

曲面同軸線路のインピーダンス, 1

(伝送線方程式の誘導)

平田威彦*・小林慎二**・蓮尾顕穂***

Impedance of Curved Surface Coaxial Line, 1 (Derivation of Telegraphist's Equations)

Takehiko HIRATA, Shinji KOBAYASHI and Akio HASUO

Abstract

Describers consider the curved surface coaxial cable that inner conductor and outer conductor are shaped like the trumpet together.

For the first step to find the impedance of this cable, describers derive telegraphist's equations with reference to a Schelkunoff's paper.

The co-ordinate system is taken the orthogonal curvilinear coordinates formed of three directions that are transmission of electromagnetic wave, rotation around axis and rectangular to curved surface.

1. ま え が き

筆者らの一人は先に同軸給電無指向性開口面アンテナについて大ざっぱな垂直面内指向性を求めた¹⁾が、筆者等はさらに同軸給電線及び空間との間のインピーダンス整合を考察する目的のためにその曲面同軸の部分のインピーダンスを求めようとするのであるが、最初の段階としてシュルクノフ氏の方法²⁾を参考にして伝送線方程式を求めた。

2. 座標系の選定

まず Fig. 1 に本アンテナの構造を示す。図の下方同軸ケーブルより給電し、図の上方開口面より側面へ向けて周囲方向に一樣に電波を放射しようとするものである。

このアンテナの入力端における中心導体および外部導体の直径をそれぞれ $2a$ 及び $2b$ とし、開口面における両者の直径は共に $2R$ であるとする。また、入力端と開口面との間の曲面の縦の断面は今の場合図の如く内外導体共 $\frac{1}{4}$ 円であるとする。

いま源のない場所におけるマックスウェル方程式を

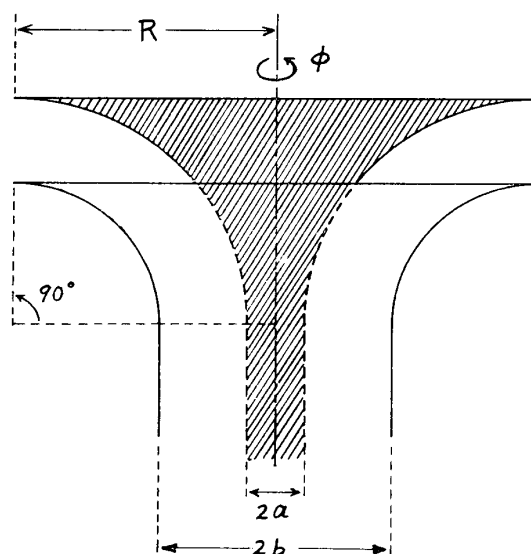


Fig. 1. Curved surface coaxial cable.

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \text{rot } \mathbf{H} &= (g + j\omega\epsilon)\mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

とすれば一般の直交曲線座標系 (u, v, w) においては (1) 式は

$$\frac{\partial(e_1 E_u)}{\partial w} = -j\omega\mu \left(\frac{e_3 e_1}{e_2} \right) (e_2 H_v) + \frac{\partial(e_3 E_w)}{\partial u} \quad (2)$$

$$\frac{\partial(e_2 H_v)}{\partial w} = -(g + j\omega\epsilon) \left(\frac{e_2 e_3}{e_1} \right) (e_1 E_u) + \frac{\partial(e_3 H_w)}{\partial v} \quad (3)$$

* 電気工学教室

** 神戸工業株式会社 (昭和38年度卒業研究学生)

*** 安川電機株式会社 (同上)

$$\frac{\partial(e_2 E_v)}{\partial w} = j\omega\mu \left(\frac{e_2 e_3}{e_1} \right) (e_1 H_u) + \frac{\partial(e_3 E_w)}{\partial v} \quad (4)$$

$$\frac{\partial(e_1 H_u)}{\partial w} = (g + j\omega\varepsilon) \left(\frac{e_3 e_1}{e_2} \right) (e_2 E_v) + \frac{\partial(e_3 H_w)}{\partial u} \quad (5)$$

$$E_w = \frac{1}{(g + j\omega\varepsilon) e_1 e_2} \left\{ \frac{\partial(e_2 H_v)}{\partial u} - \frac{\partial(e_1 H_u)}{\partial v} \right\} \quad (6)$$

$$H_w = \frac{1}{j\omega\mu e_1 e_2} \left\{ \frac{\partial(e_1 E_u)}{\partial v} - \frac{\partial(e_2 E_v)}{\partial u} \right\} \quad (7)$$

$$z = (R - u) \sin \frac{w}{R}$$

従って(8)式により,

$$e_1 = 1$$

$$e_2 = R - (R - u) \cos \frac{w}{R}$$

$$e_3 = \frac{R - u}{R}$$

(10)

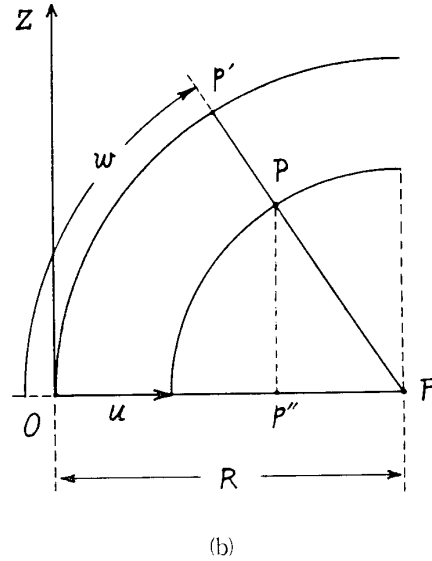
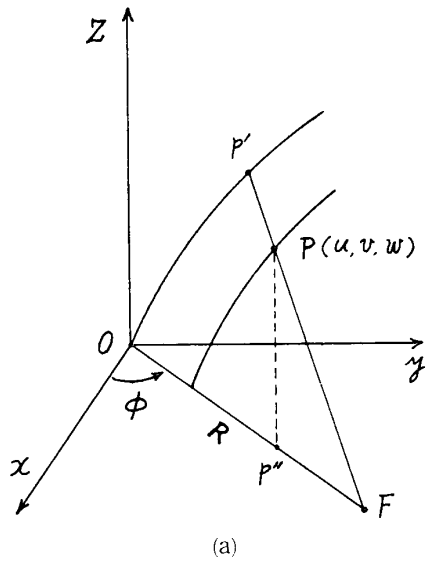


Fig. 2. Co-ordinates.

但し、この系の任意の点の直角座標 (x, y, z) とすれば、

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} \\ e_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} \\ e_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで我々は座標系として Fig. 2 に示すようなものを選んだ。即ち、(a) 図のように xz 面から角度 ϕ 方向、 xy 面内原点から R の距離に点 F をとり、 F を中心として半径 R の円をえがく。次に(b) 図のように u 座標は半径 R の円周から中心 F 方向への距離にとり、 v 座標は回転角 ϕ 、 w 座標は半径 R の円周 ($u=0$) と直線 \overline{FP} の交点 p' として弧 $\widehat{Op'}$ の長さにとる。このようにすればこの座標と直角座標との関係は、

$$\left. \begin{aligned} x &= \left\{ R - (R - u) \cos \frac{w}{R} \right\} \cos \phi \\ y &= \left\{ R - (R - u) \cos \frac{w}{R} \right\} \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

3. 伝送線方程式

いま電磁界は ϕ 方向に一様であるとすれば (2)~(7) 式において $E_v = 0$ であり、また v に関する微係数も 0 となるから

$$\frac{\partial(e_1 E_u)}{\partial w} = -j\omega\mu \left(\frac{e_3 e_1}{e_2} \right) (e_2 H_v) + \frac{\partial(e_3 E_w)}{\partial u} \quad (11)$$

$$\frac{\partial(e_2 H_v)}{\partial w} = -(g + j\omega\varepsilon) \left(\frac{e_2 e_3}{e_1} \right) (e_1 E_u) \quad (12)$$

$$E_w = \frac{1}{(g + j\omega\varepsilon) e_1 e_2} \cdot \frac{\partial(e_2 H_v)}{\partial u} \quad (13)$$

$$H_u = 0, \quad \frac{\partial(e_3 H_w)}{\partial u} = 0 \quad (14)$$

更にこのアンテナの内外導体間の距離は波長に比べて充分小さいとすれば、この内部では TEM 波が伝送されるものと考えることができ、従って進行方向に電磁界の成分は存在せず $E_w = H_w = 0$ となり、上式は、

$$\frac{\partial(e_1 E_u)}{\partial w} = -j\omega\mu \left(\frac{e_3 e_1}{e_2} \right) (e_2 H_v) \quad (15)$$

$$\frac{\partial(e_2 H_v)}{\partial w} = -(g + j\omega\varepsilon) \left(\frac{e_2 e_3}{e_1} \right) (e_1 E_u) \quad (16)$$

$$\frac{\partial(e_2 H_r)}{\partial u} = 0 \quad (17)$$

(17)式より

$$e_2 H_r \equiv \frac{I(w)}{2\pi} \quad (18)$$

とおけば

$$\int_0^{2\pi} e_2 H_r dv = I(w) \quad (19)$$

また(16)式より

$$\begin{aligned} e_1 E_u &= -\frac{e_1}{(g + j\omega\varepsilon)e_2 e_3} \cdot \frac{\partial(e_2 H_r)}{\partial w} \\ &= -\frac{e_1}{2\pi(g + j\omega\varepsilon)e_2 e_3} \cdot \frac{\partial I(w)}{\partial w} \end{aligned} \quad (20)$$

電界 E_u を内部導体 ($u = a$) から外部導体 ($u = b$) まで積分し

$$\int_a^b (e_1 E_u) du \equiv V(w) \quad (21)$$

とおきこれに(20)式更に(10)式を代入すれば

$$\begin{aligned} V(w) &= -\frac{1}{2\pi(g + j\omega\varepsilon)} * \\ &* \frac{dI(w)}{dw} \int_a^b \frac{1}{\left(R - R \cos \frac{w}{R} + u \cos \frac{w}{R}\right)} \cdot \frac{du}{(R-u)/R} \end{aligned}$$

これより

$$\frac{dI(w)}{dw} = -\frac{2\pi(g + j\omega\varepsilon)}{\log \frac{(R-a)\{R - (R-b)\cos(w/R)\}}{(R-b)\{R - (R-a)\cos(w/R)\}}} \cdot V(w) \quad (22)$$

次に(15)式を u について a から b まで積分し, (21) 及び(18)式を用いれば

$$\int_a^b \frac{\partial(e_1 E_u)}{\partial w} du = \frac{dV(w)}{dw} = -\frac{j\omega\mu}{2\pi} \cdot I(w) \int_a^b \frac{e_3 e_1}{e_2} du$$

上式右端に(10)式を代入しその積分を実行すれば

$$\begin{aligned} \frac{dV(w)}{dw} &= -\frac{j\omega\mu}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\cos^2(w/R)} \cdot \log \frac{R - (R-b)\cos(w/R)}{R - (R-a)\cos(w/R)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{b-a}{R \cos(w/R)} \right\} \cdot I(w) \end{aligned} \quad (23)$$

(22) 及び(23)式が以上の場合の伝送線方程式である。

試みにこの両式より線路の分布定数を求めてみれば,

(23)式より分布直列インダクタンスは

$$\begin{aligned} L(w) &= \frac{\mu}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\cos^2(w/R)} \cdot \log \frac{R - (R-b)\cos(w/R)}{R - (R-a)\cos(w/R)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{b-a}{R \cos(w/R)} \right\} (H/m) \end{aligned}$$

また, 媒質の導電率 g を無視できるものとすれば (22)式より分布並列容量は,

$$C(w) = 2\pi\varepsilon / \log \frac{(R-a)\{R - (R-b)\cos(w/R)\}}{(R-b)\{R - (R-a)\cos(w/R)\}} (F/m)$$

Fig. 3 及び Fig. 4 に $L(w)$ 及び $C(w)$ の計算値を示す. Fig. 3 は R/a 一定, Fig. 4 は b/a 一定の場合である。

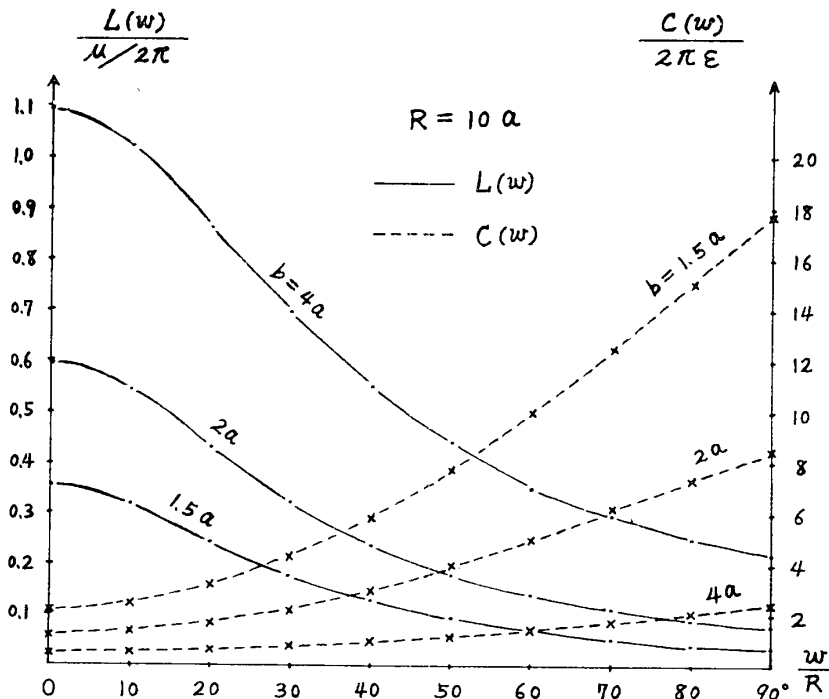


Fig. 3. Distributed inductance and capacity ($R = 10a$).

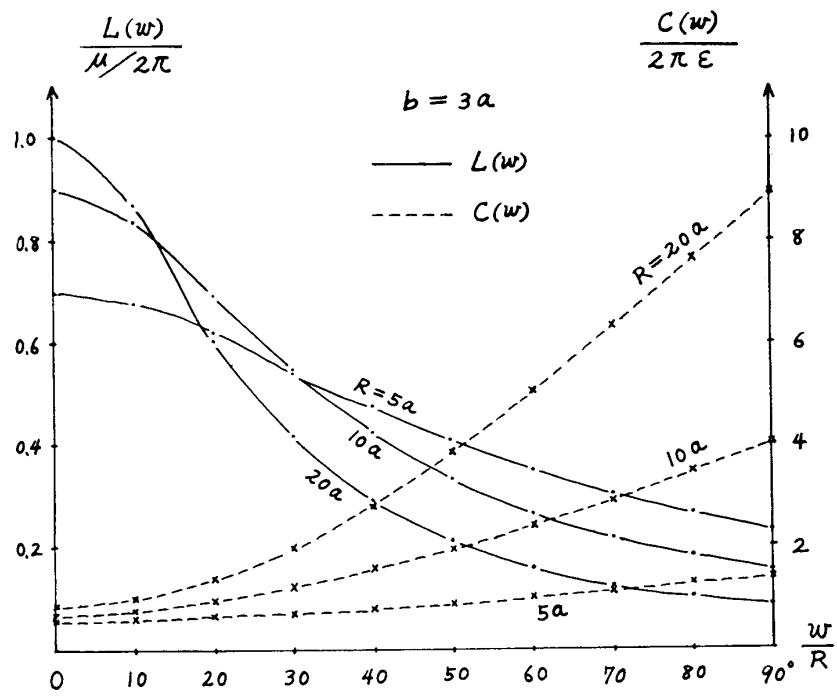


Fig. 4. Distributed inductance and capacity ($b = 3a$).

参 考 献 文

- 1) 平田・岡藤・大丸・顔維雄：昭和38年度電気四学会連合大会，講演論文集 1214，(1963)
- 2) Schelkunoff：B. S. T. J., **34**, 995 (1955)