オンライン多テープチューリング機械の ε-動作に関する一考察

井 上 克 司*・高 浪 五 男*

A Note on the ε-Move of On-Line Multitape Turing Machines

Katsushi INOUE and Itsuo TAKANAMI

Abstract

Let $f(n)$ be a time function. By $k\text{-}DTM(f(n))$ ($k\text{-}NTM(f(n))$), we denote the class of languages accepted by deterministic (nondeterministic) on-line k-tape Turing machines which, given an input of length n, operate in such a way that the input heads stay on the same input position at most $f(n)$ steps.

This paper shows that if $\lim_{n\to\infty}[f(n)/(\log n)^r]=0$ for some positive constant r, then

(1) $k\text{-}DTM(f(n)) \subsetneq k\text{-}NTM(f(n))$ $(k\geq 1)$ and $\bigcup_{1\leq k<\infty} k\text{-}DTM(f(n)) \subsetneq \bigcup_{1\leq k<\infty} k\text{-}NTM(f(n))$, and

(2) $k\text{-}DTM(f(n))$ $(k\geq 1)$ and $\bigcup_{1\leq k<\infty} k\text{-}DTM(f(n))$ are not closed under concatenation, Kleene closure, length-preserving homomorphism, or reversal.

1. まえがきと準備

利用できるメモリあるいは時間の制限されたチューリング機械で受理される言語族については，既に様々な側面から深くその性質が調べられている．[1)~3)]

本稿では，各コマ上での ε-動作の回数（入力ヘッドが各コマ上にとどまることのできる回数）が制限されたオンライン多テープチューリング機械で受理される言語族の2，3の基本的な性質を与える．

よく知られているように，オンライン k テープチューリング機械 M は，

（1） 有限制御部

（2） 読取り専用の1本の（右方向にのびた半無限長の）入力テープ

（3） 入力テープ上を左から右に一方向的に動く入力ヘッド

（4） 読み書き可能な k 本の（右方向にのびた半無限長の）記憶テープ

（5） 各記憶テープ上を左右に動いて読み書きすることのできる記憶テープヘッド

からなる．

M への入力 w の右端には終端記号 \$ がつけられる．M は，有限制御部を初期状態にし，入力 $w\$$ の左端に入力ヘッドをおき，また空白な k 本の記憶テープの左端に記憶テープヘッドをおいた状況から $w\$$ を読み始める．このとき，入力ヘッドが終端記号 \$ から右にはみ出したときにその有限制御部がある受理状態に入っておれば，M は w を受理したという．

いま，$f(n)$ をある時間関数とする．長さ $n(n\geqq 1)$ の任意の入力 $w=a_1a_2\cdots a_n$ に対し，M が w を受理するときには，必ず各 $a_i(1\leqq i\leqq n)$ および終端記号 \$ 上での ε-動作の回数が高々 $f(n)$ 回に制限されているならば，M は，各コマ上での ε-動作の回数が $f(n)$ に制限されたオンライン k テープチューリング機械であるとよぶ．各コマ上での ε-動作の回数が $f(n)$ に制限された決定性（あるいは非決定性）オンライン k テープチューリング機械によって受理される言語族を

$k\text{-}DTM(f(n))$（あるいは $k\text{-}NTM(f(n))$）

と記す．

よく知られているように，線形時間で動作する非決定性オンライン k テープチューリング機械 $(k\geqq 2)$[1] は，実時間で動作する1本のスタックテープと1本の

* 電子工学科

[1] 時間限定チューリング機械の定義については文献 [1] を参照.

プッシュダウンテープを有する非決定性オンラインオートマタと等能力である.[4] 従って，線形時間で動作する非決定性オンラインkテープチューリング機械($k \geqq 2$)で受理される言語族は，$2\text{-}NTM(1)$と同一である．一方，線形時間で動作する決定性オンライン多テープチューリング機械で受理される言語族は，実時間で動作する決定性オンライン多テープチューリング機械の受理する言語族すなわち，$\cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}DMT(1)$を真に含む.[4]

そのほか，次のことが知られている.

(1) 各$k \geqq 1$に対し，$k\text{-}DTM(1) \subsetneqq k\text{-}NTM(1)$.[8]
($\cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}DTM(1) \subsetneqq \cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}NTM(1)$であることは上述のことから明らかである.)

(2) 各$k \geqq 1$に対し，
$k\text{-}DTM(1) \subsetneqq (k+1)\text{-}DTM(1)$.[7]

(3) 各$k \geqq 1$に対し，$k\text{-}DTM(1)$は，連接'·'，Kleene 閉包'*'，長さ保存の準同型写像，並びに反転に関し閉じていない.[5]

(4) $\cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}NTM(c) = \cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}NTM(1) = 2\text{-}NTM(1)$
(但し，cは1以上の整数定数)は，共通集合をとる演算，線形消去(linear erasing)演算，並びに反転に関し閉じている principal AFL[1]である.[4]

(5) 言語Lが$\cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}NTM(c)(=\cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}NTM(1)=2\text{-}NTM(1))$(但し，$c$は1以上の整数定数)に含まれておれば，$L$は3個の文脈自由言語の共通集合のある長さ保存の準同型写像による像である．この逆も言える.[4]

本稿では，上記の(1)，(3)をその特別な場合として含む次の結果を導く.

$f(n)$を，$f(n) \geqq 1$でありしかも$\lim_{n\to\infty}[f(n)/(\log n)^r]$[2] 0(但し，rは1以上の定数)であるような任意の時間関数とする．このとき，

(i) 各$k \geqq 1$に対し，$k\text{-}DTM(f(n)) \subsetneqq k\text{-}NTM(f(n))$かつ$\cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}DTM(f(n)) \subsetneqq \cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}NTM(f(n))$.
(実際には，$1\text{-}NTM(1)$には含まれるが$\cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}DTM(f(n))$には含まれないような言語が存在する)

(ii) $k\text{-}DTM(f(n))$ ($k \geqq 1$) 並びに$\cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}DTM(f(n))$は，連接，Kleene 閉包，長さ保存の準同型写像，反転に関し，閉じていない.

また，$f(n)$を上記の関数とするとき，

$$k\text{-}DTM(f(n)) \subsetneqq k\text{-}DTM(2n)(k \geqq 1)$$

$$\cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}DTM(f(n)) \subsetneqq \cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}DTM(2n)$$

であることが導かれる.

なお，本稿で特に定義されない用語，記法については文献〔1〕を参照されたい.

2. 結　　果

以下，

$$L_1 = \{w_1aw_2a\cdots aw_rbw \mid (r \geqq 1)\ \&\ \forall i(1 \leqq i \leqq r)[w_i \in \{0.1\}^+]\ \&\ \exists_j(1 \leqq j \leqq r)[w_j^R = w]\ \&\ (a \neq b)\ \&\ (a, b \notin \{0.1\})\}$$

とする(w_j^Rは，w_jの反転を表わす).

〔補題2.1〕 (i) $L_1 \in 1\text{-}NTM(1)$.

(ii) $f(n)$を，$f(n) \geqq 1$かつ，$\lim_{n\to\infty}[f(n)/(\log n)^r] = 0$
(但し，rは1以上の定数)であるような任意の時間関数とする．このとき$L_1 \notin \cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}DTM(f(n))$.

(証明) (i)の証明は容易であるので略す．以下(ii)を証明する．いま，ある$k \geqq 1$に対し，$L_1 \in k\text{-}DTM(f(n))$とし，$L_1$を受理する決定性オンライン$k$テープチューリング機械を$M$(この$M$は，各コマ上での$\varepsilon$-動作の回数が$f(n)$に制限されている)，$M$の状態の個数を$q$，記憶テープ用記号の個数を$d$とする．いま，各$n \geqq 1$に対し，

$$V(n) = \{w_1aw_2a\cdots aw_{r(n)}b \mid (r(n)=2^n)\ \&\ \forall_i(1 \leqq i \leqq r(n))[(w_i \in \{0,1\}^+)\ \&\ (l(w_i)=n)^3]\ \&\ (a \neq b)\ \&\ (a, b \notin \{0,1\})\}$$

とする．また，各$x = w_1aw_2a\cdots aw_{r(n)}b \in V(n)$に対し，

$$P(x) = \{z \in \{0,1\}^+ \mid \exists_i(1 \leqq i \leqq r(n)=2^n)[z=w_i]\}$$

とし，

$$S(n) = \{P(x) \mid x \in V(n)\}$$

とする．明らかに

$$|S(n)|^4 = \binom{2^n}{1} + \binom{2^n}{2} + \cdots + \binom{2^n}{2^n} = 2^{2^n} - 1 \simeq 2^{2^n} \quad \cdots\cdots(1)$$

---

[1] Principal AFL の定義については文献[6]を参照.
[2] 以下，対数の底はすべて'2'であるとする.

[3] 各語 w に対し，l(w) は w の長さを表わす.
[4] 任意の集合 S に対し，|S| は S の要素の数を表わす.

である．M は，i ステップの間には，現在の記憶テープヘッドの位置から左右に高々 i コマしか記憶テープの内容を走査することができないことに注意しよう．

いま，各 $x=w_1aw_2a\cdots aw_{r(n)}b\in V(n)$ に対し，M の入力ヘッドが記号 'b' を右にはみ出すときの次の①と②の情報の対を conf (x) と記す．

① M の有限制御部の状態；

② M の k 個の記憶テープヘッドの現在の位置から左右に $(n+1)f(m_n)$ コマの範囲の記憶テープの内容，但し，$m_n=(n+1)2^n+n$.

このとき，次の命題が成立する．

命題 2.1：$P(x)\neq P(x')$ であるような $x, x'\in V(n)$ 対しては，conf $(x)\neq$ conf (x') である．

〔なぜなら，

$$x=w_1aw_2a\cdots aw_{r(n)}b\in V(n).$$

$$x'=w_1'aw_2'a\cdots aw'_{r(n)}b\in V(n).$$

とし，$P(x)\neq P(x')$ かつ conf $(x)=$ conf (x') とする．いま，$P(x)$ には含まれるが $P(x')$ には含まれない(あるいはその逆) ある語 w を考え，M が2つの入力 $xw^R\$$ と $x'w^R\$$ とを読むときの状況に注目する．$l(xw^R)=l(x'w^R)=(n+1)2^n+n(=m_n)$ であること並びに $l(w^R\$)=n+1$ であることから，M が $w^R\$$ を読む間に走査することのできる記憶テープの範囲は，$w^R\$$ を入力ヘッドが読み始めるときの記憶テープヘッドの位置から左右に高々 $(n+1)f(m_n)$ コマの範囲である．ところが，conf $(x)=$ conf (x') であるから，M は $xw^R\$$ と $x'w^R\$$ とを全く同一の状態で読み終ることになる．明らかに，$xw^R\in L_1$ であるから，xw^R は M で受理され，従って，$x'w^R$ もまた M で受理されることになり矛盾が生じる ($x'w^R\notin L_1$ であることに注意).〕

ところで，M の入力ヘッドが $V(n)$ の語の記号 'b' を右にはみだすときの上記①と②の情報の対の総数を $t(n)$ とすると，

$$t(n)\leqq q\cdot d^{2(n+1)f(m_n)+1} \qquad \cdots\cdots(2)$$

である．後述のように，十分大きな n に対して

$$|S(n)|>t(n)$$

であり，このような n に対しては，$P(x)\neq P(x')$ ではあるが conf $(x)=$ conf (x') であるような $x, x'\in V(n)$ が存在することになり命題 2.1 に矛盾する．これで (ii) の証明は終る．

以下，十分大きな n に対し，$|S(n)|>t(n)$ が成り立つことを補足しておこう．(2) 式の右辺を $D(n)$ とおくと，ある定数 C に対し，

$$D(n)<C^{(n+1)f(m_n)} \qquad \cdots\cdots(3)$$

が成り立つ．(3) 式の右辺を $E(n)$ とおくと，

$$\log E(n)=(n+1)f(m_n)\log C \qquad \cdots\cdots(4)$$

である．また，(1) 式より，

$$\log|S(n)|\simeq 2^n \qquad \cdots\cdots(5)$$

ところが，

$$\lim_{n\to\infty}[f(n)/(\log n)^r]=0$$

であるから（補題の仮定を参照）.

$$\lim_{n\to\infty}[f(m_n)/(\log m_n)^r]=0$$

すなわち，

$$\lim_{n\to\infty}[f(m_n)/[\log[(n+1)2^n+n]]^r]=0$$

である．これから，

$$\lim_{n\to\infty}[f(m_n)/[\log(n\cdot 2^n)]^r]=0$$

すなわち，

$$\lim_{n\to\infty}[f(m_n)/[\log n+n]^r]=0$$

が得られ，更にこれから，

$$\lim_{n\to\infty}[f(m_n)/n^r]=0$$

が得られるから，

$$\lim_{n\to\infty}[n\cdot f(m_n)/n^{r+1}]=0 \qquad \cdots\cdots(6)$$

が成り立つ．ところで，

$$\lim_{n\to\infty}[n^{r+1}/2^n]=0$$

であるから，(6) 式より，

$$\lim_{n\to\infty}[n\cdot f(m_n)/2^n]=0 \qquad \cdots\cdots(7)$$

が得られる．(4)，(5)，(7) 式より，

$$\lim_{n\to\infty}[\log E(n)/\log|S(n)|]=0$$

が得られ，このことと (2)，(3) 式より，十分大きな n に対し，$|S(n)|>t(n)$ が成り立つことが結論される．

補題 2.1 より，直ちに次の定理が得られる．

〔定理 2.1〕 $f(n)$ を，補題 2.1 (ii) で述べられたよ

うな任意の時間関数とする．このとき，

(i) 各 $k \geqq 1$ に対し，

$$k\text{-}DTM(f(n)) \subsetneqq k\text{-}NTM(f(n))$$

(ii) $\cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}DTM(f(n)) \subsetneqq \cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}NTM(f(n)$.

ところで，L_1 は次の動作を行なう決定性オンライン1テープチューリング機械 M で受理される．

入力 $w_1aw_2a\cdots aw_rbw\$$ が与えられたときまず M は，$w_1aw_2a\cdots aw_r$ を記憶テープ上にそのままコピーする．入力ヘッドが語 $w=a_1a_2\cdots a_m$ の例えば左から j 番目 $(1\leqq j\leqq m)$ の記号 a_j を読む間，M は，$a_1a_2\cdots a_j$ がある $w_i(1\leqq j\leqq r)$ の最後の長さ j の部分の反転になっているかどうかをチェックする．このチェックのためには，(入力ヘッドを a_j 上にとどめたまま) 記憶テープにコピーされている $w_1aw_2a\cdots aw_r$ を高々1回走査すれば十分である．もちろん，入力ヘッドが w の最後の記号 a_m を読む間，$a_1a_2\cdots a_m=w$ がある $w_i(1\leqq i\leqq r)$ の反転になっていることがチェックされたときのみ，M は入力 $w_1aw_2a\cdots aw_rbw$ を受理する．この M の入力ヘッドは，長さ n の入力に対しては，各コマ上に高々 $2n$ 回しかとどまらないことは明らかである．従って，$L_1\in 1\text{-}DTM(2n)$ である．このことと補題 2.1 (ii) より，次の定理が得られる．

〔定理 2.2〕 $f(n)$ を，補題 2.1 (ii) で述べられたような任意の時間関数とする．このとき，

(i) 各 $k\geqq 1$ に対し，

$$k\text{-}DTM(f(n)) \subsetneqq k\text{-}DTM(2n).$$

(ii) $\cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}DTM(f(n)) \subsetneqq \cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}DTM(2n)$.

$L_2=\{a^nb^nc^n \mid n\geqq 1\}$ は，よく知られているように，文脈自由言語ではない．一方，明らかに，$L_2\in 1$ $DTM(1)$ である．また，L_1 は文脈自由言語である．これらのことと補題 2.1 (ii) より次の定理が得られる．

〔定理 2.3〕 $f(n)$ を，補題 2.1 (ii) で述べられたような任意の時間関数とする．このとき，

(i) 各 $k\geqq 1$ に対し，$k\text{-}DTM(f(n))$ は文脈自由言語族と比較不能である．

(ii) $\cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}DTM(f(n))$ は文脈自由言語族と比較不能である．

次に閉包性について考察しよう．まず，次の補題の成り立つことは明らかである．

〔補題 2.2〕 各 $f(n)\geqq 1$, 各 $k\geqq 1$ に対し，$k\text{-}DTM(f(n))$ は正規集合との和集合，共通集合をとる演算に関して閉じている．従って $\cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}DTM(f(n))$ もそうである． (証明略)

〔定理 2.4〕 $f(n)$ を，補題 2.1 (ii) で述べられたような任意の時間関数とする．このとき，$k\text{-}DTM(f(n))$ $(k\geqq 1)$ 並びに $\cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}DTM(f(n))$ は次の各演算に関し閉じていない．

(i) 連接 ‘·’.

(ii) Kleene 閉包 ‘*’4.

(iii) 長さ保存の準同型写真像.

(iv) 反転 ‘R’.

証明 (i): $H=\{waw_1aw_2a\cdots aw_rbw^R \mid (w\in\{0,1\}^+)$ & $(r\geqq 0)$ & $\forall_i(1\leqq i\leqq r)[w_i\in\{0,1\}^+]$ & $(a\neq b)$ & $(a,b\notin\{0,1\})\}$, $T=(\{0,1\}^+a\})^*$ とする．明らかに，H, T は共に $1\text{-}DTM(1)$ に含まれる．一方，

$$T\cdot H=L_1\notin \cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}DTM(f(n))$$

である (補題 2.1 (ii) より)．以上で，(i) に対する場合が証明された．

(ii): H, T を上述の集合とし，$G=H\cup T$ とする．明らかに，$G\in 1\text{-}DTM(1)$ である．一方，

$$G^*\cap T\cdot\{0,1\}^+\cdot\{b\}\cdot\{0,1\}^+$$
$$=L_1\notin \cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}DTM(f(n))$$

である．このことと補題 2.2 より

$$G^*\notin \cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}DTM(f(n))$$

である．以上で (ii) に対する場合が示された．

(iii): H, T を上述の集合とし，

$$F=T\cdot\{0,1\}^+\cdot\{c\}\cdot H,\ \text{但し，}C\notin\{0,1,a,b\}$$

とする．$F\in 1\text{-}DTM(1)$ であることは容易に確かめられる．いま，h を，$h(0)=0$, $h(1)=1$, $h(a)=a$, $h(b)=b$, $h(c)=a$, で定義される長さ保存の準同型写像とする．容易に確かめられるように，

$$h(F)=\{0,1\}^+\cdot\{a\}\cdot L_1$$

となり，補題 2.1 (ii) の証明と全く同様にして，

$$h(F)\notin \cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}DTM(f(n))$$

であることが示される． 従って，(iii) に対する場合が証明された．

(iv): $L_3=\{wa^{l(w)}w_1a^{l(w_1)}\cdots w_{r-1}a^{l(w_{r-1})}w_r \mid (w\in\{0,1\}^+)$ & $(a\notin\{0,1\})$ & $(r\geqq 1)$ & $\forall_i(1\leqq i\leqq r)[w_i\in\{0,1\}^+]$ & $\exists_j(1\leqq j\leqq r)[w=w_j]\}$ とする．$L_3\in 1\text{-}DTM$

(1) であることは容易に知れる．一方，補題 2.1 (ii) の証明と同様な手法で，$L_3^R \subsetneqq \cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}DTM(f(n))$ であることが示される．以上で (iv) に対する場合が証明された．

3. むすび

入力ヘッドが各コマ上にとどまることのできる回数が制限されたオンライン多テープチューリング機械についての 2，3 の性質を明らかにしてきた．

今後の興味ある課題としては，

（1） 任意の時間関数 $f(n)$ に対し，$k\text{-}DTM(f(n))$ は $n\cdot f(n)$ 時間限定の決定性オンライン k テープチューリング機械の受理する言語族 ON-LINE $k\text{-}TMDTIME(n\cdot f(n))$ に真に含まれるか ($k\text{-}DTM(f(n)) \subseteq$ ON-LINE $k\text{-}TMDTIME(n\cdot f(n))$ であることは定義から明らか)? 非決定性に対してはどうか？

（2） $f(n), g(n)$ を $\lim_{n\to\infty}[f(n)/g(n)]=0$ なる任意の時間関数とするとき，各 $k\geqq 1$, 各 $X\in\{D, N\}$ に対し，

$$k\text{-}XTM(f(n)) \subsetneqq k\text{-}XTM(g(n))$$

であるか？

などである．上記 (2) に対する部分的な解が定理 2.2 に与えられている．そのほか，定理 2.1，定理 2.3，定理 2.4 が更に強めよれないか，また $f(n)$ を補題 2.1 (ii) で述べられた時間関数とするとき，$k\text{-}DTM(f(n))$ ($k\geqq 1$) はブール演算に関し閉じているかなども今後の課題として残される．($k\text{-}DTM(1)$ はブール演算に関し閉じていることが知られている.[5]) 文献〔4〕でも未解決として残されている次の問題を与えて本稿を終る．

$\cup_{k=1}^{\infty} k\text{-}NTM(1)$ は決定性文脈依存言語族に真に含まれるか？

（真の包含性の候補として，次の言語が考えられる．

（i） $\{w_1cw_2c\cdots w_nc \mid (n\geqq 1)$ & $\forall_i(1\leqq i\leqq n)[w_i\in\{0, 1\}^*]$ & $\forall i, j(1\leqq i, j\leqq n)[i\neq j \Rightarrow w_i \neq w_j]\}$;

(ii) $\{0^P \mid P$ は素数$\}$.)

参考文献

1) J. E. Hopcroft and J. D. Ullman: 'Formal languages and their relation to automata', Addison-Wesley, Reading Mass., (1969)
2) O. H. Ibarra: 'A note concerning nondeterministic tape complexities', J. ACM **19**, 608 (1972)
3) J. I. Seiferas: 'Techniques for separating space complexity classes', JCSS **14**, 73 (1977)
4) R. Book and S. A. Greibach: 'Quasirealtime languages', MST **4**, 97 (1970)
5) A. L. Rosenberg: 'Real-tims definable languages', J. ACM **14**, 645 (1967)
6) S. Ginsburg and S. A. Greibach: 'Principal AFL', JCSS **4**, 380 (1970)
7) S. O. Aanderaa: 'On k-tape versus (k-1)-tape real time computation', SIAM-AMS Proceelings **7**, 75 (1974)
8) M. Chandra, R. Kintala and P. C. Fisher: 'Computations with a restricted number of nondeterministic steps', Proceedings of the 9-th amual ACM symposium on theory of computing (1977) p. 178

(昭和 55 年 3 月 31 日　受理)