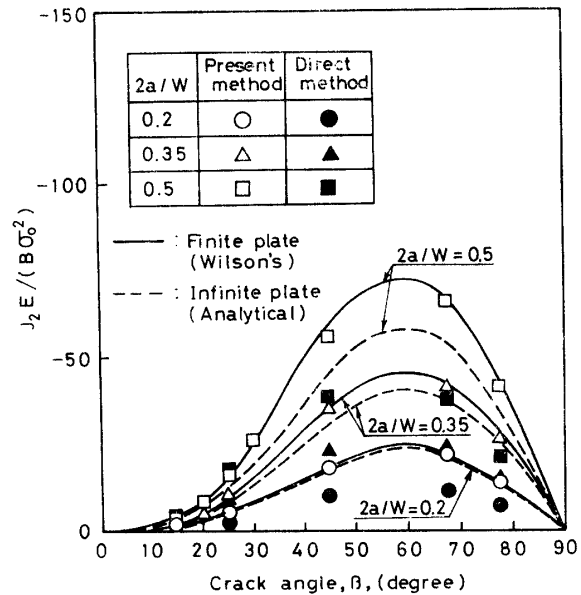


Fig. 6 Relation between $J_2E/(B\sigma_0^2)$ and crack angle β .

が 0.5 では両者はかなり異った値を示しているが、0.2 の場合はほぼ一致し、 $2a/W$ が 0.2 以下においては無有限板の J_i 値を採用できることがわかる。

Fig. 7, 8 に修正係数 $F_i(2a/W, \beta)$ と β の関係を示す。両図とも直接法による計算は Wilson の解と著しく異った値を示した。この原因として、Fig. 6 に示す FEM に直接 J_2 積分を適用した場合の誤差と (7) 式から明らかなように精度の悪い J_2 値による相乗効果による誤差が考えられ

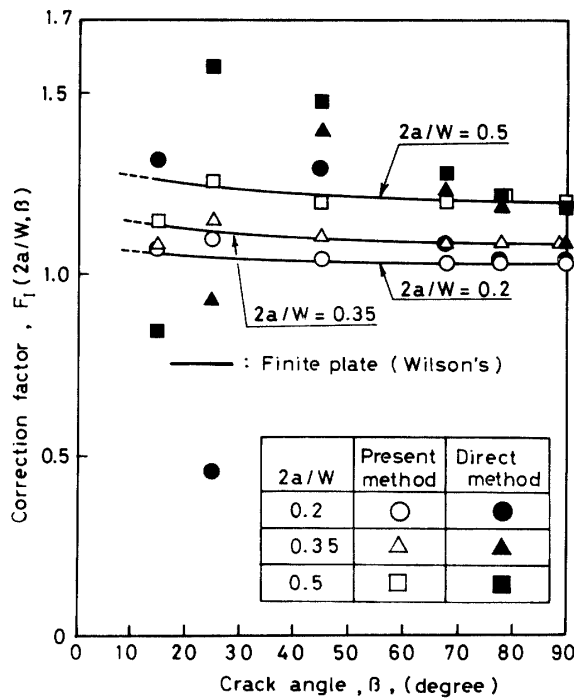


Fig. 7 Comparison of F_I vs β between Wilson's and proposed method.

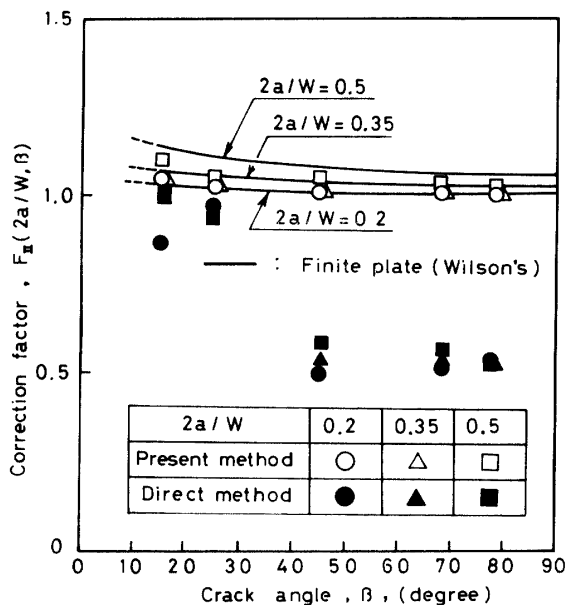


Fig. 8 Comparison of F_{II} vs β between Wilson's and proposed method.

る。これに対して、重ね合せ法を用いた場合、Wilsonの解との良好な一致がみられた。

6. 結 言

混合モード状態における精度の良い J 値および応力拡大係数 K_I, K_{II} 値を得るため、既報¹⁸⁾¹⁹⁾で提案した無限板に対する解析解に FEM による計算結果を

重ね合せ、さらにこの結果に Hellen の提唱した複素 J 積分¹⁷⁾を適用する、いわゆる拡張重ね合せ法を提案した。

次に本方法による計算結果と、FEM の計算結果から直接複素 J 積分によって求めた値 (直接法) を選点法による Wilson の解²¹⁾と比較検討し、次の結言をえた。

1) 混合モード状態下では、FEM による計算結果に直接 J 積分法を適用した場合、 J_2 の積分経路に応力勾配の大きい亀裂先端を含むための計算精度が悪くなる。又、 K_I, K_{II} は J_1 と J_2 の関数となっているため、精度の悪い J_2 値を用いると誤差が大きくなる。

2) 本報告で提案した重ね合せ法によって求めた J_1, J_2 値は Wilson の解と極めて良く一致した。従って、引張型の Mode I と剪断型の Mode II が共存した場合においても、既報で示した重ね合せ法を拡張することによって、極めて精度の高い解を得ることが可能であることが確認できた。

参 考 文 献

- 1) G.R. Irwin: J. Appl. Mech., **24**-4, 361 (1957)
- 2) N.I. Muskhelishvili: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, P. Noordhoff, (1953).
- 3) M. Isida: Int. J. Fracture Mech., **7**, 301 (1971)
- 4) A.S. Kobayashi, R.D. Cherepy and W.C. Kinsell: Trans. ASME, Ser. D, **86**, 267. (1968)
- 5) O.L. Bowie: Trans. ASME, Ser. E, **31**-2, 208 (1964)
- 6) B. Gross, J.E. Strawley and W.F. Brown: NASA TND-2369 (1964)
- 7) 岡村: 線形破壊力学入門, 培風館 (1976)
- 8) 石田: き裂の弾性解析と応力拡大係数, 培風館 (1976)
- 9) G.P. Anderson, V.L. Ruggles and G.S. Stibor: Int. J. Fracture Mech., **7**, 63 (1971)
- 10) J.R. Dixon, L.P. Pook and J. Strain: Analysis, **7** (1972)
- 11) 山本, 徳田: 日本造船学会論文集, **130**, 219 (1971)
- 12) 山本, 谷口: 機論, **38**-306, 269 (1972)
- 13) 徳田, 山本: 日本造船学会論文集, **132**, 349 (1972)
- 14) 山本, 角: 日本造船学会論文集, **133**, 179 (1973)
- 15) W.K. Wilson: Trans. ASME, Ser. D, **93**, 685 (1971)
- 16) J.R. Rice: Trans. ASME, Ser. E, **35**-2, 311. (1972)
- 17) T.K. Hellen: Int. J. Fracture Mech., **11**-4, 605 (1975)
- 18) 清水, 河野, 中島: 機講論, **753**-2, 179 (1973)
- 19) 清水, 河野, 中島: 山口大学工学部研究報告, **24**-3, 11 (1974)
- 20) G.C. Sih: Mechanics of Fracture, P. Noordhoff, (1973)
- 21) W.K. Wilson: Combined Mode Fracture, Univ. of Pittsburgh Ph. D. Dissertation, (1971)

(昭和 57 年 4 月 20 日 受理)