

代数方程式の数値解法

岡 田 敏 彦*

A Numerical Method for Polynomial Equations

Toshihiko OKADA

Abstract

In this paper author describes a method for finding roots of a polynomial. Let $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ be a polynomial whose coefficients are complex. Using Lehmer's algorithm for $f(z)$, we can construct a polynomial sequence such that $f_0(z), f_1(z), \dots, f_{k-1}(z), f_k$. Besides, we calculate $P_{i-1} = |P_i| (|f_{i-1}(0)|^2 - 1) / (|f_{i-1}(0)|^2 + 1)$ where $i = 1, 2, \dots, k$ and $P_0 = 1$. Let m be the maximum i such that $|P_i| > d^{-t}$ where $d (= 2 \text{ or } 10)$ is the base of the computer's number system and t is the number of digits in the mantissa of the floating point system. Then we can obtain the number M of roots which $f(z)$ has in the unit circle by the recurrence formula so that $M_{i-1} = 1(-P_i)^{n_{i-1}} + \text{sgn}(P_i)M_i$ where $1(x)$ is unit function, $\text{sgn}(x)$ is sign function, $i = m, m-1, \dots, 1$ and $M_m = 0$. Furthermore, we can know easily the number of roots of $f(z)$ in a circle of radius R by transforming $f(z)$ to $f(Rz)$. From this we can find as follows:

- (1) the circle Γ having one or more roots of $f(z)$ on itself,
- (2) the places of roots of $f(z)$ lying on Γ .

The process for finding (1) and (2) is a second order. Also, this method can obtain double roots and roots of greater multiplicity.

1. ま え が き

Lehmer により提案された代数方程式の解法¹⁾はさらに星野²⁾や筆者^{3),4)}等によって発展させられ、根の精度、根への収束時間は大きく改善されてきた。それらは大まかにいって根を求める過程が二つの部分からなり、根の絶対値を求める部分と根の位置を求める部分よりなっている。しかし、Lehmer 法を改善した手法は根の絶対値を求める部分にはよく知られている Newton-Raphson 法や Sturm 法等が使われている。そのため代数方程式の解法に要求される根を求める手続きのよさに欠き、プログラミングが複雑になっている。また、根の絶対値を求める部分の計算法は原理的には多重根の有無に無関係であるが、多重根が存在する場合は計算過程で大きな桁落ちが生じ精度が悪い。

本論文では根を求める過程を一つの手法で統一し、一様な手続きでプログラミングできるようにしている。さらに、根への収束時間を短縮するため二次形式

の収束過程を採用し、多重根が存在する場合でも精度よく求まるよう改善をほどこしている。

2. 根を求める方法

2.1 根の絶対値

n 次の複素係数多項式を、

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (a_0 a_n \neq 0) \quad (1)$$

とすると、係数 a_i を $b_i = a_i / a_0$ ($i = 0, 1, \dots, n$) に置き換え、新たに、

$$f_0(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n \quad (2)$$

とする。これに対し、

$$f_0^*(z) = \bar{b}_n z^n + \bar{b}_{n-1} z^{n-1} + \dots + 1 \quad (3)$$

を定義する。(3)式の係数は(2)式のそれに共役で、順序が逆になっている。(2)式と(3)式より、

$$\bar{b}_n f_0(z) - f_0^*(z)$$

をつくると、 z^n の項を含まない多項式となる。これを(2)式のように最高次の係数で、各係数を除して正規化し $f_1(z)$ とする。 $f_1(0) \neq 0$ のとき $f_1(z)$ と $f_1^*(z)$

* 共通科

より同様の方法で $f_2(z)$ をつくる. 以下これをくり返し多項式列,

$f_0(z), f_1(z), \dots, f_{k-1}(z), f_k = \text{定数 } (k \leq n)$ (4) をつくる. $f_i(z)$ の次数を n_i とすると,

$$n = n_0 > n_1 > \dots > n_{k-1} > n_k = 0$$

となる. ここで, $F_i = f_i(0)$ とおき次のものを計算する.

$$P_i = |P_{i-1}| (|F_{i-1}|^2 - 1) / (|F_{i-1}|^2 + 1) \quad (5)$$

ここに, $i = 1, 2, \dots, k, P_0 = 1$

$|P_i|$ の値は $|P_1| > |P_2| > \dots > |P_k|$ となる. $|P_i| > \epsilon = d^{-t}$ (d は計算機の表示基数 (2 または 10), t は浮動小数点表示数の仮数部の桁数) を満たす i の最大値を m とするとき, $f(z)$ が単位円内でもつ根の数 M は漸化式,

$$M_{i-1} = 1 - P_i n_{i-1} + \text{sgn}(P_i) M_i \quad (6)$$

ここに, $i = m, m-1, \dots, 1, M_m = 0$

により $M = M_0$ として計算される. なお単位関数 $1(x)$ は $x > 0$ のとき 1, $x < 0$ のとき 0, また符号関数 $\text{sgn}(x)$ は $x > 0$ のとき 1, $x < 0$ のとき -1 とする. (6)式を使って任意の半径 R の円内にいくつの根が存在するか判定することができる. すなわち, z を Rz に置き換えることにより, 半径 R の円を単位円に変換し, 係数を,

$$f(z) = a_0 R^n z^n + a_1 R^{n-1} z^{n-1} + \dots + a_n$$

とすればよい. したがって, F_i, P_i, M は R の関数となるので $F_i(R), P_i(R), M(R)$ と表わすことにする.

いま, 半径 R の円内に根がなければ半径を $2R$, あれば $R/2$ とし, 新しい円内に根があるかないか判定する. これをくり返して半径 R_a, R_b, R_c の三つの同心円を見つけた. ここに, 半径 R_a の円内には根はなく, 半径 R_b の円内に根が存在する. 半径 R_c は $R_a < R_c < R_b$ を満たすようにとられた円環 $R_a < |z| < R_b$ 内に存在する根の最小絶対値に対する近似値である.

次に $P_i(R_c) < 0$ で, かつ $M(R_c) \leq n_{i-1} (1 \leq i \leq m)$ を満たす i があれば, その i の最大値 l に対する $|F_{l-1}(R_a)|, |F_{l-1}(R_c)|$ を計算し, 次の二次方程式を解く.

$$AR^2 + BR + C = 0 \quad (7)$$

係数 A, B, C は $|F_{l-1}(R_a)|, |F_{l-1}(R_b)|, |F_{l-1}(R_c)|$ が,

$$|F_{l-1}(R)| = AR^2 + BR + C + 1$$

を満たすように決められたものである. すなわち,

$$A = (XY - WZ) / (UX - VW),$$

$$B = (Y - AU) / W,$$

$$C = |F_{l-1}(R_a)| - AR^2_a - BR_a - 1,$$

$$U = R^2_a - R^2_b, \quad V = R^2_b - R^2_c, \quad W = R_a - R_b,$$

$$X = R_b - R_c, \quad Y = |F_{l-1}(R_a)| - |F_{l-1}(R_b)|,$$

$$Z = |F_{l-1}(R_b)| - |F_{l-1}(R_c)|$$

(7)式の根 $(-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}) / 2A$ を $R_1, R_2 (R_1 < R_2)$ とするとき,

$$R_c = 1(A)R_1 + 1(-A)R_2$$

を新しい近似値とする.

一方 $1 \leq i \leq m$ に対し $P_i(R_c) > 0$ ならば $P_i(R_b) < 0$ で, かつ $M(R_b) \leq n_{i-1}$ を満たす i の最大値に対する $|F_{i-1}(R_a)|, |F_{i-1}(R_b)|, |F_{i-1}(R_c)|$ を計算し, 同様に(7)式を解き, 新しい R_c を決める. 古い R_c に対し $M(R_c) > 0$ ならば, 古い R_c の値を R_b とし, $M(R_c) = 0$ ならば R_a とする. これをくり返すと半径 R_a の内円と半径 R_b の外円は接近し, R_c の値は根のうち最小の絶対値に近似されていく.

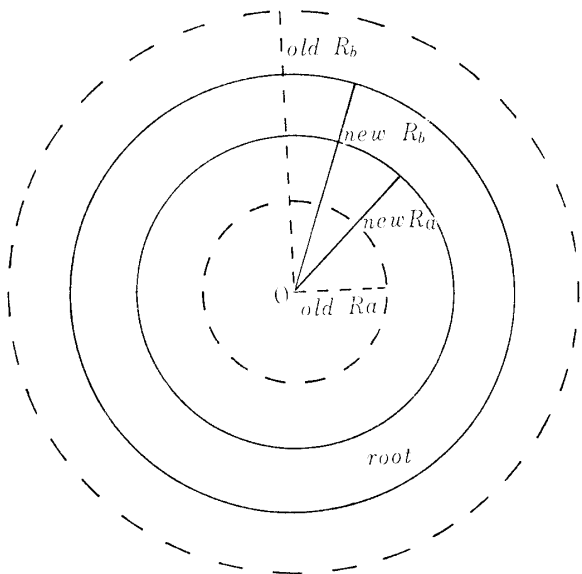


Fig. 1 processes for finding the minimum absolute value of roots of $f(z)$: The inner circles of radius R_a are free of roots, the outer ones of radius R_b are containing at least one root

計算機で何回か反復計算すると $R_a = R_c$ あるいは $R_c = R_b$ となり, このときの R_c の値を根の最小絶対値 R_{min} とする.

2・2 円上の根の位置

z を $R_{min}z$ に置き換えることにより半径 R_{min} の円上の根を単位円上に置換すると, R_{min} に対する多

項式 $f_i(z)$ のうち次数が $n_i = M(R_{min})$ の多項式の根となる³⁾。したがって、この多項式の根を求めれば

半径 R_{min} 円上の根の位置が決定されることになる。多項式を、

$$g(z) = z^N + c_1 z^{N-1} + \dots + c_N \quad (N = M(R_{min})) \quad (8)$$

とする。(8)式の根はすべて単位円上に存在する。

まず、(8)式が実根をもつかどうかしらべる。 z 平面上で原点を1に移す。そのときの多項式、

$$g(z+1) = z^N + c'_1 z^{N-1} + \dots + c'_N$$

の定数項が、

$$|c'_N| < \epsilon' = \delta \sum_{i=0}^N |c_i| \quad (9)$$

ここに、 $\delta = \max(|c_N c_{i-1} - c_{N-i}|) (i = 0, 1, \dots, N)$ ならば $g(z)$ は実根1をもつとみなす。さらに $|c'_{N-1}|, |c'_{N-2}|, \dots$ が ϵ' より小であれば2重根, 3重根, \dots もつとみなす。実根-1についても同様に原点を-1に移し判定する。求めた実根で $g(z)$ の次数を下げ、それを新たに $g(z)$ とし、次に複素根を求める。

単位円上の右半分に存在する根については原点を1に移し、ここを中心として前述の根の絶対値を求めたときと同様に半径 $r_a, r_b, r_c (r_a < r_c < r_b)$ の三つの同心円を見つけ、半径 r_c を根のうち最小の絶対値 r_{min} に収束させる。

すると根は収束円と単位円の交点上に存在する。二つの交点座標 $x \pm iy = 1 - r_{min}^2/2 \pm i r_{min} \sqrt{1 - r_{min}^2}/4$ を z_1, z_2 とすると、根がどちらにいくつ存在するかは原点を z_1, z_2 に移し、(9)の方法で $g(z+z_1), g(z+z_2)$ を定数項より順次 z, z^2, \dots の係数をしらべる

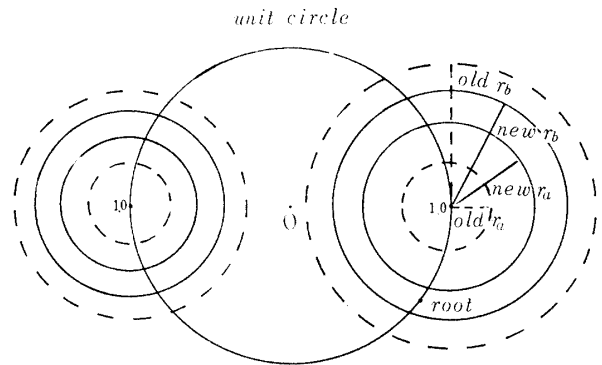


Fig. 2 Processes for finding roots of $g(z)$ lying on the unit circle

ことにより判定する。なお、 $g(z)$ が実係数の場合は共役複素根となるためただちに z_1, z_2 に $M(r_{min})/2$ 個ずつ存在すると判定できる。単位円の左半分に存在する根についても原点を-1に移し、同様に求められる。このときの交点座標は $-x \pm iy$ となる。

求めた $g(z)$ の根 $\exp(i\theta_j) (j = 1, 2, \dots, N)$ と R_{min} の積 $R_{min} \exp(i\theta_j)$ が半径 R_{min} の円上の根の位置となる。 $g(z/R_{min})$ で $f(z)$ を除し、新たにそれを $f(z)$ として順次解いていけば $f(z)$ の根はすべて求められる。

3. 数値例

本方法をプログラム化し、代数方程式を解いた結果を Table 1 に示す。計算機は FACOM 230-75 を使用し、倍精度計算を行なっている。

Table 1 Experimental results

Example 1 $f(z) = z^9 + (0.2 + 0.1i)z^8 + 10iz^7 + (-1 + 2i)z^6 - 35z^5 - (7 + 3.5i)z^4 - 50iz^3 + (5 - 10i)z^2 + 24z + 4.8 + 2.4i$

True roots	Results	
$-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$	-0.141421356237309D01	+0.141421356237309D01 i
$\sqrt{2} - \sqrt{2}i$	0.141421356237309D01	-0.141421356237309D01 i
$-\sqrt{3}/2 + \sqrt{3}/2i$	-0.122474487139158D01	+0.122474487139158D01 i
$\sqrt{3}/2 - \sqrt{3}/2i$	0.122474487139158D01	-0.122474487139158D01 i
$-1 + i$	-0.100000000000000D01	+0.100000000000000D01 i
$1 - i$	0.100000000000000D01	-0.100000000000000D01 i
$-\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2i$	-0.707106781186547D00	+0.707106781186547D00 i
$\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2i$	0.707106781186547D00	-0.707106781186547D00 i
$-0.2 - 0.1i$	-0.200000000000000D00	-0.100000000000000D00 i

Example 2 $f(z) = z^{10} - 55iz^9 - 1320z^8 + 18150iz^7 + 157773z^6 - 902055iz^5 - 3416930z^4 + 8409500iz^3 + 12753576z^2 - 10628640iz - 3628800$

True roots	Results
10i	0.100000000000103D02 i
9i	0.899999999996439D01 i
8i	0.800000000003587D01 i
7i	0.700000000000556D01 i
6i	0.599999999996852D01 i
5i	0.500000000001870D01 i
4i	0.39999999999644D01 i
3i	0.30000000000012D01 i
2i	0.20000000000000D01 i
i	0.99999999999999D00 i

Example 3 $f(z) = z^5 - (5 + 11i)z^4 - (36 - 44i)z^3 + (128 + 24i)z^2 - (52 + 136i)z - 36 + 52i$

True roots	Results
1 + 3i	0.99999999999999D00 + 0.30000000000000D01 i
1 + 3i	0.99999999999999D00 + 0.30000000000000D01 i
1 + 3i	0.99999999999999D00 + 0.30000000000000D01 i
1 + i	0.10000000000000D01 + 0.99999999999999D00 i
1 + i	0.10000000000000D01 + 0.99999999999999D00 i

Example 4 $f(z) = z^4 - (4 + 4i)z^3 + 12iz^2 + (8 - 8i)z - 4$

True roots	Results
1 + i	0.99999999999999D00 + 0.10000000000000D01 i
1 + i	0.99999999999999D00 + 0.10000000000000D01 i
1 + i	0.99999999999999D00 + 0.10000000000000D01 i
1 + i	0.99999999999999D00 + 0.10000000000000D01 i

Example 5 $f(z) = z^4 - 4.87z^3 + 8.8937z^2 - 7.218497z + 2.19702846$

True roots	Results
1.23	0.122999999987031D01
1.22	0.122000000028053D01
1.21	0.12099999992457D01
1.21	0.12099999992457D01

4. む す び

本方法の主要な点は第一に $|P_i| > \epsilon$ を満たす i の最大値 m を見だし, $i = m, m-1, \dots, 1, M_m = 0$ に対して漸化式 $M_{i-1} = 1(-P_i)n_{i-1} + \text{sgn}(P_i)M_i$ を計算するように改善したことである (この点についての詳細は付録を参照されたい). これにより従来の方法^{1),2),3)} では多重根の精度が非常に悪かったのが飛躍

的に良くなっている. 第二に二次の収束過程 (星野の方法²⁾ にも提案されている) を導入することにより, 計算時間が大幅に短縮され, 実用的になっている. 第三に根を求める過程を一つのアルゴリズムで一貫し, プログラミングを容易にしている. 第四に多項式列 $f_i(z)$ の係数を正規化することにより Lehmer 法¹⁾ の計算過程でよく生ずるオーバーフローエラーを防止し

ている。第五に単位円上の根を二円の交点座標として定め、それを一度に抜きとる利点をもっている。 $f(z)$ が多重根を多くもっているほどこの利点が効き、計算時間の短縮に寄与する。

最後にプログラミング上のいくつかの注意点を述べておく。

(1) 三つの同心円の半径は $R_a = 0$, $R_b = |b_n|^{1/n}$, $R_c = R_b/2$ より出発すれば、これらを見いだすための計算を省略できる。

(2) 計算過程で $F_i(R) = 0$ になる場合は実用上十分小さい正数 ΔR で $F_i(R + \Delta R)$ と置き換えることによりよい結果が得られている。

(3) $g(z)$ が1次あるいは2次の場合はただちに根の公式を使って単位円上の根の位置を求めるのが実際的である。

(4) プログラムは実係数の場合と複素係数の場合に別々に作成するのがよい。実係数をいつも複素計算するのは計算時間にむだが多い。

本方法を実験するにあたり、九州大学、大阪大学、京都大学、東京大学の各大型計算センターを利用したことを付記する。

<付録> P_i の符号と絶対値について

P_i は二つの重要な意味をもっている。符号は $f(z)$ が単位円内に根をもつかどうかの判定情報を示し、 $\varepsilon/|P_i|$ ($i = 1, 2, \dots, k$) は多項式列 $f_i(z)$ の定数項 $f_i(0)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) の浮動小数点表示の仮数部が $\varepsilon/|P_i|$ 以下桁落ちによる誤差となることを示している。

ここで一つの具体例について考えてみる。 $f(z)$ の次数を3、最小絶対値 R_{min} をもつ根が2個存在するとしよう。すると R_{min} に漸近する半径 R_c の円は根をまったく含まないかあるいは2個以上かいずれかである。そのときの P_i の符号は次のような場合が考えられる。

符号列	P_1	P_2	P_3	根の数 M
(a)	-	+	+	3
(b)	-	-	-	2

(c)	-	+	-	2
(d)	+	-	+	2
(e)	+	+	+	0

これから明らかなように $M = 0$ の場合はいつも符号列(e)をとり、 $i = 1, 2, 3$ に対して $P_i > 0$ である。 $M \geq 2$ の場合は符号列(a)~(d)をとり、 $i \leq 2$ に対する P_i のうち少くとも一つが負となる。したがって、 $i \leq 2$ に対する P_i の符号だけで根の数はともかく、有無は判定できることになる。一方 R_c が R_{min} の近傍にくと R_c に対する多項式列 $f_i(z)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) の $f_1(z)$ (次数2) の根は $f_0(z)$ の最小絶対値の根に近づき、同時に $f_1(z)$ は相反多項式 ($f_1(z)$ と $f_1^*(z)$ の根が等しいとき $f_1(z)$ をそのように呼ぶことにする) に近づく³⁾。したがって、 $M = 2$ となる符号列は(d)をとるようになる。さらに、 $i \geq 2$ に対する $|P_i|$ は桁落ちのため小さくなり、とくに $i > 2$ に対して急速に $|P_i| < \varepsilon$ となり、 P_i の符号もくるってくる。しかし、符号列(d)は $|P_i| > \varepsilon$ を満たす $i \leq 2$ について漸化式 $M_{i-1} = 1(-P_i)n_{i-1} + \text{sgn}(P_i)M_i$ ($i = 2, 1, M_2 = 0$) を計算すると、やはり $M = M_0 = 2$ となり、 $i > 2$ に対する P_i を不採用にしても根の数は正しく求められる。したがって、 $f(z)$ が単位円内でもつ根の数 M は $|P_i| > \varepsilon$ を満たす i の最大値を m とするとき漸化式、

$$M_{i-1} = 1(-P_i)n_{i-1} + \text{sgn}(P_i)M_i$$

を $i = m, m-1, \dots, 1, M_m = 0$ に対して計算すれば $M = M_0$ として得られることになる。このルールはとくに多重根に対して有効に働き、精度よく求めるのに大きく寄与する。

参 考 文 献

- 1) D.H. Lehmer: JACM, 8, 151-162 (1961)
- 2) 星野 聡: 情報処理学会講演予稿集 31-32 (1964)
- 3) 鳥居達生, 吉岡敏彦: 情報処理, 8, 9-15 (1967)
- 4) 岡田敏彦, 鳥居達生: 情報処理学会講演予稿集, 161-162 (1973)

(昭和49年3月30日受理)