

# かき歯車の歯のたわみ

専 徳 博 文\*

## Deflection of the Tooth of a Bevel Gear

Hirofumi SENTOKU

### Abstract

It is very important to know the load distribution on the line of contact and the tooth root stress of a bevel gear. However, to calculate these is not easy, because the tooth depth and the tooth thickness get bigger from toe to heel and the meshing of a bevel gear is complicated. Accordingly, studies on these are few.

Therefore, before the load distribution on the tooth flank and the tooth root stress of a bevel gear are calculated, the deflection of the fan shaped cantilever under the condition where the concentrated load is placed on the cantilever is calculated, by the method that the fundamental differential equations derived from the static balance on the minute part of the cantilever is represented in the difference equations and the difference equations are solved.

### 1. 緒 言

歯車の負荷かみあい時の接触線上の荷重分布、歯元応力分布などの荷重伝達特性を知ることは強度設計上非常に重要であり、平歯車では古くからそれらの研究が多くなされている。

かき歯車の場合についても、その荷重伝達特性を知ることが重要であるが、そのかみあいが三次的であり、また円筒歯車と異なり内端から外端にかけて歯厚および歯たけが大きくなることなどのためにそれらを求めることは容易でなく、円筒歯車であるはずば歯車の場合でも接触線上の荷重分布に関する研究はいくらか報告<sup>1),2)</sup>されている程度である。したがって、かき歯車の接触線上の荷重分布、歯元応力分布などの荷重伝達特性を扱った研究は極めて少ない。

そこで、まず、かき歯車の歯面上の荷重分布、歯元応力分布を計算するに先立ち、かき歯車の歯の近似体と考えられる扇形変厚片持はりに集中荷重が作用したときのたわみを、微小部分に関する静的つりあい式よ

り求めた基本微分方程式を差分方程式で表示し、それらを解くことによって求めた。これらの結果を検討したので報告する。

### 2. かき歯車の歯のたわみ計算法

#### 2.1 基礎方程式

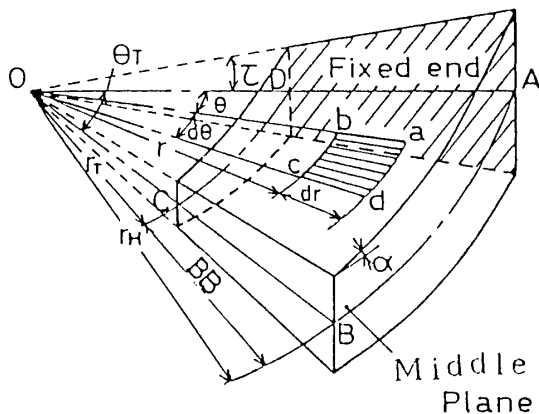
かき歯車の歯のたわみを計算するにあたって、かき歯車の歯の近似体として Fig. 1 (a) に示すような扇形変厚片持はりを使用し、その任意の点に集中荷重が作用する場合のたわみについて取扱う。ここで、片持はりの厚さの中央を通る中央面 (Fig. 1 (a) の ABCD) 上に座標系として図に示すような極座標  $(r, \theta)$  を使用し、O を原点 (かき歯車の頂点) にとり、片持はりの幅方向を  $r$ 、はり出し方向を  $\theta$  とし  $\overline{AO}$  を  $\theta=0$  とした。また図中の斜線の部分ははりの固定端を示し、 $r_r$  は原点 O から原点側のはりの側自由端 (かき歯車の内端) までの距離、 $r_H$  は原点から他方のはりの側自由端 (かき歯車の外端) までの距離、BB ははりの幅、 $\theta_r$  ははりのはり出し角度をそれぞれ示す。また平面 ABCD ははりの厚さの中央を通る中央面を、 $\alpha$  ははりの上面と中央面とのなす角を、 $r$  は固定端 ( $O=\theta$ ) での中立軸  $\overline{AO}$  に

\*生産機械工学科

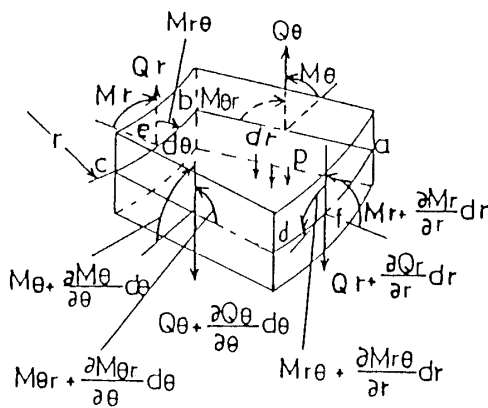
対するはりの傾斜角を示す。いま, Fig. 1 (a) の幅方向距離  $r$  と  $r+dr$ , はり出し方向角度  $\theta$  と  $\theta+d\theta$  によって切り出される微小扇形要素  $abcd$  を考え, 同 Fig. (b) に示すようにこの微小部分に分布荷重  $P$  を負荷すると, はりの幅方向な垂直な円周面に作用する曲げモーメント  $M_r$ , はりのはり出し方向に垂直な半径面に作用する曲げモーメント  $M_\theta$ , ねじりモーメント  $M_{r\theta}$  および  $M_{\theta r}$ , せん断力  $Q_r$  および  $Q_\theta$  がこの微小扇形要素の各側面に生じる。これらは要素の側面の単位長さあたりの大きさによって表され, 図に示す向きを正とする。まず, この微小扇形要素の鉛直方向の力のつりあいより, 関係式を求め高次の微小項を省略すると次式を得る。

$$Q_r + \frac{\partial Q_r}{\partial r} r + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + pr = 0 \quad (1)$$

同様に Fig. 1 (b) の  $bc$  のまわりのモーメントのつりあい, 平面  $abcd$  の中心を通る  $ef$  のまわりのモーメントのつりあいより関係式を求め, 高次の微小項を省略すると



(a)



(b)

Fig. 1 Fan shaped cantilever.

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\theta + \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial \theta}) = Q_r \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r}(-M_{r\theta} + M_{\theta r} - \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta}) \\ & = -\frac{\partial M_r}{\partial r} - \frac{1}{r}(2M_{r\theta} - \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta}) = Q_\theta \end{aligned} \quad (3)$$

以上の式(2), (3)を式(1)に代入して

$$\begin{aligned} & r \frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial M_r}{\partial r} - 2 \frac{\partial^2 M_{r\theta}}{\partial \theta \partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial M_r}{\partial r} \\ & - \frac{\partial M_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} = -pr \end{aligned} \quad (4)$$

が求まる。式(4)がかさ歯車の歯を近似体とした扇形変厚片持はりの基礎方程式である。また, この微小扇形要素の分布荷重  $p$  によるたわみを  $W$  とするとそれぞれの曲げモーメントとたわみとの関係式として次式が成り立つ<sup>3)</sup>。

$$M_r = -D \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right\}$$

$$M_\theta = -D \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right\}$$

$$M_{r\theta} = -M_{\theta r} = D(1-\nu) \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right\}$$

(5)

ここで,  $D$  は扇形変厚片持はりの曲げ剛性であり, Fig. 2 に示すように中央面  $ABCD$  に垂直に原点  $O$  より  $Z$  軸を設定し, 中央面上の任意の点  $G(r, \theta)$  から  $Z$  軸方向のはり面までの距離を  $Z_1$  とすると, 座標  $(r, \theta)$  における曲げ剛性  $D(r, \theta)$  は,

$$\begin{aligned} D(r, \theta) &= \int_{Z_1} Z_1 \frac{E}{1-\nu^2} dz = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{2}{3} Z_1^3 \\ &= \frac{2}{3} \frac{E}{1-\nu^2} r^3 (\cos\theta \tan\tau - \sqrt{\tan^2\alpha - \tan^2\tau \sin^2\theta})^3 \end{aligned} \quad (6)$$

となる。ここで,  $E$  は縦弾性係数,  $\nu$  はポアソン比である。

つぎに式(4)に式(5)を代入すると,

$$\begin{aligned} & A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + A_1 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + A_2 \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} \\ & + A_3 \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + A_4 \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} + A_5 \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \end{aligned}$$

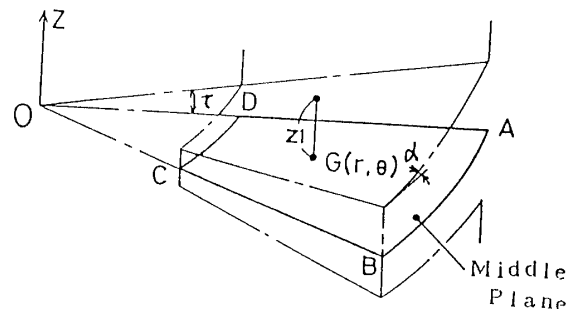


Fig. 2 Thickness of fan shaped cantilever.

$$\begin{aligned}
 &+ A_6 \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + A_7 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + A_8 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + A_9 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \\
 &+ A_{10} \frac{\partial w}{\partial r} + A_{11} \frac{\partial w}{\partial \theta} = p \quad (7)
 \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 A_0 &= D, \quad A_1 = \frac{D}{r^4}, \quad A_2 = \frac{2D}{r^2}, \quad A_3 = \frac{2}{r} \left( r \frac{\partial D}{\partial r} + D \right) \\
 A_4 &= \frac{2}{r^2} \frac{\partial D}{\partial \theta}, \quad A_5 = \frac{2}{r^2} \left( \frac{\partial D}{\partial r} - \frac{D}{r} \right), \quad A_6 = \frac{2}{r^4} \frac{\partial D}{\partial \theta} \\
 A_7 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2+\nu}{r} \frac{\partial D}{\partial r} - \frac{D}{r^2} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 D}{\partial \theta^2}, \\
 A_8 &= \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial D}{\partial r} + \frac{4}{r^4} D + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 D}{\partial \theta^2}, \\
 A_9 &= \frac{2}{r^2} \left\{ (1-\nu) \frac{\partial^2 D}{\partial r \partial \theta} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial D}{\partial \theta} \right\}, \\
 A_{10} &= \frac{\nu}{r} \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial D}{\partial r} + \frac{D}{r^3} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 D}{\partial \theta^2}, \\
 A_{11} &= \frac{-2(1-\nu)}{r^3} \left( \frac{\partial^2 D}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial D}{\partial \theta} \right)
 \end{aligned}$$

が求められ、式(7)が微小扇形要素のたわみ  $w$  を満足する基本微小微分方程式であり、式(7)を解くことによって扇形変厚片持はりの任意の位置を分布荷重が作用した扇形変厚片持はりの任意の分布荷重が作用した場合のたわみを求めることができる。

### 2.2 境界条件

扇形変厚片持はりは Fig. 1 (a) に示すように有限幅であるので、はりの周辺の各端にはつぎのような境界条件が存在する。

#### 1) 固定端

Fig. 1 (a) において  $\theta=0$  の固定端上では、そこの片持はりの傾斜が曲げモーメント  $M_\theta$  に比例し、基礎部での沈下量がせん断力  $Q_\theta$  に比例すると仮定すれば

$$\left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} = -k_1 r M_\theta, \quad w_{\theta=0} = K_2 Q_\theta \quad (8)$$

が成立する。 $k_1, k_2$  については、C. Weber<sup>4)</sup> が無限幅片持平板の先端に等分布荷重が作用した場合について弾性エネルギー法から求めた値を採用して、

$$\begin{aligned}
 k_1 &= 18(1-\nu^2)/\pi E T^2(r, \theta), \\
 k_2 &= 4.8(1-\nu^2)/\pi E \quad (9)
 \end{aligned}$$

とする。ここで、 $T(r, 0)$  は幅方向距離  $r$  の固定端でのはりの厚さを示す。

#### 2) 自由端

Fig. 1 において、 $\theta=\theta_T$  では自由端であり、曲げモーメント  $M_\theta$ 、ねじりモーメントを鉛直方向に作用するせん断力に置き換えることによって求められる修正せん断力<sup>4)</sup>がともに 0 となり

$$(M_\theta)_{\theta=\theta_T} = 0,$$

$$(V_\theta)_{\theta=\theta_T} = \left( Q_\theta + \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial r} \right)_{\theta=\theta_T} = 0 \quad (10)$$

また、自由端  $r=r_T$  および  $r=r_H$  にそつても曲げモーメント  $M_r$ 、修正せん断力  $V_r$  が 0 であるから

$$\begin{aligned}
 (M_r)_{r=r_T} &= 0, \\
 (V_r)_{r=r_T} &= \left( Q_r - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \right)_{r=r_T} = 0 \quad (11)
 \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
 (M_r)_{r=r_H} &= 0, \\
 (V_r)_{r=r_H} &= \left( Q_r - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \right)_{r=r_H} = 0 \quad (12)
 \end{aligned}$$

である。

さらに、自由端の交点においては、集中反力が 0 であるのでねじりモーメントを鉛直方向のせん断力に置き換えることによって

$$M_{r\theta} = 0 \quad (13)$$

となる。

以上から扇形変厚片持はりのたわみは微分方程式(7)、境界条件式(8)~(13)を満足する解として求められる。この解は差分法を用いて式(7)~(13)に差分方程式表示に置き換えこれらを解くことによって求めることができる。その際に、扇形変厚片持はりを Fig. 3 に示すように整数で分割できる単位網目角  $\Delta \theta$ 、単位網目幅  $\Delta r$  で  $m \times n$  個の網目に分割し、各網目交点のたわみを  $w_{0,0} \sim w_{m,n}$  とし、各網目交点に作用する呼称荷重をその添字記号をたわみと同様にして  $p_{0,0} \sim p_{m,n}$  とした。これらの記号を使用し、基礎方程式(6)およびその中心網目交点に適した境界条件式(8)~(13)を各網目交点を中心に差分化することによって差分方程式が導かれる。以上より各網目交点の  $m \times n$  個のたわみを含んだ差分方程式が  $m \times n$  個だけ得られ、これらの  $m \times n$  元一次方程式を解くことによって  $m \times n$  個の網目交点におけるたわみ  $w_{0,0} \sim w_{m,n}$  が求められる。

なお、式(7)は分布荷重に関する基本微分方程式であ

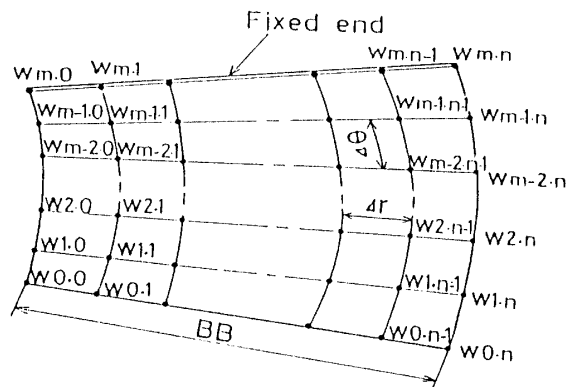


Fig. 3 Coordinates of deflection.

るので網目交点に作用する呼称荷重  $p_{o.o} \sim p_{m.n}$  は単位網目に作用する分布荷重として取扱う。すなわち Fig. 4

(a) に示すようにはり内部の座標  $(r, \theta)$  に集中荷重  $P$  が作用するとした場合、図の斜線部分に一樣に荷重が分布するとして分布荷重  $p = P / (\Delta r \cdot r \Delta \theta)$  が網目交点に作用するとし、自由端に集中荷重が作用する場合は Fig. 4 (b) に示すように単位網目の半分の範囲に分布荷重が作用するとして、 $p = 2P / (\Delta r \cdot r \Delta \theta)$  とする。また自由端の交差する点に集中荷重が作用する場合は Fig. 4 (c) のように  $4P / (\Delta r \cdot r \Delta \theta)$  の分布荷重が作用するとおく。このようにして各網目交点に集中荷重が作用した場合の分布荷重として  $p_{o.o} \sim p_{m.n}$  を設定する。

集中荷重を分布荷重におきかえるにあたって扇形変厚片持りは板の曲げ直性が分布荷重を考慮する範囲内で異なるので板の曲げ剛性についても考慮しなければならない。まず、先端に集中荷重が作用する場合は Fig. 4 (b) に示す範囲に分布荷重が作用するとおくから、この場合の板の曲げ剛性は分布荷重が作用すると考へた範囲の板の曲げ剛性の平均値としなければならない。これを先端の仮の呼称曲げ剛性  $D_{a4}$  とすると

$$D_{a4} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\int_{\theta_r - \Delta\theta/2}^{\theta_r} \left\{ \int_{r-\Delta r/2}^{r+\Delta r/2} \left( \int_{-Z_1}^{Z_1} Z^2 dZ \right) dr \right\} r d\theta}{r \cdot \Delta\theta/2 \cdot \Delta r}$$

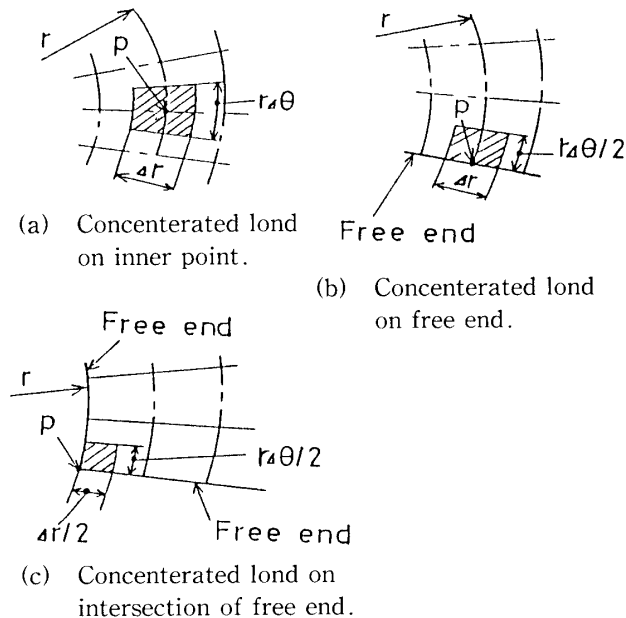


Fig. 4 Concentrated load.

$$= \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{\Delta\theta/2 \cdot \Delta r} \frac{\tan^3 \alpha}{6} \left\{ (r + \Delta r/2)^4 - (r - \Delta r/2)^4 \right\} \times \left\{ (u_2 - u_1) - 1/3(u_1^3 - u_2^3) \right\} \tag{14}$$

ただし

$$u_1 = \sin(\theta_r - \Delta\theta/2 + \gamma), \quad u_2 = \sin(\theta_r + \gamma), \\ \gamma = \cos^{-1}(\tan \tau / \tan \alpha)$$

上式中の  $Z_1, \alpha, \tau$  は Fig. 2 に示された記号である。また、はりの曲げ剛性の平均化を考慮すべきパターンは前述の集中荷重が作用した場合に帰着し、Fig. 5 に示すように先端を含めた  $a_1 \sim a_6$  の 6 とおり考えられる。各パターンの範囲は前述の分布荷重が作用する範囲と等しい。各パターンにおける板の曲げ剛性の平均を Table 1 に示す。これらの呼称曲げ剛性を差分方程式中の  $D$  に使用する。ところが以上のように板の曲げ剛性を平均化したためにはりの任意の 2 点に集中荷重が作用した場合のたわみの中で弾性理論上の相固定定理が成立しなくなる。この関係を補正するためにたわみの中で相反定理が満足するように板の各呼称曲げ剛性に補正係数を乗じて改めて板の曲げ剛性を求め、差分方程式にこれらの補正曲げ剛性を用いてたわみを求めた。この補正係数の値はたわみの数値計算から求められ、その計算結果は後に述べる。

### 3. たわみ計算結果

まず、このたわみ計算方法の妥当性を調べるため、次のような方法を用いた。Fig. 1 (a) の扇形変厚片持りの  $r_r$  を極めて大きく、 $\theta_r$  は極めて小さくすることによって図の AD と BC はほぼ平行、CD と AB はほぼ直線となり、この片持りはラック型片持りに近似することができる。そこで扇形変厚片持りをラック型片持りに近似させ本計算方法を用いて近似ラック

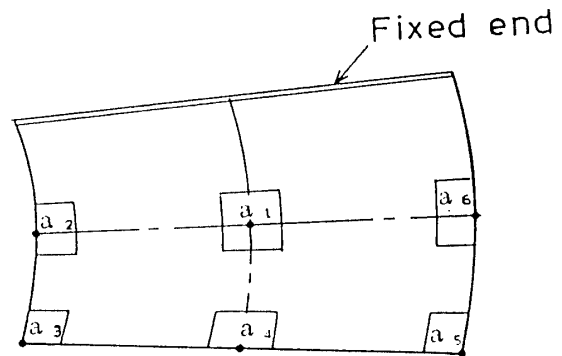


Fig. 5 Patterns of bending stiffness.

Table 1 Mean value of bending stiffness.

Mean value of bending stiffness	
$a_1$	$\frac{E/(1-\nu^2)/(\Delta\theta\Delta r) \cdot \tan^3\alpha/6 \{ (r+\Delta r/2)^4 - (r-\Delta r/2)^4 \}}{\times \{ (u_2-u_1) - 1/3(u_2^3-u_1^3) \}}$ $u_1 = \sin(\theta - \Delta\theta/2 + \gamma), u_2 = \sin(\theta + \Delta\theta/2 + \gamma)$
$a_2$	$\frac{E/(1-\nu^2)/(\Delta\theta\Delta r)/2 \cdot \tan^3\alpha/6 \{ (r+\Delta r/2)^4 - r_T^4 \}}{\times \{ (u_2-u_1) - 1/3(u_2^3-u_1^3) \}}$ $u_1 = \sin(\theta - \Delta\theta/2 + \gamma), u_2 = \sin(\theta + \Delta\theta/2 + \gamma)$
$a_3$	$\frac{E/(1-\nu^2)/(\Delta\theta\Delta r)/4 \cdot \tan^3\alpha/6 \{ (r_T+\Delta r/2)^4 - r_T^4 \}}{\times \{ (u_2-u_1) - 1/3(u_2^3-u_1^3) \}}$ $u_1 = \sin(\theta - \Delta\theta/2 + \gamma), u_2 = \sin(\theta + \Delta\theta/2 + \gamma)$
$a_5$	$\frac{E/(1-\nu^2)/(\Delta\theta\Delta r)/4 \cdot \tan^3\alpha/6 \{ r_H - (r_H+\Delta r/2)^4 \}}{\times \{ (u_2-u_1) - 1/3(u_2^3-u_1^3) \}}$ $u_1 = \sin(\theta - \Delta\theta/2 + \gamma), u_2 = \sin(\theta + \gamma)$
$a_6$	$\frac{E/(1-\nu^2)/(\Delta\theta\Delta r)/2 \cdot \tan^3\alpha/6 \{ r_H - (r_H+\Delta r/2)^4 \}}{\times \{ (u_2-u_1) - 1/3(u_2^3-u_1^3) \}}$ $u_1 = \sin(\theta - \Delta\theta/2 + \gamma), u_2 = \sin(\theta + \Delta\theta/2 + \gamma)$

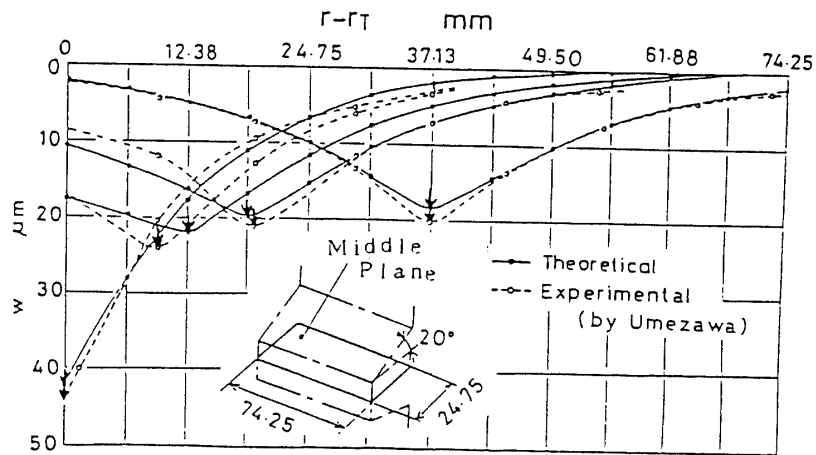


Fig. 6 Deflection at the tip of rack type cantilever.

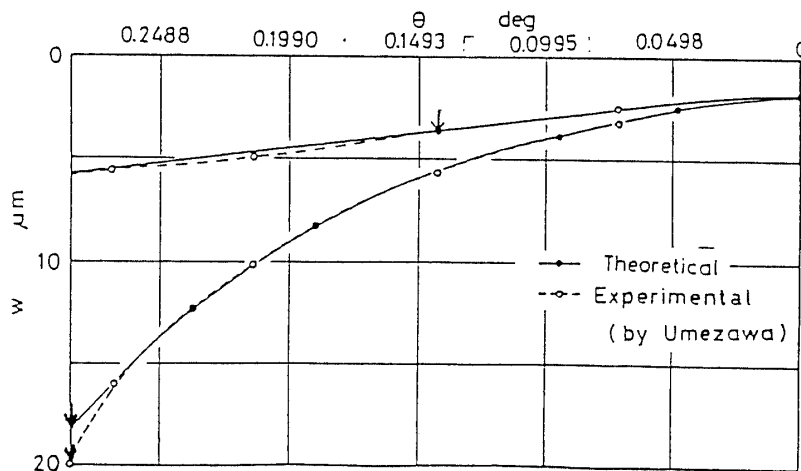


Fig. 7 Deflection at the middle of rack type cantilever.

型片持はりのたわみを求め、その計算値と、梅沢のラック型片持はりのたわみの実測値<sup>5)</sup>を比較し、本計算方法の妥当性を検討した。それらの結果を Fig. 6, 7 に示す。Fig. 6 中に梅沢の実験時のラック型片持はりの形状を示しており、この形状と本計算方法による計算時の片持はりの形状をほぼ同一にするため原点より側自由端（内端側）までの距離  $r_T=4962.9\text{mm}$ 、はり出し角度  $\theta_T=0.2836^\circ$ 、固定端での厚み角度  $\tau=0.3128^\circ$ 、幅  $BB=74.25\text{mm}$ 、中央面に対する傾斜角  $\alpha=20^\circ$  (Fig. 1 参照)とした。また集中荷重  $P=7056\text{N}$ 、はりのはりだし方向の分割  $m=7$ 、はりの幅方向の分割  $n=13$ として近似ラック片持はりのたわみを計算した。Fig. 6 は横軸にラック型片持はりの側自由端 ( $r=r_T$ ) から先端にそっての距離を、たて軸にはりの先端の矢印の位置に集中荷重が作用した場合のたわみを示している。Fig. 7 は固定端 ( $\theta=0$ ) からはり出し方向角度に対して、はりの幅中央断面 ( $r=r_T+BB/2$ ) のはり出し方向における矢印の位置に集中荷重が作用した場合のたわみを示している。これらの図より本計算方法による計算結果と梅沢による実測結果はほぼ一致していることがわかり、本計算方法は妥当であることがいえる。

### 3. 結 言

かき歯車の近似体と考えられる扇形変厚片持はりの集中荷重によるたわみを求める計算方法を示し、さらに扇形変厚片持はりを近似片持はりに置き換えたときのたわみを本計算方法によって計算し、その計算値とラック型片持はりの実測値とを比較した結果、両者はほぼ一致し、本たわみ計算方法の妥当性が確認された。

### 参 考 文 献

- 1) 梅沢, はすば歯車の負荷かみあい試験(第3報), 機論, 40-330, (昭49), 576.
- 2) 久保・梅沢, 誤差をもつ円筒歯車の荷重伝達特性に関する研究(第1報), 機論, 43 $\zeta$ , (昭和53), 2771.
- 3) 関谷・斎藤, 薄板構造力学, (昭43), 174, 共立出版.
- 4) C. Weher, K. Banascheck, Formänderung und Profilrunknahme bei gerad- und schragverzahnten Radern, (195), Friedrich, Vieweg, Shon Braunschweig.
- 5) 梅沢, 歯車のための有限幅ラック型片持はりのたわみと歯元応力(第2報), 機論, 37-297, (昭46), 1041.

(平成元年3月28日受理)