

半円状母線と直線状母線間の相互インダクタンス (V)

武平 信夫*・小出 幸男**・小谷 雅士***

Mutual Inductance between the Semicircular Bus and the Straight Bus (V)

Nobuo TAKEHIRA, Yukio KOIDE and Masashi KOTANI

Abstract

The authors calculate mutual inductance between the straight bus and the semicircular bus. The results are shown by graph.

1. 緒 言

直線状母線間の相互インダクタンスの研究は、過去において種々の計算式¹⁾²⁾が導き出されているが、半円状母線と直線状母線間の相互インダクタンスの詳細な研究は、未だ、みかけていない。

筆者らは2節に述べる導体配置における直線状母線と半円状母線間の相互インダクタンスを、Neumannの公式を用いて解析した。

半円状母線を含む面とは互いに垂直である。又直線状母線の一端と半円状母線の一端を結ぶ直線は、直線状母線と直交する。ただし半円状母線の他端は直線状母線側にある。

3. 相互インダクタンスの計算

Fig. 1で、線素ベクトル $d\mathbf{l}_1$ と $d\mathbf{l}_2$ の距離 R は、つぎのようになる。

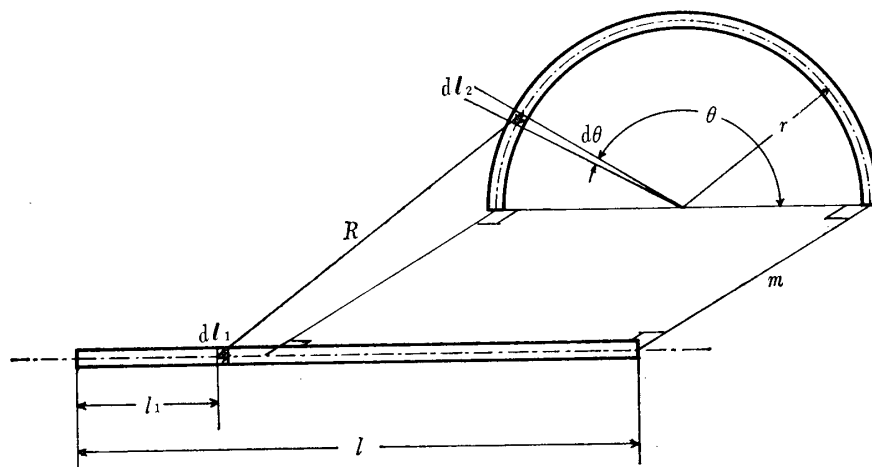


Fig. 1 Arrangement of two conductors

2. 導体配置 (Fig. 1 参照)

Fig. 1において、直線状母線と半円状母線の両端を結ぶ直線とは互いに平行であり、両直線を含む平面と

$$R = \sqrt{(l - l_1 - r + r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta + m^2} \quad (1)$$

$d\mathbf{l}_1$ と $d\mathbf{l}_2$ のスカラー積は、

$$d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = r \sin \theta \, d\theta \, dl_1 \quad (2)$$

Neumann の公式より、相互インダクタンス M はつぎの二重積分によって示される。

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R}$$

* 電気工学教室

** 日本ビクター株式会社

*** 九州電力株式会社

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0 r}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{l_1=0}^{l_1=l} \frac{\sin \theta \, d\theta \, dl_1}{\sqrt{(l-l_1-r+r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta + m^2}} \\
&= \frac{\mu_0 r}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta \left[\ln \left| \sqrt{(l-l_1-r+r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta + m^2} + l-l_1-r+r \cos \theta \right| \right]_0^l d\theta \\
&= -\frac{\mu_0 r}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta \ln \left| \sqrt{(l-r+r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta + m^2} + l-r+r \cos \theta \right| d\theta \\
&+ \frac{\mu_0 r}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta \ln \left| \sqrt{(r-r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta + m^2} - r+r \cos \theta \right| d\theta = -\frac{\mu_0 r}{4\pi} (M_1 - M_2) \quad (3)
\end{aligned}$$

ただし

$$M_1 = \int_0^\pi \sin \theta \ln \left| \sqrt{(l-r+r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta + m^2} + l-r+r \cos \theta \right| d\theta \quad (4)$$

$$M_2 = \int_0^\pi \sin \theta \ln \left| \sqrt{(r-r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta + m^2} - r+r \cos \theta \right| d\theta \quad (5)$$

3.1 M_1 の計算

(4)式において、つぎの変数変換を行なう。

$$\left. \begin{aligned} \pi & \left| 1 - \cos \theta = t \right|_0^2, \quad \sin \theta \, d\theta = dt \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

したがって、(4)式はつぎのようになる。

$$M_1 = \int_0^2 \ln \left| l-rt + \sqrt{l^2 + m^2 + 2r(r-l)t} \right| dt \quad (7)$$

3.1.1 $r \neq l$ の場合

(7)式をさらにつぎのように変換する。

$$\left. \begin{aligned} 2 & \left| \sqrt{l^2 + m^2 + 2r(r-l)t} = T \right| \left\{ \begin{aligned} \sqrt{l^2 + m^2 + 4r(r-l)} &= \alpha_2, \quad dt = \frac{TdT}{r(r-l)} \\ \sqrt{l^2 + m^2} &= \alpha_1 \end{aligned} \right. \quad (8)$$

ただし

$$\alpha_1 = \sqrt{l^2 + m^2}, \quad \alpha_2 = \sqrt{l^2 + m^2 + 4r(r-l)} \quad (9)$$

(8), (9)式を用いると、

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{-1}{r(l-r)} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} T \ln \left| \frac{-T^2 + 2(r-l)T + m^2 - l^2 + 2rl}{2(r-l)} \right| dT \\
&= \frac{1}{r(l-r)} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} T \ln \left| \frac{(T-\beta_1)(T-\beta_2)}{2(r-l)} \right| dT \quad (10)
\end{aligned}$$

ただし

$$\beta_1 = r-l-\sqrt{r^2+m^2}, \quad \beta_2 = r-l+\sqrt{r^2+m^2} \quad (11)$$

(10)式の被積分関数は、区間 $[\alpha_1, \alpha_2]$ において、不連続点をもたない。

したがって、 M_1 はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{1}{r(l-r)} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} T \ln |T-\beta_1| dT + \frac{1}{r(l-r)} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} T \ln |T-\beta_2| dT - \frac{1}{r(l-r)} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} T \ln 2 |r-l| dT \\
&= \frac{1}{r(l-r)} \left[\frac{1}{2} (T^2 - \beta_1^2) \ln |T-\beta_1| - \frac{T^2}{4} - \frac{\beta_1 T}{2} \right]_{\alpha_2}^{\alpha_1} + \frac{1}{r(l-r)} \left[\frac{1}{2} (T^2 - \beta_2^2) \ln |T-\beta_2| \right. \\
&\quad \left. - \frac{T^2}{4} - \frac{\beta_2 T}{2} \right]_{\alpha_2}^{\alpha_1} - \frac{1}{r(l-r)} \left[\frac{1}{2} T^2 \ln 2 |r-l| \right]_{\alpha_2}^{\alpha_1} \quad (12)
\end{aligned}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ の各々の値を代入して整理すると、次式を得る。

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{1}{r} (\sqrt{r^2+m^2}-r) \ln \left| (\sqrt{l^2+m^2} + \sqrt{r^2+m^2} + l-r) \times (\sqrt{(l-2r)^2+m^2} - \sqrt{r^2+m^2} + l-r) \right| \\
&+ \frac{1}{r} (\sqrt{r^2+m^2}+r) \ln \left| (\sqrt{l^2+m^2} - \sqrt{r^2+m^2} + l-r) \times (\sqrt{(l-2r)^2+m^2} + \sqrt{r^2+m^2} + l-r) \right| \\
&- 2 \ln 2 |r-l| + \frac{1}{r} (\sqrt{r^2+m^2} - \sqrt{(l-2r)^2+m^2}) - 2 \quad (13)
\end{aligned}$$

3.1.2 $r=l$ の場合

(8)式の変数変換を行わず(7)式にそのまま $r=l$ を代入して次式を得る.

$$M_1 = \int_0^2 \ln |r + \sqrt{r^2 + m^2} - rt| dt = \frac{1}{r} (\sqrt{r^2 + m^2} + r) \ln(\sqrt{r^2 + m^2} + r) - \frac{1}{r} (\sqrt{r^2 + m^2} - r) \ln(\sqrt{r^2 + m^2} - r) - 2 \quad (14)$$

3.2 M_2 の計算

M_2 の計算は(4), (5)式を比較すればわかるように, (13)式において, l の値を0とすることにより求まる. したがって M_2 は次式を得る.

$$M_2 = \frac{1}{r} (\sqrt{r^2 + m^2} + r) \ln | (m - r + \sqrt{r^2 + m^2}) \times (\sqrt{4r^2 + m^2} + \sqrt{r^2 + m^2} - r) | - \frac{1}{r} (\sqrt{r^2 + m^2} - r) \ln | (m - r + \sqrt{r^2 + m^2}) \times (\sqrt{4r^2 + m^2} - \sqrt{r^2 + m^2} - r) | - 2 \ln 2 |r - l| + \frac{1}{r} \{ \sqrt{r^2 + m^2} - \sqrt{(l - 2r)^2 + m^2} \} - 2 \quad (15)$$

3.3 相互インダクタンス M を与える式3.3.1 $r \neq l$ の場合

(13)式及び(15)式より, つぎの式を得る.

$$M = -\frac{\mu_0 r}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r} (\sqrt{r^2 + m^2} + r) \ln \left| \frac{\sqrt{l^2 + m^2} - \sqrt{r^2 + m^2} + l - r}{m - r - \sqrt{r^2 + m^2}} \times \frac{\sqrt{(l - 2r)^2 + m^2} + \sqrt{r^2 + m^2} + l - r}{\sqrt{4r^2 + m^2} + \sqrt{r^2 + m^2} - r} \right| - \frac{1}{r} (\sqrt{r^2 + m^2} + r) \ln \left| \frac{\sqrt{l^2 + m^2} + \sqrt{r^2 + m^2} + l - r}{m - r + \sqrt{r^2 + m^2}} \times \frac{\sqrt{(l - 2r)^2 + m^2} + \sqrt{r^2 + m^2} + l - r}{\sqrt{4r^2 + m^2} + \sqrt{r^2 + m^2} - r} \right| + 2 \ln \left| \frac{r}{r - l} \right| + \frac{1}{r} \left(\sqrt{l^2 + m^2} - \sqrt{(l - 2r)^2 + m^2} + \sqrt{4r^2 + m^2} - m \right) \right\} \quad (16)$$

3.3.2 $r=l$ の場合

(14)式及び(15)式より, つぎの式を得る.

$$M = -\frac{\mu_0 r}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r} (\sqrt{r^2 + m^2} + r) \ln \left| \frac{1}{m - r - \sqrt{r^2 + m^2}} \times \frac{\sqrt{r^2 + m^2} + r}{\sqrt{4r^2 + m^2} + \sqrt{r^2 + m^2} - r} \right| + \frac{1}{r} (\sqrt{r^2 + m^2} + r) \ln \left| (m - r - \sqrt{r^2 + m^2}) \times \frac{\sqrt{4r^2 + m^2} - \sqrt{r^2 + m^2} - r}{\sqrt{r^2 + m^2} - r} \right| + 2 \ln 2r + \frac{1}{r} (\sqrt{4r^2 + m^2} - m) \right\} \quad (17)$$

4. 特殊な導体配置に対する相互インダクタンス

(16)式において, $m=0$ を代入すると次式を得る.

$$M = -\frac{\mu_0 r}{4\pi} \left\{ 2 \ln \left| \frac{|l - 2r| + l}{2r} \right| + \frac{l}{r} + 2 - \frac{|l - 2r|}{r} \right\} \quad (18)$$

(18)式から, つぎの各々の導体配置に対する相互インダクタンスが得られる.

4.1 $l > 2r$ の場合 (Fig. 2 参照)

$$M = -\frac{\mu_0 r}{2\pi} \left\{ \ln \left| \frac{l - r}{r} \right| + 2 \right\} \quad (19)$$

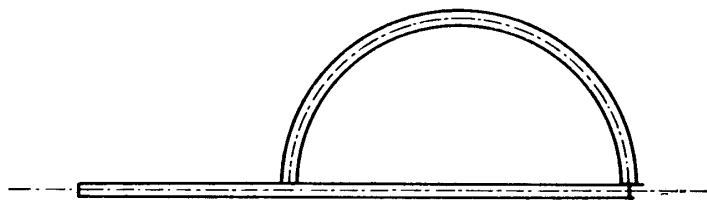


Fig. 2 Arrangement of two conductors, $m=0$, $l > 2r$

4.2 $0 < l \leq 2r$ の場合 (Fig. 3 参照)

$$M = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \tag{20}$$

ただし, (20) 式は, (17) 式において, $m = 0$ を代入しても同一の結果を得る. したがって, $r = l$ の場合についても成り立つことがわかる.

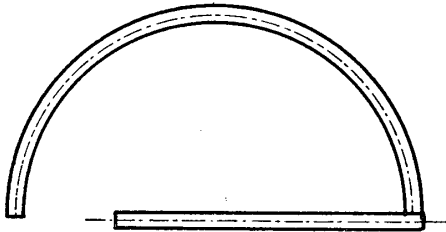


Fig. 3 Arrangement of two conductors, $m = 0, 0 < l \leq 2r$

4.3 $l < 0$ の場合 (Fig. 4 参照)

この場合は, 両母線が Fig. 4 の如く配置されたものに相当する. 相互インダクタンス M は, つぎのようになる.

$$M = -\frac{\mu_0 r}{2\pi} \ln \left| \frac{r-l}{r} \right| \tag{21}$$

本公式は先に筆者らが得た結果と一致する³⁾.

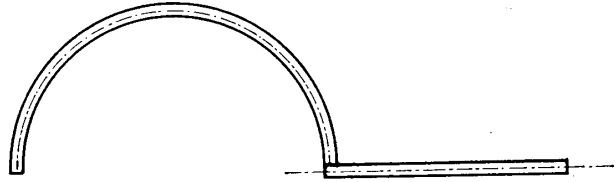


Fig. 4 Arrangement of two conductors, $m = 0, l < 0$

5. 計算例

Fig. 1 のような場合の相互インダクタンスは, r, l, m の各々の値を, (16) 式, あるいは (17) 式に代入することによって得られるが, ここではもっと簡単に M を知る方法を述べる.

今, (16) 式において, $m/r = u, l/r = v$ と変換すれば, 次式を得る.

$$M = -\frac{\mu_0 r}{4\pi} \left\{ (\sqrt{u^2+1}+1) \ln \left| \frac{\sqrt{u^2+v^2}-\sqrt{u^2+1}+v-1}{\sqrt{u^2+4}+\sqrt{u^2+1}-1} \times \frac{\sqrt{(v-2)^2+u^2}+\sqrt{u^2+1}+v-1}{u-1-\sqrt{u^2+1}} \right| \right. \\ \left. - (\sqrt{u^2+1}-1) \ln \left| \frac{\sqrt{u^2+v^2}+\sqrt{u^2+1}+v-1}{\sqrt{u^2+4}-\sqrt{u^2+1}-1} \times \frac{\sqrt{(v-2)^2+u^2}-\sqrt{u^2+1}+v-1}{u-1+\sqrt{u^2+1}} \right| \right. \\ \left. + \sqrt{u^2+v^2}+\sqrt{u^2+4}-\sqrt{(v-2)^2+u^2}-u-2 \ln |1-v| \right\} = -\frac{\mu_0 r}{4\pi} M^* \tag{22}$$

ただし,

$$M^* = (\sqrt{u^2+1}+1) \ln \left| \frac{\sqrt{u^2+v^2}-\sqrt{u^2+1}+v-1}{\sqrt{u^2+4}+\sqrt{u^2+1}-1} \times \frac{\sqrt{(v-2)^2+u^2}+\sqrt{u^2+1}+v-1}{u-1-\sqrt{u^2+1}} \right| \\ - (\sqrt{u^2+1}-1) \ln \left| \frac{\sqrt{u^2+v^2}+\sqrt{u^2+1}+v-1}{\sqrt{u^2+4}-\sqrt{u^2+1}-1} \times \frac{\sqrt{(v-2)^2+u^2}-\sqrt{u^2+1}+v-1}{u-1+\sqrt{u^2+1}} \right| \\ + \sqrt{u^2+v^2}+\sqrt{u^2+4}-\sqrt{(v-2)^2+u^2}-u-2 \ln |1-v| \tag{23}$$

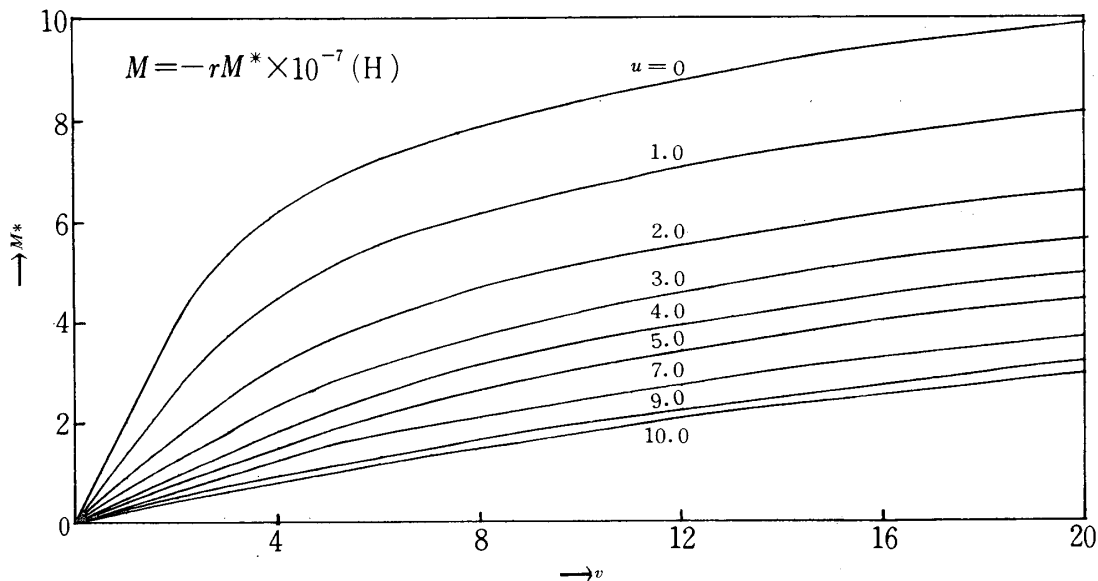


Fig. 5 Relationship between M^* and v

とする。

Fig. 5は u をパラメーターとし、 v を横軸に、 M^* を縦軸にとった場合、を示している。この図より相互インダクタンス M を知るには、まず、 r 、 l 、 m を知ることにより、 u 、 v を決定する。つぎに、Fig. 5より、その場の M^* を読みとる。 M^* の値を次式に代入して、 M が求まる。

$$M = -rM^* \times 10^{-7} \text{ (H)} \quad (24)$$

6. 結 言

以上、直線状母線と半円状母線の相互インダクタンスについて述べたわけであるが、特殊な導体配置では相互インダクタンス M を与える式は、非常に簡単となる。さらに、Fig. 3のように、 $0 < l \leq 2r$ なる条件を満足する限りにおいては、(16)式からもわかるよう

に、いかなる半円状母線に対しても相互インダクタンスは、直線状母線の長さのみに比例するという興味深い結果を得た。

なおFig. 1以外の導体配置における相互インダクタンスは、目下計算中であるから、別の機会に発表する。

最後に、図表作成にあたっての計算には、山口大学計算機室古谷嬢のご助力を得たことを附記して、感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) F. F. Martens : *Ann. der. Phys.*, **29**, 959 (1909)
- 2) G. A. Campbell : *Phys. Rev.*, **5**, 452 (1915)
- 3) 武平, 小出, 小谷 : 山口大学工学部研究報告, **20**, 240 (1969)

(昭和44年12月15日受理)