

# ブロック対角化による分散型推定器

川 添 容 宏\*

Decentralized Estimator by the Method of Block-Diagonalization of Systems

Yasuhiro KAWAZOE

## Abstract

The implementation of centralized filtering theory incurs computational difficulties especially in applications to large scale systems. These difficulties can be overcome by the aid of hierarchical system theory. Based on this concept, a simple decentralized estimation algorithm is developed which improves the algorithm proposed by Sage, et al. The diagonalized decomposition of a system has made an important role for reducing the complexity of an estimation algorithm. The proposed hierarchical estimation scheme is divided into two levels whose are the coordination part of Lagrange multipliers and the decentralized estimation part. The procedure may be computationally attractive for nonlinear systems as well as linear systems. A numerical example is used to illustrate the approach for simultaneous estimation of states and parameters, which compose the nonlinear system. It is seen that the new method leads to a saving in computation time without losing estimation accuracy.

## 1. 序 論

工学の分野のみならず，社会，経済，その他の諸分野で広く活用されているカルマン・フィルタ<sup>1)</sup>も，次元の増大にともなって，計算機の記憶容量，計算時間の制約のために，そのままの形では，もはや使用不可能になってくる。このような大規模系の推定法には，高次元系を低次元化して考える集約法<sup>2)</sup>や，特殊な正準形構造になおしてアルゴリズムを簡略化する方法<sup>3)</sup>のほかに，階層的システム理論を用いた階層的推定法がある。この方法は，最初に Pearson<sup>4)</sup>によって提案されたが，その欠点として，オンライン計算が不可能なことや計算量の増大などがあつた。Sageら<sup>5)</sup>は後驗確率密度を評価 (MAP 評価) にとって，結果として得られる二点境界値問題 (TPVBP) をインバリアント・インベディングによって解くことによって，シーケンシャル協調法によるオンライン階層的推定アルゴリズムを導出している。この方法は干渉変数がかなり自由に選択できる反面，一般にアルゴリズムが複雑になるといふ欠点を有している。

本研究報告では，システムをブロック対角化分割することによって，アルゴリズムをさらに簡単化している。すなわち，レベル1では局所的にサブシステムの推定アルゴリズムを計算し，その結果はレベル2に転送され，そこで集中型の協調アルゴリズムが働く。

レベル2はさらに各サブシステムに対して協調部で得られた結果と，前時点まで得られている他のサブシステムの結果を送ってやって1サイクルが終了することになる。本アルゴリズムの実際問題への適用については，サブシステムレベルでの計算として近年発達の著しいマイクロ・コンピュータの適用も十分考えられ，さらに，協調部においても，アルゴリズムそのものが簡略化されているため，マイクロ・コンピュータ程度で十分役立つと考えられる。

## 2. 問題の記述

本研究報告で考える系は次式で表わされるような一般的な非線形離散時間型系である。

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k)] + \mathbf{w}(k) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(k)] + \mathbf{v}(k) \quad (2)$$

ここで，

\* 工業短期大学部情報処理工学科

- $\mathbf{x}$ :  $n \times 1$  状態ベクトル,  $\mathbf{x}(k_0) \sim N(\mu_{x_0}, V_{x_0})$
- $\mathbf{y}$ :  $m \times 1$  観測ベクトル
- $\mathbf{f}$ :  $n \times 1$  非線形関数ベクトル ( $\mathbf{x}$  について微分可能)
- $\mathbf{h}$ :  $m \times 1$  非線形関数ベクトル ( $\mathbf{x}$  について微分可能)
- $\mathbf{w}$ : 白色ガウス雑音  $N(0, V_w)$ ,  $V_w$ : 対角行列
- $\mathbf{v}$ : 白色ガウス雑音  $N(0, V_v)$ ,  $V_v$ : 対角行列

であり,  $\mathbf{x}(k_0)$ ,  $\mathbf{w}(h)$ ,  $\mathbf{v}(h)$  はそれぞれ互に独立であるとする. ここでの原問題は, 観測信号を (2) 式によって入手しつつ, オンラインで系状態の  $\mathbf{x}(k)$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  の推定値を得ることである. この問題は典型的な非線形状態推定問題で, 集中型推定アルゴリズムとしては多くのアルゴリズムが非線形フィルタの名称で提案されている<sup>6)</sup>.

本稿の目的は, 大規模系の状態推定を前提に, 分散型の推定アルゴリズムを考察することにある.

### 3. ブロック対角化によるシステム分割と最適条件

(1), (2) 両式はブロック対角行列によって, 次のように表わすことができる.

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi[\mathbf{x}(k)]\mathbf{x}(k) + \mathbf{d}[\mathbf{x}(k)] + \mathbf{w}(k) \quad (3)$$

$$\mathbf{y}(k) = \Psi[\mathbf{x}(k)]\mathbf{x}(k) + \mathbf{g}[\mathbf{x}(k)] + \mathbf{v}(k) \quad (4)$$

ここで,

$\Phi$ :  $\mathbf{x}$  について微分可能な  $n \times n$  ブロック対角行列

$\Psi$ :  $\mathbf{x}$  について微分可能な  $m \times n$  ブロック対角行列

$\mathbf{d}$ :  $\mathbf{x}$  についての  $n \times 1$  関数ベクトル

$\mathbf{g}$ :  $\mathbf{x}$  についての  $m \times 1$  関数ベクトル

(3), (4) 両式は,  $\Phi$  と  $\Psi$  のブロック対角性と  $V_w$ ,  $V_v$  の対角性より, 次のようなサブシステムに分割することができる.

$$\mathbf{x}^i(k+1) = \Phi^i[\pi(k)]\mathbf{x}^i(k) + \mathbf{d}^i[\pi(k)] + \mathbf{w}^i(k) \quad (5)$$

$$\mathbf{y}^i(k) = \Psi^i[\pi(k)]\mathbf{x}^i(k) + \mathbf{g}^i[\pi(k)] + \mathbf{v}^i(k) \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

ここで,  $N$  は分割できるサブシステムの数を表わし,  $\pi(k)$  は  $\mathbf{x}(k)$  をおきかえたものである.

$$\pi(k) = \mathbf{x}(k) \quad (7)$$

次に推定アルゴリズムを導出するために推定評価基準を考える. ここでは, 雑音などの先験的情報がわ

かっているとして, 後驗確率密度を最大 (Maximum A Posteriori Probability Density Function) にする, いわゆる MAP 評価をとることにする.

$$\text{Max. } p[\mathbf{x}(k_0), \mathbf{x}(k_1), \dots, \mathbf{x}(k_f) | \mathbf{y}(k_1), \dots, \mathbf{y}(k_f)] \quad (8)$$

(8) の最大問題は等価的に次の最小問題となる<sup>7)</sup>.

$$\begin{aligned} \text{Min. } J = & \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(k_0) - \mu_{x_0}\|_{V_{x_0}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \{\|\mathbf{y}(k+1) \\ & - \mathbf{h}[\mathbf{x}(k)]\|_{V_v^{-1}(k+1)}^2 + \|\mathbf{w}(k)\|_{V_w^{-1}(k)}^2\} \end{aligned} \quad (9)$$

subject to Eq. (1)

(3), (7) 式を考慮すれば, (9) はさらに次のように書きなおすことができる.

$$\begin{aligned} \text{Min. } J = & \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(k_0) - \mu_{x_0}\|_{V_{x_0}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \{\|\mathbf{y}(k+1) \\ & - \Psi[\pi(k+1)]\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{g}[\pi(k+1)]\|_{V_v^{-1}(k+1)}^2 \\ & + \|\mathbf{w}(k)\|_{V_w^{-1}(k)}^2\} \end{aligned} \quad (10)$$

subject to Eq. (3) and Eq. (7)

(10) より, ハミルトニアンが次のように定義できる.

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \|\mathbf{y}(k+1) - \Psi[\pi(k+1)]\mathbf{x}(k+1) \\ & - \mathbf{g}[\pi(k+1)]\|_{V_v^{-1}(k+1)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{w}(k)\|_{V_w^{-1}(k)}^2 \\ & + \lambda^T(k+1) \{\Phi[\pi(k)]\mathbf{x}(k) + \mathbf{d}[\pi(k)] \\ & + \mathbf{w}(k)\} + \alpha^T(k) [\mathbf{x}(k) - \pi(k)] \end{aligned} \quad (11)$$

Discrete Minimum Princip から最適条件を求めれば次のようになる.

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{w}(k)} \right|_{\mathbf{w}(k) = \hat{\mathbf{w}}(k)} = 0 \quad (12-1)$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \lambda(k+1)} \right|_{\mathbf{x}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k)} = \hat{\mathbf{x}}(k+1) \quad (12-2)$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}(k)} \right|_{\mathbf{x}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k)} = \lambda(k) \quad (12-3)$$

ただし,

$$\lambda(k_0) = -V_{x_0}^{-1}[\mathbf{x}(k_0) - \mu_{x_0}] \quad (12-4)$$

$$\lambda(k_f) = 0 \quad (12-5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha(k)} = 0 \quad (12-6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \pi(k)} = 0 \quad (12-7)$$

いま,  $i$ -サブシステムのハミルトニアンとして次式を定義する.

$$H^i = \frac{1}{2} \|\mathbf{y}^i(k+1) - \Psi^i[\pi(k+1)]\mathbf{x}^i(k+1) - \mathbf{g}^i[\pi(k+1)]\|_{V_0^{i-1}(k+1)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{w}^i(k)\|_{V_w^{i-1}(k)}^2 + \lambda^{iT}(k+1) \{\Phi^i[\pi(k)]\mathbf{x}^i(k) + \mathbf{d}^i[\pi(k)] + \mathbf{w}^i(k)\} + \alpha^{iT}(k) \{\mathbf{x}^i(k) - \pi^i(k)\} \quad (13)$$

ここで, オーバーオールシステムの雑音分散行列の対角性より,

$$H = \sum_{i=1}^N H^i \quad (14)$$

が成立する.

(12-1) から (12-5) の関係を見れば, これらと同様の関係は各サブシステムについても全く同様に成立することがわかる. これらの最適条件から,  $\alpha^i(k)$ ,  $\mathbf{v}^i$  と  $\pi(k)$  を既知とするならば, 次のような二点境界値問題が得られる.

$$\hat{\mathbf{x}}^i(k+1) = \Phi^i[\pi(k)]\hat{\mathbf{x}}^i(k) + \mathbf{d}^i[\pi(k)] - V_w^i(k)\Phi^{iT}[\pi(k)][\lambda^i(k) - \alpha^i(k)] \quad (15)$$

$$\lambda^i(k+1) = \Phi^{iT}[\pi(k)][\lambda^i(k) - \alpha^i(k)] + \Psi^{iT}[\pi(k+1)]V_0^{i-1}(k+1)\nu^i(k+1) \quad (16)$$

ここで,

$$\nu^i(k+1) = \mathbf{y}^i(k+1) - \{\Psi^i[\pi(k+1)]\hat{\mathbf{x}}^i(k+1/k) + \mathbf{g}^i[\pi(k+1)]\} \quad (17)$$

境界条件は,

$$\lambda^i(k_0) = -V_{x_0}^{i-1}[\hat{\mathbf{x}}^i(k_0) - \mu_{x_0}^i] \quad (18)$$

$$\lambda^i(k_f) = 0 \quad (19)$$

(17) 式中で,  $\hat{\mathbf{x}}^i(k+1/k)$  は,

$$\hat{\mathbf{x}}^i(k+1/k) = \Phi^i[\pi(k)]\mathbf{x}^i(k) + \mathbf{d}^i[\pi(k)] \quad (20)$$

と表わせる.

#### 4. インバリアント・インペディングによる分散型オンライン推定器と集中型協調器

オンライン・推定アルゴリズムを得るために (15) ~ (19) の二点境界値問題がインバリアント・インペディング法により解かれる. (付録参照)

結果のみを Table 1 に示す. この推定アルゴリズムは, レベル 2 から  $\pi$  と  $\alpha$  が与えられて, レベル 1 で計算される.

さて, 前章で導出された最適条件のうち, (12-7) は, 局所的にサブシステム毎に処理することは不可能である. (12-6) 式から得られる

$$\pi(k) = \hat{\mathbf{x}}(k) \quad (21)$$

の関係は, 計算式ではなく, 単に数値の代入にすぎないので, レベル 2 で  $\pi(k)$  が各サブシステムの推定値を用いて求められる. 一方, (12-7) 式から  $\alpha$  を求めることは非常に複雑となってくるため, 次のようなグラディエント法を用いて  $\alpha$  を更新する.

$$\alpha(k) = \alpha(k-1) + \varepsilon \frac{\partial H}{\partial \alpha(k-1)} = \alpha(k-1) + \varepsilon [\hat{\mathbf{x}}(k-1) - \pi(k-1)] \quad (22)$$

ここで,  $\varepsilon$  は正値のきざみ幅である.

Table 1 Decentralized Estimation Algorithm

Estimation	$\hat{\mathbf{x}}^i(k+1) = \hat{\mathbf{x}}^i(k+1/k) + G^i(k+1)\nu^i(k+1/k) + K^i(k+1/k)$ where, $G^i(k+1) = P^i(k+1)\Psi^{iT}[\pi(k+1)]V_0^{i-1}(k+1)$ $K^i(k+1/k) = \{-P^i(k+1)[\Psi^{iT}[\pi(k+1)]V_0^{i-1}(k+1) \cdot \Psi^i[\pi(k+1)]V_w^i(k) + I] + V_w^i(k)\} \Phi^{iT}[\pi(k)]\alpha^i(k)$
Prediction	$\hat{\mathbf{x}}^i(k+1/k) = \Phi^i[\pi(k)]\hat{\mathbf{x}}^i(k) + \mathbf{d}^i[\pi(k)]$
Innovation	$\nu^i(k+1/k) = \mathbf{y}^i(k+1) - \Psi^i[\pi(k+1)]\hat{\mathbf{x}}^i(k+1/k) - \mathbf{g}^i[\pi(k+1)]$
Estimation Error Covariance	$P^i(k+1) = P^i(k+1/k)[I + \Psi^{iT}[\pi(k+1)]V_0^{i-1}(k+1) \cdot \Psi^i[\pi(k+1)]P^i(k+1/k)]^{-1}$
Prediction Error Covariance	$P^i(k+1/k) = \Phi^i[\pi(k)]P^i(k)\Phi^{iT}[\pi(k)] + V_w^i(k)$

$i$  indicates  $i$ -th subsystem.

5. 数値計算例

次式で表わされる系の状態とパラメータの同時推定問題をここで提案のアルゴリズムによって解決する.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 \cdot x_1 + 0.25x_2^2 + w_1 \\ \dot{x}_2 &= 0.25x_1^2 - a_2 \cdot x_2 + w_2 \\ y_1 &= x_1 + v_1 \\ y_2 &= x_2 + v_2 \end{aligned}$$

ここで,  $x_1, x_2$  が実状態で,  $a_1, a_2$  が未知パラメータである. 観測  $y_1, y_2$  の時系列によって逐次, 状態とパラメータを推定していくのがここでの問題である. 本アルゴリズムを適用するために, 上の連続形方程式を, 簡単のために1次離散化すれば,

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_3(k) \cdot x_1(k) + 0.25Tx_2^2(k) + Tw_1(k) \\ x_2(k+1) &= 0.25Tx_1^2(k) + x_4(k)x_2(k) + Tw_2(k) \\ x_3(k+1) &= x_3(k) \\ x_4(k+1) &= x_4(k) \\ y_1(k) &= x_1(k) + v_1(k) \\ y_2(k) &= x_2(k) + v_2(k) \end{aligned}$$

ここで,  $T$  はサンプリング周期であり,  $x_3, x_4$  は, 次のように表わされるパラメータである.

$$\begin{aligned} x_3(k) &= 1 - a_1 \cdot T \\ x_4(k) &= 1 - a_2 \cdot T \end{aligned}$$

上のシステムを次のような二つのサブシステムに分割する.

サブシステム-1:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_3(k) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0.25Tx_2^2(k) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Tw_1(k) \\ Tw_3(k) \end{bmatrix} \\ y_1(k) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + v_1(k) \end{aligned}$$

サブシステム-2:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_2(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_4(k) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0.25Tx_1^2(k) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Tw_2(k) \\ Tw_4(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

なお,  $w_3, w_4$  はパラメータに加えられた仮想的雑音である. 計算機シミュレーションで使ったデータを次に掲げる.

$$\begin{aligned} E\{w_i(k)\} &= 0, \forall i \\ E\{w_i^2(k)\} &= 0.4, i=1, 2 \\ E\{w_3^2(k)\} &= E\{w_4^2(k)\} = 0.04 \\ E\{v_i(k)\} &= 0, \forall i \\ E\{v_1^2(k)\} &= E\{v_2^2(k)\} = 0.4 \\ x(0) &= [6.0 \quad 4.0 \quad 0.95 \quad 0.97]^T \\ \hat{x}(0) &= [5.5 \quad 4.5 \quad 0.96 \quad 0.96]^T \\ P(0) &= \begin{bmatrix} 0.25 & 0.025 & 0.008 & 0.008 \\ 0.025 & 0.25 & 0.008 & 0.008 \\ 0.008 & 0.008 & 0.025 & 0.0025 \\ 0.008 & 0.008 & 0.0025 & 0.025 \end{bmatrix} \\ T &= 0.02 \text{ (sec)} \\ \epsilon &= 0.02 \end{aligned}$$

得られた数値実験結果を Fig.1 から Fig.4 に示す. これによれば, 実験態値の推定では, 非階層的推定アルゴリズム (図中“N”でプロットされている.) と階層的推定アルゴリズム (図中“H”でプロットされている.) では推定値の精度に大きな相違は見られないが, パラメータの推定値では両者の間にかなりの差が生じている. 非階層的推定アルゴリズムでは推定値に

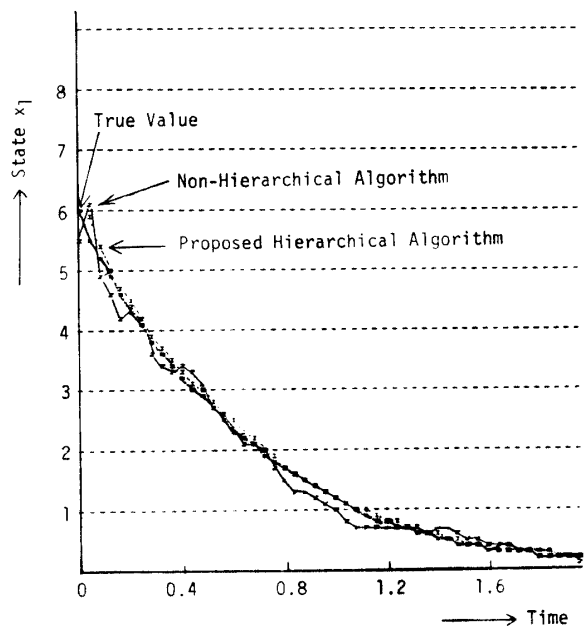


Fig. 1 Estimation of state  $x_1$ .

バイアスは生じていないが、階層的推定アルゴリズムでは、推定値にバイアスが生じやすくなっている。もっとも、本数値実験の場合は、このバイアスは無視できる程度のものである。先験情報に悪質なものを使用すると、バイアスが大きくなるので注意を要する。また、パラメータの推定値が、階層的推定アルゴリズムで振動しているが、これはパラメータに仮想的に加えた雑音による影響であって、この分散値が小さくなれば、この振動も小さくなっていく。

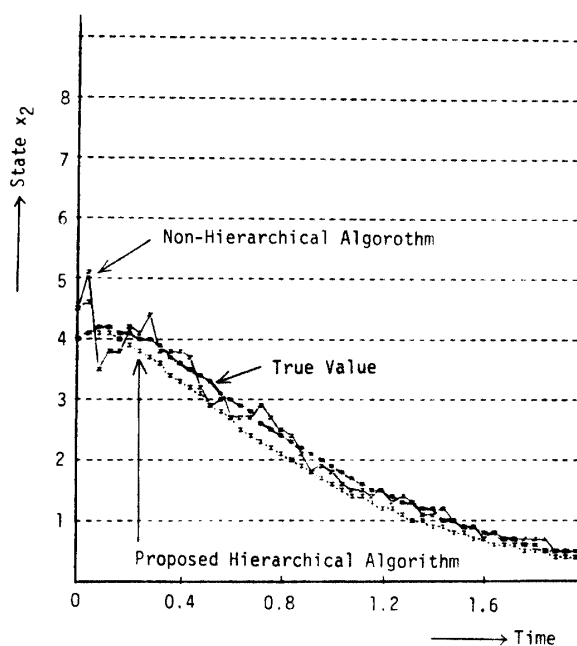


Fig. 2 Estimation of state  $x_2$ .

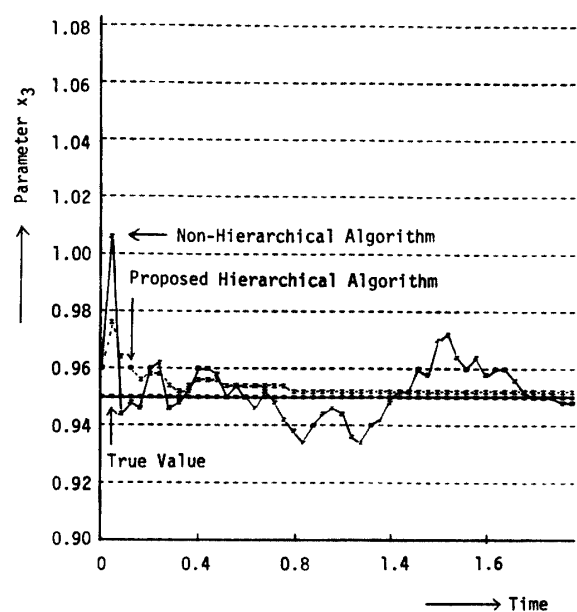


Fig. 3 Estimation of parameter  $x_3$ .

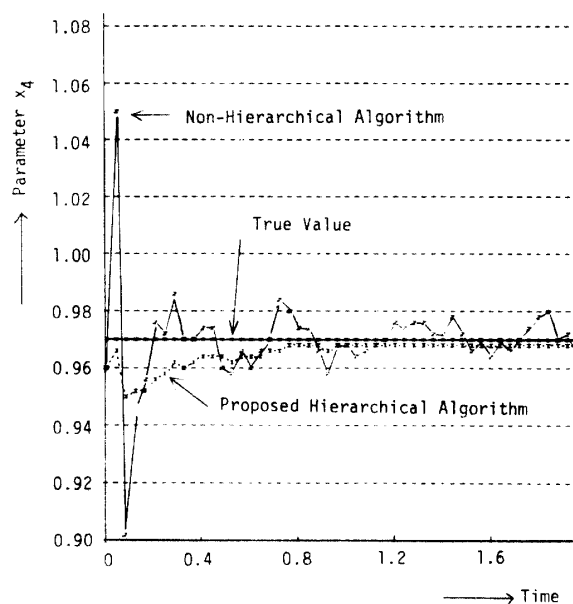


Fig. 4 Estimation of parameter  $x_4$ .

## 6. 結 言

本研究報告では、系分割に基づく分散非線形状態推定アルゴリズムをより簡単な形として導出し、数値実験にてその動作が良好であることを確認した。それほど大きくない次元の系を取り扱う場合は、従来から使用されている集中型の推定アルゴリズムによる計算の方がよいが、大規模系になれば、集中型の推定アルゴリズムでは、大行列の逆行列計算などの煩わしさがでてきて、特に、オンライン計算の場合にはやっかいな問題になってくる。ここで提案された分散型アルゴリズムは、系が大規模になってくるにつれて有利になるものと考えられる。また、サブシステムへの分割数は観測ベクトルの次元数に等しいことが明らかである。

Sage らの提案による分散型アルゴリズムに比較しても、ここで提案したアルゴリズムの方がより簡単になっていることがわかる。アルゴリズムの単純化という点は、特に大規模系について考えるとき、重要なことである。次に、唯一の集中型処理のされる協調部アルゴリズムは、オンライン計算を目的としている点を考慮に入れると、このようなワンステップ型のグラディエント・アルゴリズムが有効と思われる。これは、推定初期の期間にあっては、いずれにしても質の高い推定値は得られないであろうが、いずれ推定段数の増加にともなって、推定が改善されていき、そのようなときにグラディエント・アルゴリズムが収束をしていけばよいであろうという考え方に立脚している。

## 参 考 文 献

- 1) 第22回制御理論部会資料-カルマンフィルタはいかに使われるか-, 計測自動制御学会, (1977)
- 2) Aoki, M.: Some Approximation Methods for Estimation and Control of Large Scale Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-23**, 173-182 (1978)
- 3) Lou, Z. and Bullock, T.E.: Discrete Kalman Filtering Using a Generalized Companion Form, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-20**, 227-230 (1975)
- 4) Pearson, J.D.: Optimization Methods for Large Scale Systems, Wismer, D.A. ed., McGraw-Hill, N.Y. (1971)
- 5) Fry, C.M. and Sage, A.P.: On Hierarchical Estimation and System Identification Using the MAP Criterion, Comput. and Elect. Engng., **1**, 361-389 (1973)
- 6) Jazwinski, A.H.: Stochastic Process and Filtering Theory, Academic Press, N.Y. (1970) p. 162
- 7) Sage, A.P. and Melsa, J.L.: System Identification, Academic Press, N.Y. (1971) p. 193

## 付録 インバリエント・インベディングによるオンライン・アルゴリズムの導出

二点境界問題が次のような形で与えられたとする.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \lambda(k)] \quad (\text{A. 1})$$

$$\lambda(k+1) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \lambda(k)] \quad (\text{A. 2})$$

$$\lambda(k_0) = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b} \quad (\text{A. 3})$$

$$\lambda(k_f) = 0 \quad (\text{A. 4})$$

ここで, 端末条件を,

$$\lambda(k_f) = \mathbf{c}, \quad \mathbf{c}: \text{一定} \quad (\text{A. 5})$$

とおいたときの解が次のように表わされたとする.

$$\mathbf{x}(k_f) = \gamma(\mathbf{c}, k_f) + P(k_f)\mathbf{c} \quad (\text{A. 6})$$

このとき, 次のようなインバリエント・インベディング方程式が成立する<sup>7)</sup>.

$$\hat{\mathbf{x}}(k_f+1) = \mathbf{f}[\hat{\mathbf{x}}(k_f), 0, k_f] + P(k_f+1)\mathbf{g}[\hat{\mathbf{x}}(k_f), 0, k_f] \quad (\text{A. 7})$$

$$P(k_f+1) \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}[\hat{\mathbf{x}}(k_f) - P(k_f)\mathbf{c}, \mathbf{c}, k_f]}{\partial \mathbf{c}} \Big|_{\mathbf{c}=0} \right\} = - \frac{\partial \mathbf{f}[\hat{\mathbf{x}}(k_f) - P(k_f)\mathbf{c}, \mathbf{c}, k_f]}{\partial \mathbf{c}} \Big|_{\mathbf{c}=0} \quad (\text{A. 8})$$

ここで,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  の関数のアークギュメントは, (A. 1), (A. 2) 式とは異なり,  $\hat{\mathbf{x}}(k_f)$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $k_f$  としている点に

注意を要する. この両式より, オンライン推定アルゴリズムを求めることができる.

さて, いま, 与えられた二点境界値問題は (15)~(19) 式であるので, これらより,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  を求めると, 次のように表わすことができる.

$$\mathbf{f}[\hat{\mathbf{x}}(k_f), \mathbf{c}, k_f] = \phi[\hat{\mathbf{x}}(k_f) - V_w(k_f)\Phi^{-T}[\mathbf{c} - \alpha(k_f)]] \quad (\text{A. 9})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}[\hat{\mathbf{x}}(k_f), \mathbf{c}, k_f] &= \Phi^{-T}[\mathbf{c} - \alpha(k_f)] + \Psi^T[\pi(k_f+1)] \cdot \\ &V_v^{-1}(k_f+1) \cdot \{\mathbf{y}(k_f+1) - \mathbf{h}[\hat{\mathbf{x}}(k_f+1/k_f)]\} \\ &- \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{x}}(k_f+1/k_f)} \{\Psi^T[\pi(k_f+1)]V_v^{-1}(k_f+1) \cdot \\ &[\mathbf{y}(k_f+1) - \mathbf{h}[\hat{\mathbf{x}}(k_f+1/k_f)]] \cdot \\ &V_w(k_f)\Phi^{-T}[\mathbf{c} - \alpha(k_f)]\} \end{aligned} \quad (\text{A. 10})$$

ここで,

$$\Delta(k_f+1/k_f) \triangleq \phi[\hat{\mathbf{x}}(k_f)] \quad (\text{A. 11})$$

$$\phi[\hat{\mathbf{x}}(k_f)] \triangleq \Phi[\pi(k_f)]\hat{\mathbf{x}}(k_f) + \mathbf{d}[\pi(k_f)] \quad (\text{A. 12})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}[\hat{\mathbf{x}}(k_f+1/k_f)] &\triangleq \Psi[\pi(k_f+1)]\hat{\mathbf{x}}(k_f+1/k_f) \\ &+ \mathbf{g}[\pi(k_f+1)] \end{aligned} \quad (\text{A. 13})$$

(A. 10) 式では, テーラー級数の1次展開近似が用いられている. (A. 9), (A. 10) 式をインバリエント・インベディング方程式に適用すると, (A. 7) 式を考慮することにより,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k_f+1) &= \hat{\mathbf{x}}(k_f+1/k_f) \\ &+ G(k_f+1)\nu(k_f+1/k_f) + K(k_f+1) \end{aligned} \quad (\text{A. 14})$$

ここで,

$$G(k_f+1) = P(k_f+1)\Psi^T[\pi(k_f+1)]V_v^{-1}(k_f+1) \quad (\text{A. 15})$$

$$\begin{aligned} K(k_f+1) &= [V_w(k_f) - P(k_f+1)[\Psi^T[\pi(k_f+1)] \cdot \\ &V_v^{-1}(k_f+1)\Psi[\pi(k_f+1)]V_w(k_f) \\ &+ I]]\Phi[\pi(k_f)]^{-T}\alpha(k_f) \end{aligned} \quad (\text{A. 16})$$

$$\begin{aligned} \nu(k_f+1/k_f) &= \mathbf{y}(k_f+1) - \Psi[\pi(k_f+1)] \cdot \\ &\hat{\mathbf{x}}(k_f+1/k_f) - \mathbf{g}[\pi(k_f+1)] \end{aligned} \quad (\text{A. 17})$$

また, (A. 8) 式から,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}[\hat{\mathbf{x}} - P\mathbf{c}, \mathbf{c}, k_f]}{\partial \mathbf{c}} \Big|_{\mathbf{c}=0} &= -\Phi[\pi(k_f)]P(k_f) \\ &- V_w(k_f)\Phi^{-T}[\pi(k_f)], \end{aligned} \quad (\text{A. 18})$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}[\hat{\mathbf{x}} - P\mathbf{c}, \mathbf{c}, k_f]}{\partial \mathbf{c}} \Big|_{\mathbf{c}=0} = \Psi^T[\pi(k_f+1)] \cdot$$

$$V_v^{-1}(k_f+1)\Psi[\pi(k_f+1)]\{\Phi[\pi(k_f)]P(k_f) + V_w(k_f)\Phi^{-1}[\pi(k_f)]\} \quad (\text{A. 19})$$

の関係より,

$$P(k_f+1)\{\Phi^{-T}[\pi(k_f)] + \Psi^T[\pi(k_f+1)] \cdot V_v^{-1}(k_f+1)\Psi[\pi(k_f+1)][\Phi[\pi(k_f)]P(k_f) + V_w(k_f)\Phi^{-T}[\pi(k_f)]]\} = \Phi[\pi(k_f)]P(k_f) + V_w(k_f)\Phi^{-T}[\pi(k_f)] \quad (\text{A. 20})$$

が得られる. この両辺に右方向より  $\Phi^T[\pi(k_f)]$  を掛

けて,  $P(k_f+1)$  を求めると,

$$P(k_f+1) = P(k_f+1/k_f)\{I + \Psi^T[\pi(k_f+1)] \cdot$$

$$V_v^{-1}(k_f+1)\Psi[\pi(k_f+1)]P(k_f+1/k_f)\}^{-1} \quad (\text{A. 21})$$

ここで,

$$P(k_f+1/k_f) \triangleq \Phi[\pi(k_f)]P(k_f)\Phi^T[\pi(k_f)] + V_w(k_f) \quad (\text{A. 22})$$

以上により, Table 1 のオンライン推定アルゴリズムが得られた.

(昭和54年4月13日 受理)