二つの獨立確率變數の四則で作られる複素變數の分布函數

眞　野　孝　義

確率変数Xの分布函数は $F(x)=\Pr\cdot\{X<x\}$ で定義する。X，Yを二つの独立なる確率変数とし、夫々の分布函数を $F(x)$，$G(y)$ とする。

今 $Z=X+Y$，$X-Y$，$X\cdot Y$，Y/X なる確率変数を作つて、夫々の分布函数を $T(z)$，$H(z)$，$K(z)$，$W(z)$ とすれば、それらは

$$(1)\ T(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(z-x)\cdot dF(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(z-y)\cdot dG(y)$$

$$(2)\ H(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}[1-G(x-z)]\cdot dF(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(y+z)\cdot dG(y)$$

$$(3)\ K(z)=\int_{-\infty}^{0}\left[1-G\left(\frac{z}{x}\right)\right]\cdot dF(x)+\int_{0}^{+\infty} G\left(\frac{z}{x}\right)\cdot dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\left[1-F\left(\frac{z}{y}\right)\right]\cdot dG(y)+\int_{0}^{+\infty} F\left(\frac{z}{y}\right)\cdot dG(y)$$

$$(4)\ W(z)=\int_{-\infty}^{0}[1-G(z\cdot x)]\cdot dF(x)+\int_{0}^{+\infty} G(zx)\cdot dF(x)$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\left[F\left(\frac{y}{z}\right)-F(0)\right]\cdot dG(y)+\int_{0}^{\infty}\left[F(0)-F\left(\frac{y}{z}\right)\right]\cdot dG(y) & \text{for } z<0\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{0}[1-F(0)]\cdot dG(y)+\int_{0}^{+\infty}F(0)\cdot dG(y) & \text{for} z=0\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{0}\left[1+F\left(\frac{y}{z}\right)-F(0)\right]\cdot dG(y)+\int_{0}^{+\infty}\left[1-F\left(\frac{y}{z}\right)+F(0)\right]\cdot dG(y) & \text{for } z>0\end{cases}$$

で与えられる。ここには(4)の証明を試みる。

$$\begin{cases}Z=Y/X\\ W(z)=\Pr.\{z<Z\}=\Pr.\left\{\dfrac{Y}{X}<Z\right\}\end{cases}$$

として、先づ $z>0$ とする。

今数列

$$\begin{cases}-\infty\leftarrow\cdots x_{-n},\cdots x_{-1},\cdot\ x_0=0,\ x_1\cdots x_n\cdots\rightarrow+\infty\\ \mathrm{Max}\ (x_k-x_{k-1})<\delta\end{cases}$$

を択んで

$$r_k=\begin{cases}E\ \{(xy);\ x_{k-1}\leqq x<x_k\quad y<z\cdot x_{k-1}\} & \text{for} x_{k-1}\geqq 0\\ E\ \{(xy);\ x_{k-1}\leqq x<x_k\quad y>zx_k\} & \text{for} x_k\leqq 0\end{cases}$$

$$Rj=\begin{cases}E\ \{(xy);\ x_{j-1}\leqq x<x_j\quad y<zx_j\} & \text{for } x_{j-1}\geqq 0\\ E\ \{(xy);\ x_{j-1}\leqq x<x_j\quad y>zx_{j-1}\} & \text{for} x_j\leqq 0\end{cases}$$

とすれば

$$\sum_k r_k \leq E\left\{(xy)\ ;\ \frac{y}{x}<z\right\} \leqq \sum_j R_j$$

$$\therefore\ Pr.\ \left\{(xy)\ \varepsilon\ \sum_k r_k\right\} \leqq W(z) \leqq Pr.\ \left\{(xy)\ \varepsilon\ \sum_j R_j\right\}$$

さてX，Yは独立であるから

$$Pr.\ \{(xy)\ \varepsilon\ r_k\} = \begin{cases} G(z\cdot x_{k-1})\ [F(x_k)-F(x_{k-1})] & \text{for } x_{k-1}\geqq 0 \\ [1-G(zx_k)]\cdot[F(x_k)-F(x_{k-1})] & \text{for } x_k\leqq 0 \end{cases}$$

但し $G(y)$ が$y_i=zx_i$ にて連続なる様に x 軸を分割して行くものとする。

しからば「加法定理」によつて

$$Pr.\ \{(xy)\ \varepsilon\ \sum r_k\}$$

$$=\sum_{j=-\infty}^{0}[1-G(zx_k)]\cdot[F(x_k)-F(x_{k-1})] + \sum_{k=1}^{\infty}G(zx_k)\cdot[F(x_k)-F(x_{k-1})]$$

同様にして

$$Pr.\ \{(xy)\ \varepsilon\ \sum R_j\}$$

$$=\sum_{j=-\infty}^{0}[1-G(zx_{j-1})]\cdot[F(x_j)-F(x_{j-1})] + \sum_{j=1}^{\infty}G(zx_j)\cdot[F(x_j)-F(x_{j-1})]$$

この二つは正項級数にして、その和が何れも1より大となることはないから、Stieltjes積分論によつて、$\delta\to 0$ なる時同一の極限

$$\int_{-\infty}^{0}[1-G(zx)]\cdot dF(x)+\int_{0}^{\infty}G(zx)\cdot dF(x)$$

を有する。故にその間に夾まれる W (z)も、これに等しい。

$z=0$，$z<0$ の時も証明の仕方を少し変えるだけで、同一の結果が得られる。これで(4)の前半が証明出来たが、(4)の後半を証明するのには y 軸を分割して同様にやればよい。

以上(4)の証明を述べたが(1), (2), (3)も同様に証明出来る。

特別にX，Yの一方が定数である場合には次の結果を得る。

Z =	df =
(5) $X+a$	$F(z-a)$
(6) $a-X$	$1-F(a-z)$
(6)′ $-X$	$1-F(-z)$
(7) $a/X\ (a\neq 0)$	$a>0$ ならば $F\left(\frac{z}{a}\right)$ $a<0$ ならば $1-F\left(\frac{z}{a}\right)$
(8) $a/X\ (a\neq 0)$	$a>0$ ならば $\begin{cases} F(0)-F\left(\frac{a}{z}\right) & \text{for } z<0 \\ F(0) & \text{for } z=0 \\ 1-F\left(\frac{a}{z}\right)+F(0) & \text{for } z>0 \end{cases}$ $a<0$ ならば $\begin{cases} F\left(\frac{a}{z}\right)-F(0) & \text{for } z<0 \\ 1-F(0) & \text{for } z=0 \\ 1+F\left(\frac{a}{z}\right)-F(0) & \text{for } z>0 \end{cases}$
(8)′ $1/X$	$\begin{cases} F(0)-F\left(\frac{1}{z}\right) & \text{for } z<0 \\ F(0) & \text{for } z=0 \\ 1-F\left(\frac{1}{z}\right)+F(0) & \text{for } z>0 \end{cases}$