

半円状母線と直線状母線間の相互インダクタンス (VI)

武平 信夫*・小出 幸男**・小谷 雅士***

Mutual Inductance between the Semicircular Bus and the Straight Bus (VI)

Nobuo TAKEHIRA*, Yukio KOIDE** and Masashi KOTANI***

Abstract

The authors have calculated the mutual inductance between the semicircular bus and the straight bus in various arrangements of two conductors. As is shown in this paper, there is often the case that the mutual inductance is expressed by infinite series which is the product of Gauss's hypergeometric function, trigonometric function and etc. Therefore, in this paper, the authors presented the table of numerical value easily to understand.

1. 緒 言

本論文においては、Fig. 1に示すような導体配置における母線間の相互インダクタンスについて解析している。解析された結果は Gauss の超幾何関数、三角関数等の積で表わされる二重無限級数を含む。先に報告した文献1においても同様な結果を得ている。ところで相互インダクタンスが二重無限級数の形で与えられた場合、各項の係数が階乗等を含み複雑となり、数値計算に相当苦心する。そこで二重無限級数を適当な

項までとり、直線状母線の長さ l や、半円状母線の半径 r を含まない各項の係数を表で与えることにより、数値計算の簡易化を試みた。

2. 導体配置 (Fig.1 参照)

両母線は同一平面内にあり、半円状母線の一端を重ね、かつ半円の両端を結ぶ直線状母線と直交しているものとする。また両母線はこの直線で分けられる二平面内にそれぞれあるものとする。

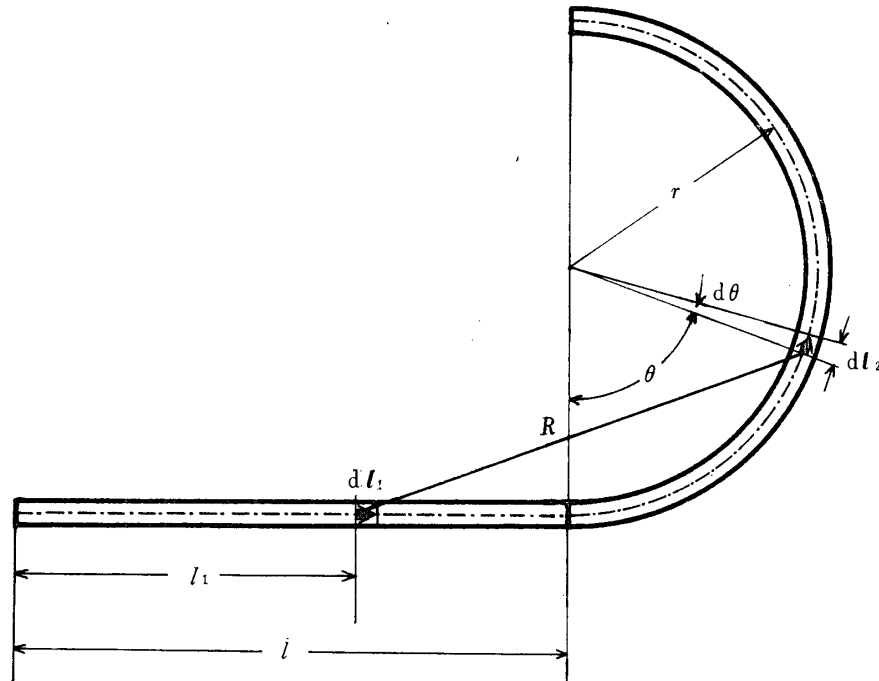


Fig. 1 Arrangement of two conductors

3. 相互インダクタンスの計算

Fig. 1において線素ベクトル dl_1 , dl_2 との距離 R はつぎのようになる。

* 電気工学教室

** 日本ビクター株式会社

*** 九州電力株式会社

$$R = \sqrt{(l-l_1+r \sin \theta)^2 + (r-r \cos \theta)^2} \quad (1)$$

また $d\mathbf{l}_1, d\mathbf{l}_2$ のスカラー積は

$$d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = r \cos \theta d\theta dl_1 \quad (2)$$

したがって Neumann の公式から相互インダクタンス M は

$$\begin{aligned} M &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{l_1=0}^{l_1=l} \frac{r \cos \theta d\theta dl_1}{\sqrt{(l-l_1+r \sin \theta)^2 + (r-r \cos \theta)^2}} \\ &= -\frac{\mu_0 r}{4\pi} \int_0^\pi \cos \theta \left[\ln |l-l_1+r \sin \theta + \sqrt{(l-l_1+r \sin \theta)^2 + (r-r \cos \theta)^2}| \right]_0^l d\theta \\ &= \frac{\mu_0 r}{4\pi} \int_0^\pi \cos \theta \ln \{l+r \sin \theta + \sqrt{(l+r \sin \theta)^2 + (r-r \cos \theta)^2}\} d\theta \\ &\quad - \frac{\mu_0 r}{4\pi} \int_0^\pi \cos \theta \ln \{r \sin \theta + \sqrt{(r \sin \theta)^2 + (r-r \cos \theta)^2}\} d\theta \\ &= \frac{\mu_0 r}{4\pi} (M_1 - M_2) \end{aligned} \quad (3)$$

ただし

$$M_1 = \int_0^\pi \cos \theta \ln \{l+r \sin \theta + \sqrt{(l+r \sin \theta)^2 + (r-r \cos \theta)^2}\} d\theta \quad (4)$$

$$M_2 = \int_0^\pi \cos \theta \ln \{r \sin \theta + \sqrt{(r \sin \theta)^2 + (r-r \cos \theta)^2}\} d\theta \quad (5)$$

(3) 式において M_1, M_2 を計算すれば相互インダクタンスが求まる。まず M_1 の計算をおこなう。

3.1 M_1 の計算

部分積分法を用いて (4) 式を展開すると

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^\pi \frac{(l \cos \theta + r \sin \theta + l) d\theta}{\sqrt{(l+r \sin \theta)^2 + (r-r \cos \theta)^2}} \\ &\quad - \int_0^\pi (1 + \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{r} \left[\sqrt{(l+r \sin \theta)^2 + (r-r \cos \theta)^2} \right]_0^\pi - \pi \\ &\quad + \int_0^\pi \frac{l d\theta}{\sqrt{(l+r \sin \theta)^2 + (r-r \cos \theta)^2}} \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{r} (\sqrt{l^2 + 4r^2} - l) - \pi \\ &\quad + \int_0^\pi \frac{l d\theta}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta + \beta)}} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{ただし } a = \sqrt{l^2 + r^2}, \quad \beta = \arctan\left(\frac{l}{r}\right) \quad (7)$$

文献 1 と同様に Bessel 関数を用いれば, M_1 は次式のようになる。

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{r} (\sqrt{l^2 + 4r^2} - l) - \pi \\ &\quad + \int_0^\pi J_0(at) J_0(rt) dt \int_0^\pi l d\theta \\ &\quad + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi J_n(at) J_n(rt) dt \int_0^\pi \cos n(\theta + \beta) d\theta \\ &= \frac{1}{r} (\sqrt{l^2 + 4r^2} - l) - \pi + \frac{2l}{a} K\left(\frac{r}{a}\right) \\ &\quad + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{lr^n \Gamma(n + \frac{1}{2}) {}_2F_1(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; n+1; \frac{r^2}{a^2})}{a^{n+1} \Gamma(n+1) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi \cos n(\theta + \beta) d\theta \\ &= \sqrt{u^2 + 4} - u - \pi + \frac{2u}{\sqrt{u^2 + 1}} K\left(\frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}\right) \end{aligned}$$

$$-4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u \sin(2k-1)\beta \Gamma\left(2k-\frac{1}{2}\right) {}_2F_1\left(2k-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2k; \frac{1}{u^2+1}\right)}{(u^2+1)^k (2k-1)\Gamma(2k)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (8)$$

ただし $u = \frac{l}{r}$

3.2 M_2 の計算

M_2 においては根号内が余弦だけの一次形となるので、計算が容易である。

$$\begin{aligned} M_2 &= \int_0^{\pi} \cos \theta \ln\{r \sin \theta + \sqrt{2(1-\cos \theta)}\} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos \theta \ln(1-\cos \theta) d\theta \\ &\quad + \int_0^{\pi} \cos \theta \ln(\sqrt{1+\cos \theta} + \sqrt{2}) d\theta \\ &= -\pi + 2 \end{aligned} \quad (9)$$

(3), (8), (9) 式から相互インダクタンス M は

$$\begin{aligned} M &= \frac{\mu_0 r}{4\pi} \left\{ \sqrt{u^2+4} - u - 2 + \frac{2u}{\sqrt{u^2+1}} K\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right) \right. \\ &\quad \left. - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u \sin(2k-1)\beta \Gamma\left(2k-\frac{1}{2}\right) {}_2F_1\left(2k-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2k; \frac{1}{u^2+1}\right)}{(u^2+1)^k (2k-1)\Gamma(2k)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right\} \\ &= \frac{\mu_0 r}{4\pi} \left\{ \sqrt{u^2+4} - u - 2 + \frac{2u}{\sqrt{u^2+1}} K\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right) - IS \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

ただし

$$IS = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u \sin(2k-1)\beta \Gamma\left(2k-\frac{1}{2}\right) {}_2F_1\left(2k-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2k; \frac{1}{u^2+1}\right)}{(u^2+1)^k (2k-1)\Gamma(2k)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (11)$$

4. 係数表および計算例

Fig. 1 に示す導体配置の相互インダクタンス M は (10) 式を用いて数値計算できるのであるが、超幾何関数の数値計算は一般に煩雑である。そこで以下に示すごとく超幾何関数を展開して u を含まない係数をもつ無限項級数を求め、その係数 $C_{k\eta}$ を表にしてみた。

(10) 式の無限項級数の ${}_2F_1$ を展開してみるとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} &{}_2F_1\left(2k-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2k; \frac{1}{u^2+1}\right) \\ &= \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma\left(2k-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{\eta=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2k-\frac{1}{2}+\eta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\eta\right)}{(2k+\eta)\eta!} \left(\frac{1}{u^2+1}\right)^\eta \\ &= \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma\left(2k-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{\eta=0}^{\infty} \frac{(4k-2+2\eta)!(2\eta)!}{\{(2k-1+\eta)!\eta!\}^2 4^{2k-1+2\eta}} \left(\frac{1}{u^2+1}\right)^\eta \end{aligned} \quad (12)$$

したがって (10) 式の二重無限項級数 IS はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} IS &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\eta=0}^{\infty} \frac{u \sin(2k-1)\beta (4k-2+2\eta)!(2\eta)!}{(u^2+1)^{k+\eta} \{(2k-1+\eta)!\eta!\}^2 (2k-1) 4^{2k-2+2\eta}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\eta=0}^{\infty} C_{k\eta} \frac{u \sin(2k-1)\beta}{(u^2+1)^{k+\eta}} \\ &= \frac{u \sin \beta}{u^2+1} \left\{ C_{10} + C_{11} \frac{1}{u^2+1} + C_{12} \left(\frac{1}{u^2+1}\right)^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{u \sin 3\beta}{(u^2+1)^2} \left\{ C_{20} + C_{21} \frac{1}{u^2+1} + C_{22} \left(\frac{1}{u^2+1} \right)^2 + \dots \right\} \\
 & + \frac{u \sin 5\beta}{(u^2+1)^3} \left\{ C_{30} + C_{31} \frac{1}{u^2+1} + C_{32} \left(\frac{1}{u^2+1} \right)^2 + \dots \right\} \\
 & + \dots \dots \dots
 \end{aligned} \tag{13}$$

ただし
$$C_{k\eta} = \frac{(4k-2+2\eta)!(2\eta)!}{\{(2k-1+\eta)!\eta!\}^2 4^{2k-2+2\eta}} \tag{14}$$

Table 1 は係数 $C_{k\eta}$ を表で示したものである。

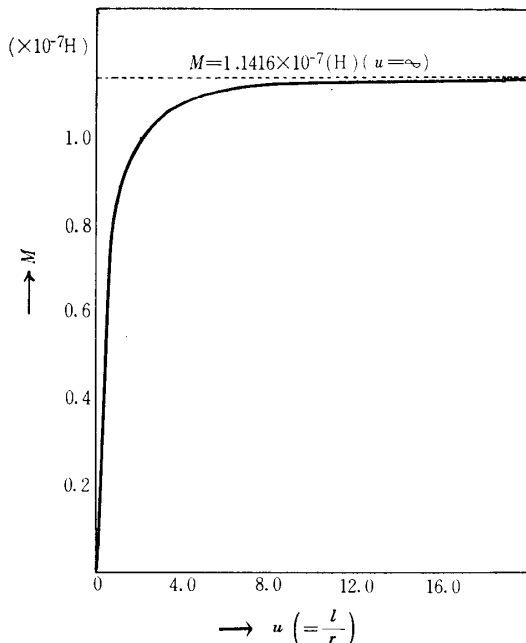
Table 1 Coefficient of IS

$\eta \backslash k$	0	1	2	3	4	5
1	2.000000	0.750000	0.468750	0.341797	0.269165	0.222061
2	0.416666	0.182291	0.123046	0.093994	0.076370	0.064437
3	0.196875	0.090234	0.062842	0.049095	0.040572	0.034689
4	0.119700	0.056109	0.039744	0.031464	0.026279	0.022666
5	0.082431	0.039155	0.028031	0.022386	0.018834	0.016346
6	0.061159	0.029306	0.021134	0.016982	0.014364	0.012524

数値例として $r=l=1.0m$ の場合の相互インダクタンスを計算してみよう。このとき $\beta=\pi/4, u=1$ となる。係数表、及び(12)式を使って $IS=0.97178$ また第1種完全楕円積分 $K(1/\sqrt{2})$ の値は数表²⁾ から $K(1/\sqrt{2})=1.85407$ であるから、これらを(10)式に代入すれば、 $M(u=1)=0.8863 \times 10^{-7}$ (H) となる。

また $r=1.0m$ として M と u の関係をグラフで表わすと Fig. 2 のようになる。相互インダクタンス M は

Fig. 2 Relationship between M and u



u の増加につれてある値に漸近している。 $u \rightarrow \infty$ として M の極限值を求めてみるとつぎのようになる。

$$M(u \rightarrow \infty) = \frac{\mu_0}{4\pi} (\pi - 2) = 1.1416 \times 10^{-7} \text{ (H)}$$

$u=20$ の場合の相互インダクタンスは

$$M(u=20) = 1.139 \times 10^{-7} \text{ (H)}$$

であるから

$$\frac{M(u=20)}{M(u \rightarrow \infty)} \times 100 = 99.8 \text{ (\%)}$$

となって $u > 20$ のときは $M(u \geq 20) \approx M(u \rightarrow \infty)$ と考えてよいことがわかる。

5. 結 言

直線状母線と半円母線の相互インダクタンスを扱う際には、それが超幾何関係を含むことが多い。そのような場合には本論文で示した係数表をあらかじめ作成しておけば、計算の手数がかなり省ける。

終りに日頃ご援助いただく戸田圭一講師、ご助言いただいた足立宜良講師、数値計算でご助力いただいた本学大学院、長島弘修氏および山口大学電子計算機室古谷宜子氏に厚く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 小出, 小谷, 武平: 山口大学工学部研究報告, 20, 2, 247 (1969)
- 2) 万能数表編集委員会: 万能数表, 森北出版 (1967) p.226

(昭和44年12月15日受理)