

直線導線と円弧状導線間の相互インダクタンスの解析

武 平 信 夫*

An Analysis of Mutual Inductance between the Straight Conductor and the Conductor of Circular Arc

Nobuo TAKEHIRA

Abstract

In an electric furnace, mutual inductance between the flexible cable and secondary bus, copper pipe (Both of them are regarded as the straight conductors.) is not able to neglected. There is no adequate paper about it except Momota's. In this paper, it is assumed that the flexible cable is regarded as a conductor of circular arc and mutual inductance between the straight conductor and the conductor of circular arc is analyzed by means of the Neumann formula. A few special cases are also analyzed. The results are expressed by elementary functions.

1. 緒 言

電気炉においては炉用変圧器より、二次母線、たわみ部、イコライザ、銅管その他を経て炉内に電力が供給されるのである¹⁾が、二次回路には低電圧、大電流が供給されるから導体の抵抗分についても考慮すると同時に、リアクタンス分についても十分検討されねばならない²⁾。ところで電気炉には電力調整のために電極を上下する際に支障のないように、たわみ部 (Fig. 1にその概略を示す) が設けられている¹⁾。この部分のリアクタンスは、二次回路中でも相当大きく、力率に影響を与える。それは主としてたわみ部の自己インダクタンスによると推定されるが、たわみ部と二次団線、銅管 (両者は直線導線とみなせる。) などの相互インダクタンスも無視できない。これについては百田氏が、たわみ部を直線導体に平行な部分と直角な部分とに分けて、計算する方法を提案している³⁾。その他には適切な文献がみあたらない。そこで本稿ではかなり大胆な仮定であるが、Paschkis⁴⁾と同様にたわみ部を円弧状導線と考え、直線導線、円弧状導線の二つの導線が相異なる二平面内に存在する場合の相互インダクタンスを解析し、一つの知見を得ることを試みた。なお筆者はこの種の問題に関して、一部発表している⁷⁾⁸⁾が、本稿もそれらに続くものである。

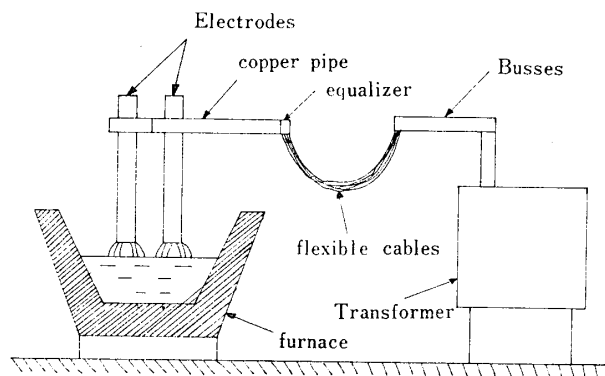


Fig. 1 Schematic diagram of an electric furnace

2. 相互インダクタンスの解析

まず解析を容易にするためにつぎのような仮定をおく。

(i) 電流はすべて導体軸を集中して流れるものとする。

(ii) 表皮効果、近接効果などは無視する。

電気炉の二次回路に使用される導体の断面は相当大きい。しかし導体の断面が円形である場合は、いわゆる幾何学的平均距離⁵⁾の考え方から仮定 (i) は認められる。また断面が円形でなくても導体間の距離が断面に比較して十分大きいときは (i) の仮定を用いて良いことが文献(3)に示してある。百田氏はまた、インダクタンスを求める際、表皮効果は無視しても大きな誤差に

* 電気工学科

ならないことを示している³⁾。Charles⁶⁾は導線間の電磁力を求める際、導体間の距離が導体直径の2倍以上であれば、近接効果は無視しようとしているが、これを相互インダクタンスの場合に適用して類推すれば、近接効果も無視する。以上で仮定 (i),

(ii) の妥当性についての考察を終る。

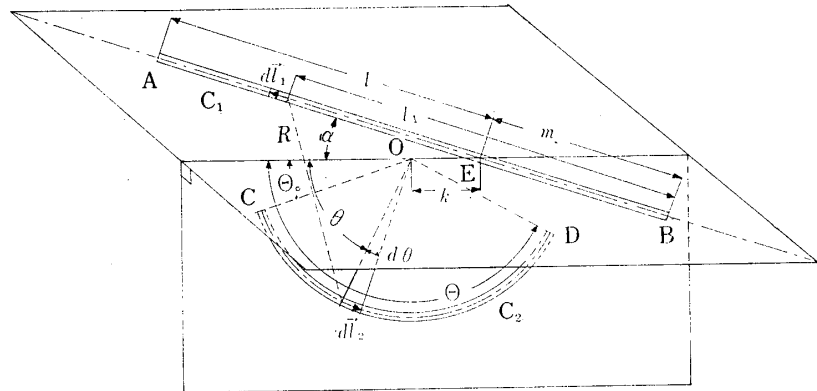


Fig. 2 Arrangement of two conductors

電気炉における円弧状導線と直線導線の配置はFig. 1からもわかるように、円弧状導線の一端と直線導線の一端が一致するのが普通と考えられるが、一般性を持たせる意味でFig. 2に示すような配置について考察することにする。Fig. 2において直線導体を含み円弧状導体を含む平面に垂直で、かつ円弧状導体の中心を含む平面を考える。θ₀=∠COF, θ=∠DOF, k=OE/l, l=AE, m=EB, α=∠FEA とする。両導線の線素ベクトル dl₁ と dl₂ の距離 R は

$$R = \sqrt{\{(l_1 - m)\cos\alpha - k - r\cos\theta\}^2 + (l_1 - m)^2} \cdot \sin^2\alpha + r^2\sin^2\theta \quad (1)$$

である。また両者のスカラー積は

$$dl_1 \cdot dl_2 = -r \cos\alpha \sin\theta d\theta dl_1 \quad (2)$$

相互インダクタンスに関する Neumann の公式を用いれば、導体 C₁, C₂ 間の相互インダクタンスは次式のようになる。すなわち

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \frac{dl_1 \cdot dl_2}{R} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\theta_0}^{\theta} \int_0^{l+m} \frac{r \cos\alpha \sin\theta d\theta dl_1}{\sqrt{\{(l_1 - m)\cos\alpha - k - r\cos\theta\}^2 + (l_1 - m)^2 \sin^2\alpha + r^2\sin^2\theta}} \quad (3)$$

ここに μ₀ は真空中の透磁率で 4π × 10⁻⁷H/m なる値をもつ。(3)式を計算するに当って l₁ - m = L₁ なる変数変換を行なうと

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\theta_0}^{\theta} (-r \cos\alpha \sin\theta) \left\{ \log |2L_1 - 2\cos\alpha(k + r\cos\theta) + 2\sqrt{L_1^2 - 2\cos\alpha(k + r\cos\alpha)L_1 + k^2 + r^2 + 2kr\cos\theta}| \right\} d\theta = -\frac{\mu_0 \cos\alpha}{4\pi} (M_1 - M_2) \quad (4)$$

ただし

$$M_1 = \int_{\theta_0}^{\theta} r \sin\theta \log |l - k\cos\alpha - r\cos\alpha \cos\theta + \sqrt{r \cos\theta (2k - 2l\cos\alpha) + l^2 + k^2 + r^2 - 2kl\cos\alpha}| d\theta \quad (5)$$

$$M_2 = \int_{\theta_0}^{\theta} r \sin\theta \log |-m - k\cos\alpha - r \cos\alpha \cos\theta + \sqrt{r \cos\theta (2k + 2m \cos\alpha) + m^2 + k^2 + r^2 + 2km\cos\alpha}| d\theta \quad (6)$$

となる。M₁, M₂ を計算して(4)式に代入すれば、相互インダクタンスは求まる。まず次節で M₁ を求めてみよう。

2.1 M₁ の計算

直線導線 C₁ の線分 l の、円弧状導線 C₂ を含む面への正射影 l cosα を考え、これが k と等しいか、否かによって M₁ の積分方法が異なる。すなわち、以下に示すように k ≠ l cosα, k = l cosα の二通りの場合の解が得られる。(式の誘導については付録参照)

2.1.1 k ≠ l cosα の場合 この場合の解は

$$M_1 = \frac{1}{\zeta_2} \left\{ (T^2 - \beta_1^2) \log |T - \beta_1| + (T^2 - \beta_2^2) \times \log |T - \beta_2| - (\beta_1 + \beta_2)T - T^2 + T^2 \log \left| \frac{\cos\alpha}{\zeta_2} \right| \right\}_{T=\eta_1}^{T=\eta_2} \quad (7)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= l - k \cos\alpha \\ \zeta_2 &= 2(k - l \cos\alpha) \\ \zeta_3 &= l^2 + k^2 + r^2 - 2kl\cos\alpha \\ \eta_1 &= \sqrt{\zeta_2 r \cos\theta + \zeta_3} \\ \eta_2 &= \sqrt{\zeta_2 r \cos\theta_0 + \zeta_3} \\ \beta_1 &= \frac{\zeta_2 + \sqrt{\zeta_2^2 + 4 \cos\alpha (\zeta_1 \zeta_2 + \zeta_3 \cos\alpha)}}{2 \cos\alpha} \\ \beta_2 &= \frac{\zeta_2 - \sqrt{\zeta_2^2 + 4 \cos\alpha (\zeta_1 \zeta_2 + \zeta_3 \cos\alpha)}}{2 \cos\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

となる。

2・1・2 $k=l \cos \alpha$ の場合 この場合の解は

$$M_1 = \left\{ \frac{\zeta_1 - T \cos \alpha + \sqrt{\zeta_3}}{-\cos \alpha} (\log | \zeta_1 - T \cos \alpha + \sqrt{\zeta_3} | - 1) \right\}_{T=r \cos \theta_0}^{T=r \cos \theta} \quad (9)$$

となる。以上で M_1 を計算することができたが次節において M_2 を求める。

2・2 M_2 の計算

(5), (6)式を比較すればわかるように, M_2 は M_1 における l を $-m$ で置き換えたものに等しい。よって M_1 の場合と同様に $k \neq -m \cos \alpha$ と $k = -m \cos \alpha$ の二通りの場合に分け, (7), (9)式を参照すれば解はただちに得られる。

2・2・1 $k \neq -m \cos \alpha$ の場合 (7)式と全く同一の形式であって次式となる。

$$M_2 = \frac{1}{\zeta_5} \left\{ (T^2 - \beta_3^2) \log | T - \beta_3 | + (T^2 - \beta_4^2) \log | T - \beta_4 | - (\beta_3 + \beta_4) T - T^2 + T^2 \log \left| \frac{\cos \alpha}{\zeta_5} \right| \right\}_{T=r_3}^{T=r_4} \quad (10)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \zeta_4 &= -m - k \cos \alpha \\ \zeta_5 &= 2(k + m \cos \alpha) \\ \zeta_6 &= m^2 + k^2 + r^2 + 2km \cos \alpha \\ \eta_3 &= \sqrt{\zeta_5 r \cos \theta + \zeta_6} \\ \eta_4 &= \sqrt{\zeta_5 r \cos \theta_0 + \zeta_6} \\ \beta_3 &= \frac{\zeta_5 + \sqrt{\zeta_5^2 + 4 \cos \alpha (\zeta_4 \zeta_5 + \eta_6 \cos \alpha)}}{2 \cos \alpha} \\ \beta_4 &= \frac{\zeta_5 - \sqrt{\zeta_5^2 + 4 \cos \alpha (\zeta_4 \zeta_5 + \eta_6 \cos \alpha)}}{2 \cos \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

となる。

2・2・2 $k = -m \cos \alpha$ の場合 この場合は(9)式を参照すれば次式のようになる。

$$M_2 = \left\{ \frac{\zeta_4 - T \cos \alpha + \sqrt{\zeta_6}}{-\cos \alpha} (\log | \zeta_4 - T \cos \alpha + \sqrt{\zeta_6} | - 1) \right\}_{T=r \cos \theta}^{T=r \cos \theta_0} \quad (12)$$

2・3 M の計算

以上の解析からつぎの4通り場合の計算式が考えられる。

- (i) $k \neq l \cos \alpha$ かつ $k \neq -m \cos \alpha$
- (ii) $k = -m \cos \alpha \neq l \cos \alpha$
- (iii) $k = l \cos \alpha \neq -m \cos \alpha$
- (iv) $k = l \cos \alpha = -m \cos \alpha$

(iv) の場合は $l = -m$, すなわち $l + m = 0$ となり導体 C_1 の長さが零であるから考慮する必要はない。

上記の順序で M を求めてみよう。

2・3・1 $k \neq l \cos \alpha$ かつ $k \neq -m \cos \alpha$ の場合 (7), (10)式を(4)式に代入して整理すると次式が得られる。

$$M = -\frac{\mu_0 \cos \alpha}{4 \pi} \left\{ \frac{1}{\zeta_2} \left\{ \eta_1^2 - \eta_2^2 + (\beta_1 + \beta_2)(\eta_1 - \eta_2) + (\eta_2^2 - \beta_1^2) \log | \eta_2 - \beta_1 | + (\eta_2^2 - \beta_2^2) \log | \eta_2 - \beta_2 | - (\eta_1^2 - \beta_1^2) \log | \eta_1 - \beta_1 | - (\eta_1^2 - \beta_2^2) \log | \eta_1 - \beta_2 | - (\eta_1^2 - \eta_2^2) \log \left| \frac{\cos \alpha}{\zeta_2} \right| \right\} - \frac{1}{\zeta_5} \left\{ \eta_3^2 - \eta_4^2 + (\beta_3 + \beta_4)(\eta_3 - \eta_4) + (\eta_4^2 - \beta_3^2) \log | \eta_4 - \beta_3 | + (\eta_4^2 - \beta_4^2) \log | \eta_4 - \beta_4 | - (\eta_3^2 - \beta_3^2) \log | \eta_3 - \beta_3 | - (\eta_3^2 - \beta_4^2) \log | \eta_3 - \beta_4 | - (\eta_3^2 - \eta_4^2) \log \left| \frac{\cos \alpha}{\zeta_5} \right| \right\} \right\} \quad (13)$$

2・3・2 $k = -m \cos \alpha \neq l \cos \alpha$ の場合 (7), (12)式を(4)式に代入して整理すれば, この場合の相互インダクタンスが得られる。すなわち

$$M = -\frac{\mu_0 \cos \alpha}{4 \pi} \left\{ \frac{1}{\zeta_2} \left\{ \eta_1^2 - \eta_2^2 + (\beta_1 + \beta_2)(\eta_1 - \eta_2) + (\eta_2^2 - \beta_1^2) \log | \eta_2 - \beta_1 | + (\eta_2^2 - \beta_2^2) \log | \eta_2 - \beta_2 | - (\eta_1^2 - \beta_1^2) \log | \eta_1 - \beta_1 | - (\eta_1^2 - \beta_2^2) \log | \eta_1 - \beta_2 | - (\eta_1^2 - \eta_2^2) \log \left| \frac{\cos \alpha}{\zeta_2} \right| \right\} - \frac{1}{\cos \alpha} \left\{ (-r \cos \theta \cos \alpha + \zeta_4 + \sqrt{\zeta_6}) (\log | -r \cos \theta \cos \alpha + \zeta_4 + \sqrt{\zeta_6} | - 1) - (-r \cos \theta_0 \cos \alpha + \zeta_4 + \sqrt{\zeta_6}) \log | -r \cos \theta_0 \cos \alpha + \zeta_4 + \sqrt{\zeta_6} | - 1 \right\} \right\} \quad (14)$$

2・3・3 $k = l \cos \alpha \neq -m \cos \alpha$ の場合 (9), (10)式を(4)式に代入して次式が得られる。

$$M = -\frac{\mu_0 \cos \alpha}{4 \pi} \left\{ \frac{1}{\cos \alpha} \left\{ (-r \cos \theta \cos \alpha + \zeta_1 + \sqrt{\zeta_3}) (\log | -r \cos \theta \cos \alpha + \zeta_1 + \sqrt{\zeta_3} | - 1) - (-r \cos \theta_0 \cos \alpha + \zeta_1 + \sqrt{\zeta_3}) (\log | -r \cos \theta_0 \cos \alpha + \zeta_1 + \sqrt{\zeta_3} | - 1) \right\} - \frac{1}{\zeta_5} \left\{ \eta_3^2 - \eta_4^2 + (\beta_3 + \beta_4)(\eta_3 - \eta_4) + (\eta_4^2 - \beta_3^2) \log | \eta_4 - \beta_3 | + (\eta_4^2 - \beta_4^2) \log | \eta_4 - \beta_4 | \right\} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &-(\gamma_3^2 - \beta_3^2) \log |\gamma_3 - \beta_3| \\ &-(\gamma_3^2 - \beta_4^2) \log |\gamma_3 - \beta_4| \\ &-(\gamma_3^2 - \gamma_4^2) \log \left| \frac{\cos \alpha}{\zeta_5} \right| \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ところで Fig. 3 に示すように l, m が、それぞれ m, l 側にある場合には、得られた相互インダクタンスの各式において $-l, -m$ とすればよい。

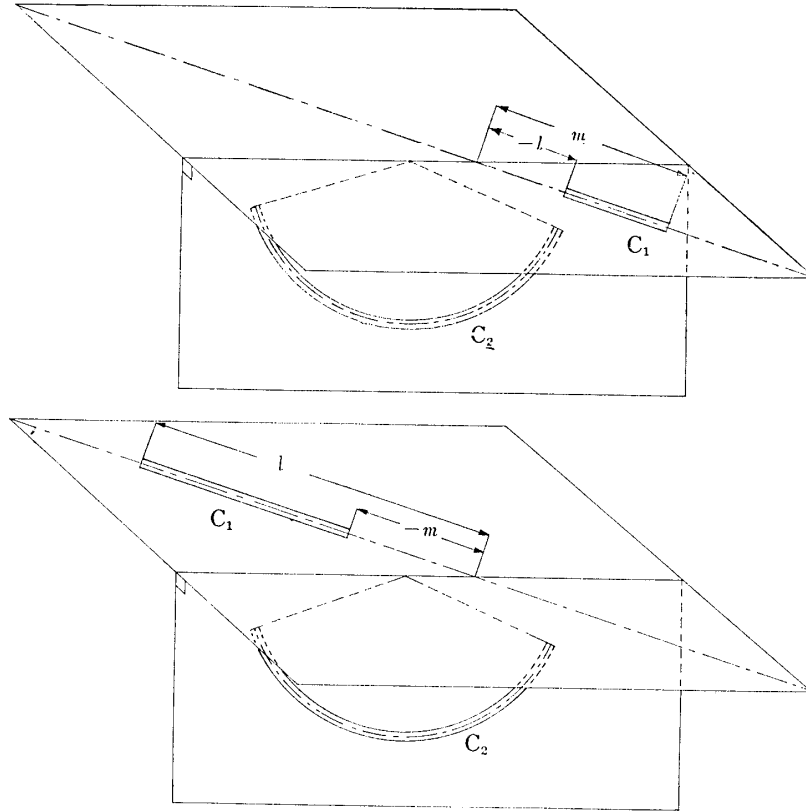


Fig. 3 Arrangement of two conductors

3. 特別な場合の相互インダクタンス

本章では二、三特別な導体配置における相互インダクタンスを計算してみよう。

3.1 $k=r, l=0, \alpha=0, \theta_0=0, \theta=\pi$ の場合

(13) 式を参照すると

$$M = \frac{\mu_0 r}{2\pi} \log \frac{r}{r+m} \quad (16)$$

となる。さらに $r=m$ の場には

$$M = -\frac{\mu_0 r}{2\pi} \log 2 \quad (17)$$

となる。

3.2 $k=r, m=0, \alpha=0, \theta_0=0, \theta=\pi$ の場合

(15)式を参照して

$$M = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ 2r+l - |l-2r| + 2r \log \left| \frac{|l-2r|+l}{2r} \right| \right\} \quad (18)$$

となる。(18)式で $l \geq 2r$ ならば

$$M = -\frac{\mu_0 r}{2\pi} \left(2 + \log \frac{l-r}{r} \right) \quad (19)$$

さらに $0 \leq l < 2r$ ならば

$$M = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \quad (20)$$

となる。

4. 数 値 例

電気炉における直線導線と円弧状導線の配置は Fig. 4 に示すような場合が多いと思われる。Fig. 4 は Fig. 2 において $k=r, \theta_0=0, \theta=\pi, m=0$ とした場合に相当する。 $l=3m, r=1m$ とし、角度 α を $0^\circ \sim 180^\circ$ に変化させた場合の相互インダクタンスを計算してみると Fig. 5 となる。 $\alpha=90^\circ$ の場合の相互インダクタンスは当然零である。

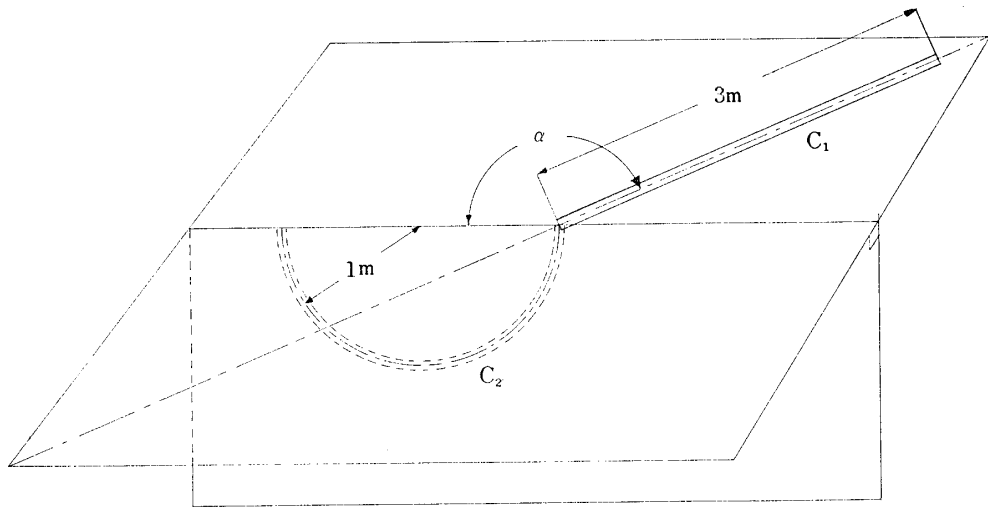


Fig. 4 Numerical example

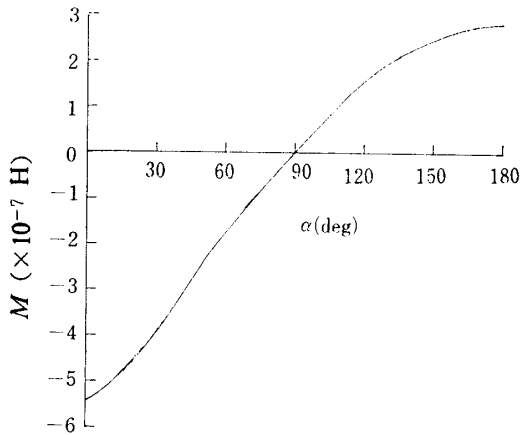


Fig. 5 Relation between M and α

5. 結 言

電気炉におけるたわみ部を円弧状導体と仮定して、二次母線、銅管などの直線導体との相互インダクタンスを解析し、数値例も示した。たわみ部を円弧状導体に仮定したことは緒言でも述べた通り、大胆な仮定であり、ここに問題を残していると思うが、従来この種の問題について論じられた例はほとんどなく、本稿によりかなりの示唆を得ることができるものと期待している。

終りに御指導いただく本学戸田圭一講師に深謝の意を表わします。

参 考 文 献

- 1) 日本電熱工学委員会：工業電気加熱ハンドブック，電気書院 (1968) p. 244
- 2) 水島立夫：富士時報，7, 582 (1962)
- 3) 百田恒夫：電気試験所研究報告，503, 10 (1949)

- 4) V. Paschik : Industrial Electric Furnaces and Appliances, I, Interscience Publishers, N. Y. (1945) p. 152
- 5) E.B. Rosa, F.W. Grover : Bulletin of the Bureau of Standards, 8, 169 (1912)
- 6) E.D. Charles : Proc. Instn Elect. Engrs., 110, 1671 (1963)
- 7) 武平信夫：信学論 (A), 54-A, 164 (1971)
- 8) 武平信夫：信学論 (A), 54-A, 291 (1971)

(昭和48年12月12日受理)

付 録

(7)式および(9)式の導出

(8)式を用い、 $r \cos \theta = t$ なる変数変換を行なえば(5)式はつぎのようになる。

$$M_1 = \int_{r \cos \theta_0}^{r \cos \theta_1} \log \left| \zeta_1 - t \cos \alpha + \sqrt{\zeta_2 t + \zeta_3} \right| dt \tag{A \cdot 1}$$

(A・1)式は ζ_2 が零か否かによって積分方法が異なる。

(i) $\zeta_2 \neq 0$ の場合

$$\sqrt{\zeta_2 t + \zeta_3} = T \tag{A \cdot 2}$$

なる変数変換を行なえば

$$M_1 = \frac{2}{\zeta_2} \int_{\eta_2}^{\eta_1} T \log \left| \frac{(T - \beta_1)(T - \beta_2) \cos \alpha}{\zeta_2} \right| dT \tag{A \cdot 3}$$

となる。(A・3)式の積分を実行して整理すれば(7)式が得られる。

(ii) $\zeta_2 = 0$ の場合

この場合は $\zeta_2 = 0$ を(A・1)式に代入して計算すれば、ただちに(9)式が得られる。