

波動歯車装置における歯の干渉の理論解析

石田 武*・日高照晃*・黄 水平**

Theoretical Analysis of Interference of Teeth in Strain Wave Gearing

Takeshi ISHIDA, Teruaki HIDAKA and Shuiping HUANG

Abstract

This paper deals with a theoretical analysis of the interference in a strain wave gearing (commonly known as a harmonic drive), which is a compact, light-weight mechanical device capable of high speed reduction as well as high mechanical advantage in a single stage. The analysis is carried out in a plane perpendicular to the input and output axes, and in a no load state. The involute profiles of teeth are simplified to straight lines. When the flexible spline is deformed into an oval shape by the wave generator, it is assumed that a neutral line exists there, which maintains the same length as that prior to deformation. The number of teeth causing interference at the same time in a strain wave gearing is found by the analysis, which changes with a period of one pitch of the circular spline.

1. 緒 言

波動歯車装置は部品数が少なく、小型、軽量で、減速比が大きな遊星歯車装置の一種である。また多数の歯が同時にかみあっているので、負荷容量が大きい。このため、現在、産業用ロボット、計測機器、宇宙機器等に、高精度の減速機として広く用いられている。しかしながら、これらの精密機械にますます高い位置決め精度が要求されているので、減速機とする波動歯車装置については、回転伝達誤差や振動がより小さいことが強く望まれている。これらの要望を満たすためには、波動歯車装置のねじりばね特性や各部の誤差と回転伝達誤差や振動の関係などを十分把握しておく必要がある。このためには波動歯車装置におけるかみあい範囲、各歯対におけるかみあい位置などが明らかである必要がある。

しかし、波動歯車装置では、薄肉の外歯車であるフレキシブルスプラインの弾性変形を積極的に利用して、剛性の大きな内歯車であるサーキュラスプラインがフ

レキシブルスプラインと多数対の歯でかみあうようになっており、このような波動歯車装置の複雑なかみあいを正確に解析することは容易でなく、これに関する研究も少ないのが現状である。

そこで、本研究では、波動歯車装置のかみあいを解析する前段階として、まず、楕円形状の外歯車と円筒状の内歯車のかみあい時の歯の干渉量を解析する方法を示し、これより、干渉を生じている歯数や干渉量について検討した。

2. 対象とした波動歯車装置

Fig. 1は波動歯車装置の概略図を示す。Fig. 1に示すように、フレキシブルスプライン(以後FSで示す)はウェーブジェネレータ(以後WGで示す)によって楕円形状に変形し、その長軸上の2箇所サーキュラスプライン(以後CSで示す)とかみあう。本報では、WGを入力軸とし、FSを出力軸とする場合について説明する。Table 1に対象とした波動歯車装置の諸元を示す。

*機械工学科

**大学院生産機械工学専攻

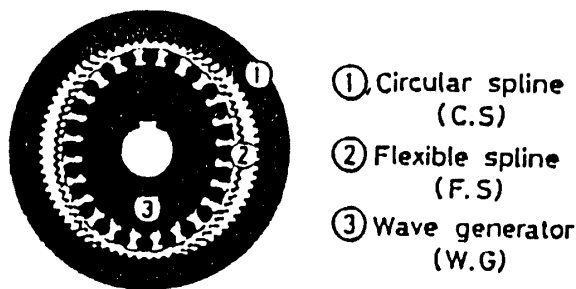


Fig. 1 Strain wave gearing

Table. 1 Dimensions of the strain wave gearing

	Flexspline	Circular spline
Tooth profile	involute	
Type of gear	spur gear	
Module m	0.4mm	
Pressure angle α	30°	
Output torque	310 Nm	
Placement of teeth	external	internal
Number of teeth z	256	258
Diameter of addendum circle	102.01mm	101.97mm
Diameter of dedendum circle	100.82mm	103.21mm
Pitch arc thickness of tooth	0.56mm	0.57mm
Diameter of neutral circle $2 r_0$	99.47mm	
δ	0.92mm	

3. 歯の干渉の解析方法

3.1 FS の中立線

カップ型の波動歯車装置では、FS は、WG を挿入することによって、楕円形状になるため、3次元的な変形をするが、解析の容易さを考えて、まず、2次元的な解析とし、無負荷の場合のみあいを考える。また、

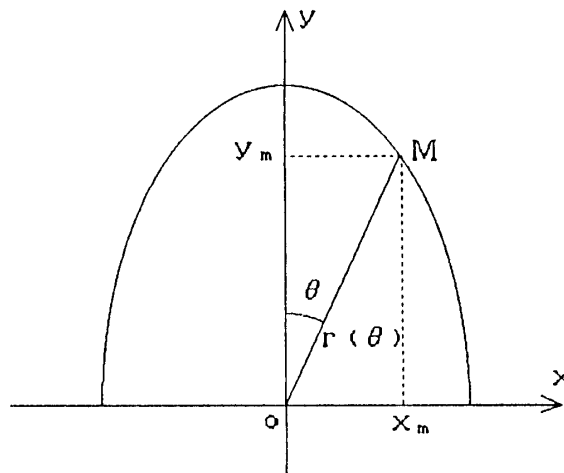


Fig. 2 Coordinates of a neutral line

FS の変形によって中立線の長さが変わらないと仮定した。したがって、変形後の FS の中立線の動径 $r_{(\theta)}$ と偏角 θ の関係 (Fig. 2 参照) は次式のように表わされる⁽¹⁾。

$$r_{(\theta)} = r_0 + (\delta/2) \cos 2\theta \tag{1}$$

ここで、 r_0 は真円状態での中立線の半径、 δ は WG の長軸と短軸の半径差である。Fig. 2 において、 o を原点、 ox を FS の短軸方向、 oy を長軸方向としている。 $(o-x, y)$ 直交座標系において、FS の中立線上の点 M を (x_m, y_m) とすると

$$\begin{aligned} x_m &= r_{(\theta)} \sin \theta \\ y_m &= r_{(\theta)} \cos \theta \end{aligned} \tag{2}$$

となる。

3.2 歯形の直線近似

CS, FS の歯数が多いので、そのインボリュート歯形が直線に近くなることから、解析の容易さを考えて、CS と FS の歯形をそれぞれの基準ピッチ点における接線で近似した。Fig. 3 に示すように、FS 上の第 i 番の歯の中心線と中立線の交点 M_i における接線 U_{fi} と法線 V_{fi} (歯の中心線と一致する) を座標軸とする直交座標系 (M_i-U_{fi}, V_{fi}) を取るとき、この座標系における FS の歯形の方程式は次式のように表される。

$$V_{fi} = a_{fi} \pm U_{fi} / \tan \alpha \tag{3}$$

ここで、 α は歯形上の基準ピッチ点の圧力角、 a_{fi} は FS

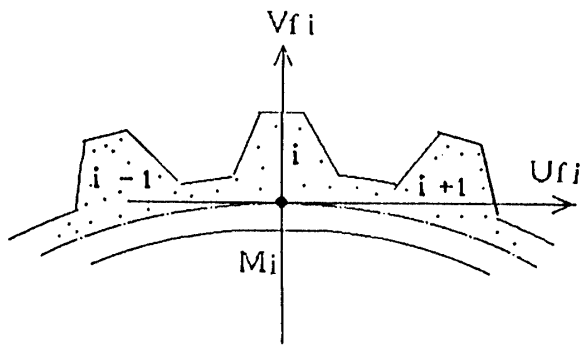


Fig. 3 Coordinates of teeth of FS

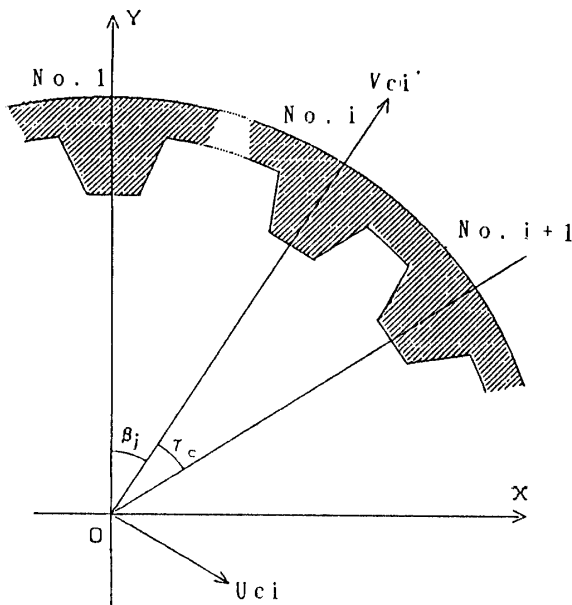


Fig. 4 Coordinates of teeth of CS

歯形上の基準ピッチ点の座標によって定まる定数であり，“+”の場合は左歯形を，“-”の場合は右歯形を表す。この歯形は、運転時のFSの円環としての変形による影響を受けず、常に最初の形状を保つものと仮定した⁽²⁾。また、Fig. 4に示すようにCSの中心Oを原点、歯の中心線 V_{ci} とその垂線 U_{ci} を座標軸とする座標系を取るとき、CSの歯形の方程式は次式のように表される。

$$V_{ci} = a_{ci} \pm U_{ci} / \tan \alpha \quad (4)$$

ここで、 a_{ci} はCS歯形上の基準ピッチ点の座標によって定まる定数であり，“+”の場合は右歯形を，“-”の場合は左歯形を表す。

3.3 歯の位置決め

Fig. 4に示すようにCSの場合は、任意の歯の中心線がCSの中心Oを通っているため、隣あっている歯のそれぞれの中心線のなす角 γ_c が $\gamma_c = 2\pi/z_c$ (z_c はCSの歯数である) となり一定であるので、歯の位置決めが容易である。しかし、FSの場合は、真円の状態では、Fig. 5の破線で示すように隣あっている歯のそれぞれの中心線のなす角 γ_f は $\gamma_f = 2\pi/z_f$ (z_f はFSの歯数である) となり一定であるが、組み立てられている状態では楕円形状であるため、Fig. 5の実線で示すように歯の中心線は必ずしも極0を通ってないので、歯の位置を以下のように決める。

Fig. 5に示すように真円状態のNo. 1の歯の中心線をOY軸と一致させる。そして、変形の前でFSの中立線の長さは変わらないと仮定したので、楕円に変形した状態におけるNo. 1とNo. iの歯のそれぞれの中心線と中立線の交点 M_1, M_i の間の弧 $\widehat{M_1 M_i}$ の長さは、真円状態の対応弧 $\widehat{M_1' M_i'}$ の長さと同じなので、以下の関係がある。

$$(i-1) \gamma_f r_0 = \int_0^{\theta_i} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad (5)$$

ここで、 θ_i はNo. iの歯が楕円状態での中心線と中立線の交点 M_i の極径と長軸のなす角である。一般には、 $\delta / (2r_0) \ll 1$ であるので、式(5)は式(6)のように近似できる。

$$(i-1) \gamma_f r_0 = \int_0^{\theta_i} r(\theta) d\theta \quad (6)$$

したがって、式(6)より、 θ_i が求められる。

3.4 歯形の(O-X, Y)座標表示

直線に近似したCSとFSの歯形を、CSの中心を原点Oとし、WGの長軸をY軸とする直交座標に変換する。CSの歯形に対して、(O- U_{ci}, V_{ci}) と (O-X, Y) の座標変換式は次のようになる。

$$\begin{aligned} X &= U_{ci} \cos \beta_i + V_{ci} \sin \beta_i \\ Y &= V_{ci} \cos \beta_i - U_{ci} \sin \beta_i \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 β_i はCS上の第i番の歯の中心線とOY軸のなす角である。

次に、FSの歯形に対して、(M_i-U_{fi}, V_{fi}) と (o-x, y) の座標変換式は次のようになる (Fig. 5参照)。

$$\begin{aligned} x &= x_m + U_{fi} \cos(\theta_i + \mu) + V_{fi} \sin(\theta_i + \mu) \\ y &= y_m - U_{fi} \sin(\theta_i + \mu) + V_{fi} \cos(\theta_i + \mu) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 θ_i は oM_i と oy 軸のなす角である。 μ は点 M_i の法線（歯の中心線と一致する）と oM_i のなす角であり、次式によって求められる。

$$\tan\mu = -\frac{1}{r} \frac{dr(\theta)}{d\theta} \tag{9}$$

したがって、組立によって WG の極 o が CS の中心 O 、 oy 軸が OY 軸と一致するようにし、WG が時計回りに角度 ϕ ほど回転したとき、 $(o-x, y)$ と $(O-X, Y)$ の座標変換式は次のようになる。

$$\begin{aligned} X &= x\cos\phi + y\sin\phi \\ Y &= y\cos\phi - x\sin\phi \end{aligned} \tag{10}$$

3.5 かみあいの基準位置

最初、 $(O-X, Y)$ 座標系における CS と FS の No. 1 の歯は、Fig. 6 のようにともに歯の中心線が Y 軸上にあるとする。したがって、入力軸とする WG の回転が紙面の正面からみて時計回りの場合では、FS の No. 1 の歯の右歯面が CS の No. 1 の歯の左歯面とかみあうように、また、WG が反時計回りの場合では、FS の左歯面と CS の右歯面がかみあうように、便宜上、CS の全体を ψ だけ回転させる必要がある。この CS に与える回転角度 ψ をかみあいの基準位相角と呼ぶことにする。

数値計算では、Fig. 6 に示すように CS の歯形上の点 P が FS の歯形上の対応点 P' に来るまでの回転角度を ψ として求めることにする。この CS と FS の歯形上の合わせた点 P と P' をそれぞれ CS と FS の歯形上のかみあいの基準点と呼ぶことにする。便宜上 CS の歯形上の基準ピッチ点を基準点 P とすると、WG が時計回りの場合で、Fig. 6 に示しているようにかみあいの基準位相角 ψ は

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \tag{11}$$

になる。ここで

$$\tan\psi_1 = \left| \frac{X_p}{Y_p} \right|, \quad \tan\psi_2 = \left| \frac{X_{p'}}{Y_{p'}} \right| \tag{12}$$

ただし、 (X_p, Y_p) 、 $(X_{p'}, Y_{p'})$ が点 P 、 P' のそれぞれの $(O-X, Y)$ における座標であり、 $X_p'^2 + Y_p'^2 = r_c^2$ になる。 r_c は CS の基準ピッチ円の半径である。

3.6 歯の干渉の種類

歯の干渉として、Fig. 7 (b), (c), (d) のような 3 種類を考えた。なお、Fig. 7 において、(a) は両歯面がちょうど重なりあった状態を示している。以下に干渉の判

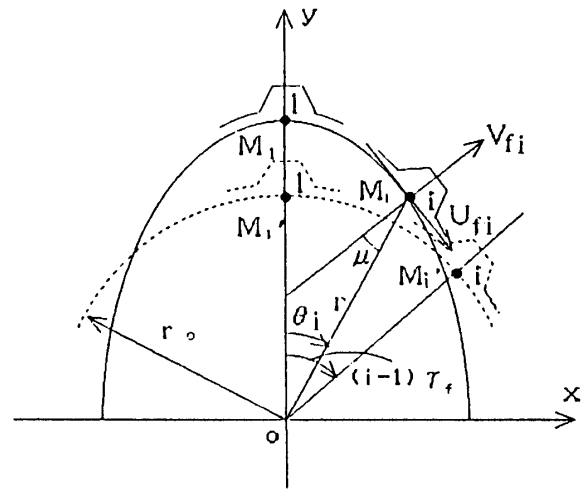


Fig. 5 The position of FS teeth

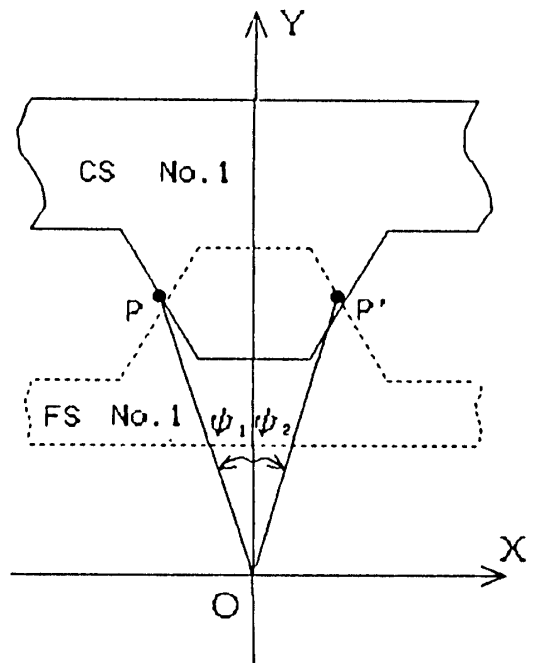


Fig. 6 The angle to engage FS with CS

定方法を説明する。Fig. 7 に示すようにまず、CS と FS の歯形上のそれぞれの歯先点と歯元点 1, 2, 3, 4, 5 の座標 (X_{c1}, Y_{c1}) 、 (X_{c2}, Y_{c2}) 、 (X_{f3}, Y_{f3}) 、 (X_{f4}, Y_{f4}) 、 (X_{f5}, Y_{f5}) を設計寸法より求めると、これらの値を用いて、 $(O-X, Y)$ 座標系における歯形の方程式を示すと、次のようになる：

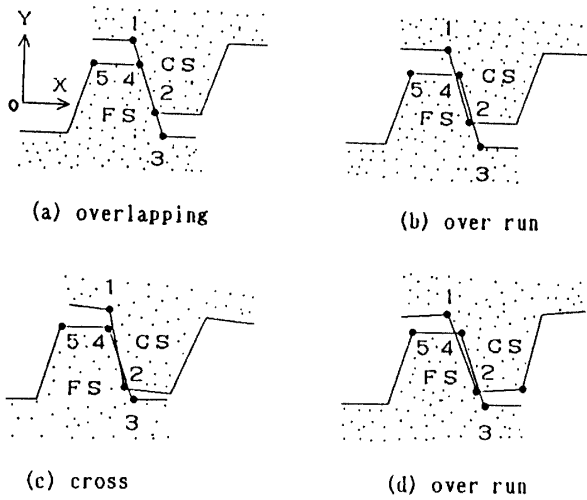


Fig. 7 The geometric position of tooth profiles of FS and CS

$$\begin{aligned} \text{FS の歯形: } Y &= k_f X + b_f \\ \text{CS の歯形: } Y &= k_c X + b_c \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、

$$k_f = \frac{Y_{f3} - Y_{f4}}{X_{f3} - X_{f4}}, \quad k_c = \frac{Y_{c1} - Y_{c2}}{X_{c1} - X_{c2}} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} b_f &= Y_{f3} - k_f X_{f3} \\ b_c &= Y_{c1} - k_c X_{c1} \end{aligned} \quad (15)$$

次に、CS と FS の直線歯形の幾何的關係から、歯の干渉を判定する。第 1 の場合は Fig. 7 (a), (b) のように、両歯形が平行である場合であり、 $k_f = k_c$ となる。この場合、FS の歯の中心線と中立線の交点 M と、FS および CS の歯面間の距離をそれぞれ d_f, d_c とすると

$$\begin{aligned} d_f &= \frac{|Y_m - k_f X_m - b_f|}{(1 + k_f^2)^{1/2}} \\ d_c &= \frac{|Y_m - k_c X_m - b_c|}{(1 + k_c^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (16)$$

になる。ここで、 X_m, Y_m は (O-X, Y) 座標系における点 M の座標であり、式 (2) と式 (10) によって求められる。そして、次式が成立すれば、その歯対は両歯面が重なり ($d_f = d_c$) あるいはオーバーラン ($d_f > d_c$) の状態の干渉になっている。

$$d_f \geq d_c \quad (17)$$

第 2 の場合には、 $k_f \neq k_c$ であり、両歯形直線が互いに

交差している状態である (Fig. 7 (c), (d))。この場合、CS と FS の歯面間の交点の X 座標を求めると

$$X_{fc} = (b_c - b_f) / (k_f - k_c) \quad (18)$$

になる。したがって、以下の 2 つの条件を同時に満足すれば、その歯対は両歯面が交わり状態の干渉になっている (Fig. 7 (c))。

$$X_{c1} \leq X_{fc} \leq X_{c2} \quad (X_{c1} \leq X_{c2} \text{ の場合})$$

あるいは (19)

$$X_{c2} \leq X_{fc} \leq X_{c1} \quad (X_{c2} \leq X_{c1} \text{ の場合})$$

と

$$X_{f3} \leq X_{fc} \leq X_{f4} \quad (X_{f3} \leq X_{f4} \text{ の場合})$$

あるいは (20)

$$X_{f4} \leq X_{fc} \leq X_{f3} \quad (X_{f4} \leq X_{f3} \text{ の場合})$$

また、Fig. 7 (d) のような状態に対して、FS の歯形上の歯先点 4 と点 5 の 2 点を結ぶ直線の方程式を求めると、次式のようになる。

$$Y = k_{fa} X + b_{fa} \quad (21)$$

ここで

$$k_{fa} = \frac{Y_{f5} - Y_{f4}}{X_{f5} - X_{f4}}, \quad b_{fa} = Y_{f5} - k_{fa} X_{f5}$$

そして、この直線と CS の歯形直線との交点の X 座標を求めると

$$X_{ac} = (b_{fa} - b_c) / (k_c - k_{fa}) \quad (22)$$

になる。したがって、この X_{ac} が次の 2 つの条件を同時に満足すれば、その歯対は両歯面がオーバーランの状態の干渉になっていることになる。

$$X_{f5} \leq X_{ac} \leq X_{f4} \quad (X_{f5} \leq X_{f4} \text{ の場合})$$

あるいは (23)

$$X_{f4} \leq X_{ac} \leq X_{f5} \quad (X_{f4} \leq X_{f5} \text{ の場合})$$

と

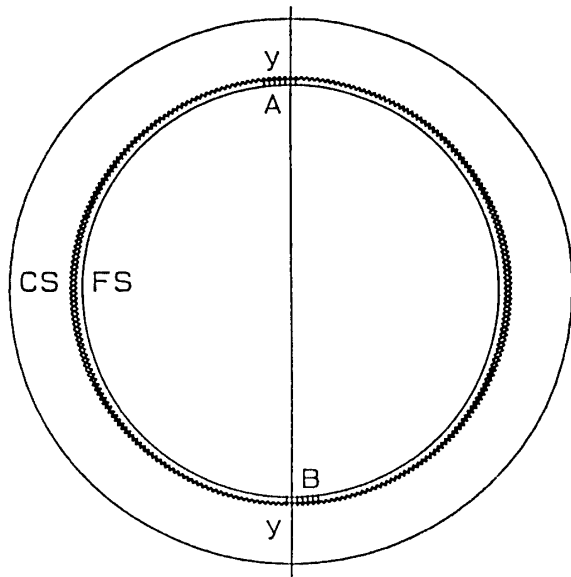
$$X_{c1} \leq X_{ac} \leq X_{c2} \quad (X_{c1} \leq X_{c2} \text{ の場合})$$

あるいは (24)

$$X_{c2} \leq X_{ac} \leq X_{c1} \quad (X_{c2} \leq X_{c1} \text{ の場合})$$

4. 計算結果と考察

3. に示した判定方法を用いて、理論計算によって波



THE NUMBER OF ENGAGEMENT
TEETH = $7 * 2$, $\delta = .928$

Fig. 8 The engagement of strain wave gearing

動歯車装置の干渉状態を調べた結果を Fig. 8 に示す。

Fig. 8 は, Table. 1 に示している波動歯車装置の諸元を用いて, CS の歯形上の基準ピッチ点をかみあいの基準点として, WG が時計回りの場合の理論計算結果を片歯面のみについて示したものであり, WG の長軸を yy として, A 部と B 部の 2 箇所をかみあっていることを示している。図中の FS の歯に施した「|」のマークは CS の歯と干渉している歯であることを示し, A 部と B 部でそれぞれ 7 枚, 計 14 枚の歯対が干渉していることを示している。なお, Fig. 8 において, 左右対称になっていないのは, 片歯面のみについての解析結果を示したことによる。

Fig. 9 には, Fig. 8 の A 部における FS の No.255 の歯と CS の No.257 の歯の干渉の状態を拡大して示す。Fig. 9 より, CS の歯先が FS の歯先にくい込むような干渉になっていることがわかる。図は省略したが, 他の部分の干渉も同様に, CS の歯先が FS の歯元に食い込む干渉となっていた。

Fig.10 には, 横軸に WG の回転角を, 縦軸にかみあいの A 部と B 部の干渉歯数の合計値を示している。図中の γ_c は CS の隣っている歯の中心線のなす角である。Fig.10 より, 波動歯車装置の干渉歯数は WG の回転によって歯の 1 ピッチごとに周期的に変動することがわ

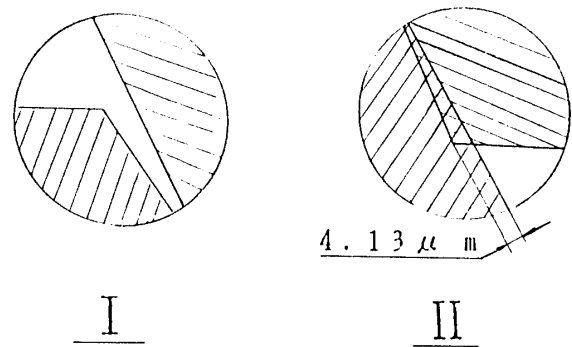
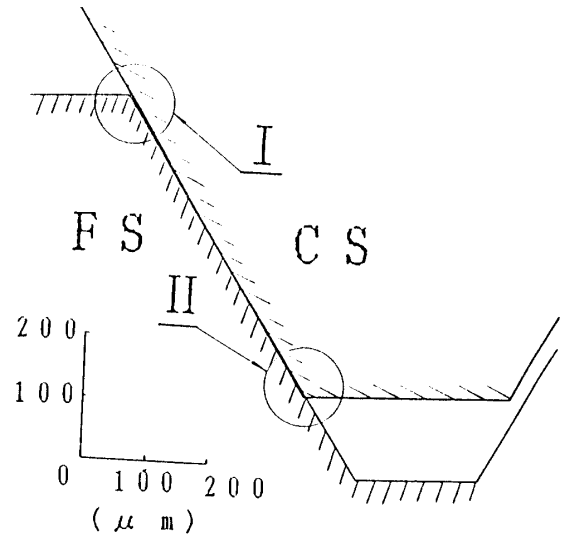


Fig. 9 Tooth interference of CS and FS

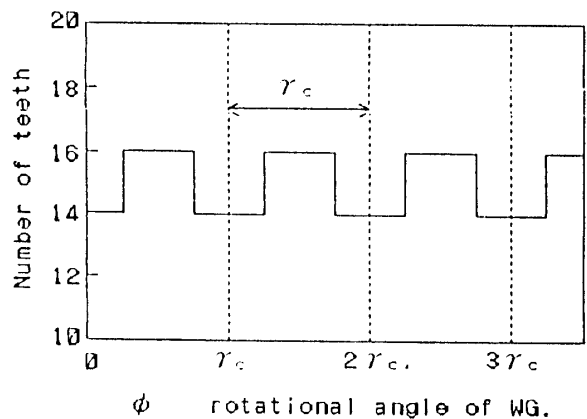


Fig.10 The effect of the position of WG on tooth engagement

かる。

5. 結 言

波動歯車装置の歯形を直線に近似して、真円のサーキュラスプラインと楕円形状のフレキシブルスプラインとの干渉を理論的に解析する方法を示し、無負荷状態での干渉を調べた。得られた主な結果を以下に示す。
(1) 波動歯車装置の干渉は、サーキュラスプラインの歯先がフレキシブルスプラインの歯元に食い込むような干渉が主となる。

(2) 波動歯車装置の干渉歯数はウェーブジェネレータの回転に伴い、1ピッチ周期で変動する。

参考文献

- (1) Ishikawa, S., Papers JSME 1967 Semi-Int. Symp., (1967), 97-104.
- (2) 近藤孝之, 高田潤, 日本機械学会論文集, 52巻, 481号, C編(1986), 2456.

(平成3年10月16日受理)