

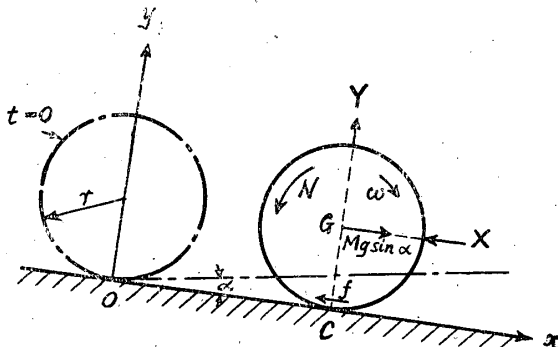
## 壁面に沿って轉動する小球の受ける流体抵抗について\*

上 岡 豊

## I. 緒 言

粘性流体内を運動する球が受ける抵抗のうち、球が一様な流の中を回転せずに運動する場合は古来より多くの研究がなされており、また球が単に回転のみを行う場合についても一応の解決をみている。しかしこの両者が組合わされた進行と回転を同時に行う場合については M-agnus 効果を伴うことは早くより知られていたにもかかわらず定量的な資料にとほしく、二三の研究報告<sup>(1)</sup>があるのみである。一方球の運動に及ぼす近くの壁面の干渉の影響については現在までに或程度解明されているのであるが、以上の各場合が組合わされたときに見なすところの球が壁面に沿って轉動するとき受ける流体抵抗については殆ど知られておらないようである。流体を静止状態に保ち、直径の微小な球が上記の如く轉動する場合、従つてレイノルズ数もまた小なる範囲について実験を行つたのであるが、単純な進行運動における Stokes の法則に相当する範囲に重点を置き、それ以上はレイノルズ数 5000 位までを参考までに求めてみた。この報告は主としてその実験結果についてのべるものである。

## II. 実験方法および装置



第1図 壁面に沿って轉動する球

第1図に示したように流体中において、水平面と角 $\alpha$ をなす傾斜壁面上を半径 $r$ の球体が中心速度 $v$ 、角速度 $\omega$ で自由轉動する場合、壁面に沿

つて球の進行方向およびそれに垂直にそれぞれ $x$ 軸、 $y$ 軸をとる。球は進行運動と回転運動を同時に行うことになるが、これに伴う流体抵抗を中心 $G$ に対する力とモーメントに分けて考え、力の $x$ 軸および $y$ 軸の成分をそれぞれ $X$ 、 $Y$ とし、モーメントを $N$ とする。球および流体の密度を $\rho_0$ 、 $\rho$ とし、球の質量を $M_0$ とした場合、便宜上

$$M_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) = M \quad (1)$$

とおく。球と壁面の接触点 $C$ においてはころがり摩擦は一応無視し得るものと考え、単に摩擦力 $f$ が作用しているものとする、運動方程式は

$$M_0 \frac{dv}{dt} = M g \sin \alpha + X + f \quad (2)$$

( $X$ ,  $f$ は $x$ 軸の正の方向を正とする)

球の中心のまわりの慣性モーメントを $I$ とすると

$$I \frac{d\omega}{dt} = N - fr \quad (3)$$

( $N$ は右まわりを正とする)

球の進行速度が比較的遅く接触点で滑りがない状態においては

$$v = r\omega \quad (4)$$

(2), (3), (4) 式より

$$\left(M_0 + \frac{I}{r^2}\right) \frac{dv}{dt} = M g \sin \alpha + X + \frac{N}{r} \quad (5)$$

を得、球の運動が等速状態になった場合は

$$X + \frac{N}{r} = -M g \sin \alpha \quad (6)$$

になり、右辺の値が定めれば左辺の値は求まる。従つて十分助走区間を取つて等速運動になった所で種々の傾斜角について球の速度 $v$ の測定を行えば、それぞれの速度に対する流体抵抗は(6)式から算出できる。この時は

$$\frac{N}{r} = f \quad (7)$$

の関係にあることも(3)式より明かである。

しかし(6)式の左辺の第1項と第2項の割合は

\* 昭和28年6月1日機械学会宇部地方講演会にて講演

以上のような方法では求めることが困難なので便宜上一緒にして

$$X + \frac{N}{r} = F \quad (8)$$

と置くことにする。すなわち接触点において滑

りがない場合はこのFなる値の流体抵抗についてのみ仕事が行なわれることになるのである。実験は第1表に示した球および流体の組合せで行った。

第1表 実験に用いた球、壁面および流体

実験番号	球			壁面		流体種類	図示記号
	種類	比重	直径cm	種類	内径cm		
1	プラスチック	1.2	0.0244	ガラス管	2.0	空気	○
2	〃	〃	0.0289	〃	〃	〃	□
3	〃	〃	0.0329	〃	〃	〃	△
4	〃	〃	0.0372	〃	〃	〃	×
5	鋼	7.8	0.0500	〃	3.0	スピンドル油	●
6	〃	〃	0.0690	〃	〃	〃	■
7	〃	〃	0.1017	〃	〃	〃	▲
8	〃	〃	0.3165	〃	6.5	〃	⊙
9	〃	〃	0.7923	〃	〃	〃	◻
10	ガラス	2.5	1.741	ガラス板	∞	水	▲
11	ピンポンボール	0.072	3.80	〃	〃	空気	⊙

小球としてプラスチック球（アクリコン）および鋼球（ボールベアリング用）を用い直径の測定は座標測定器（島津製）によつたが、いづれも精度の高い真球状のものである。直径のやや大なるものとして市販のガラス球およびピンポン球を用いた。比較実験により管径と球径の比が十分大であれば流体抵抗は平板の場合と測定誤差の範囲で一致することを確認したので上記のやや大径のもの以外は装置の都合上球径に応じて表示した内径のガラス管を用いたがいづれも多数の中より真直なものを選び、表面の清浄には特に注意した。傾斜角  $\alpha$  は微動装置を用い精密に調整し、温度変化を極力防ぐためスピンドル油の場合は特に定温水槽中に漬して油温を一様に保つた状態で測定を行い、粘性測定は Ostwald 粘度計によつた。測定区間は十分な助走距離の後に速度に応じて10~100cmに取り、計時は0.1秒刻みのストップウォッチにより同一測定を三回づつ繰返して平均値を取つた。

## II. 実験結果および考察

測定結果より得られた  $v$  と  $F$  の関係を基にして

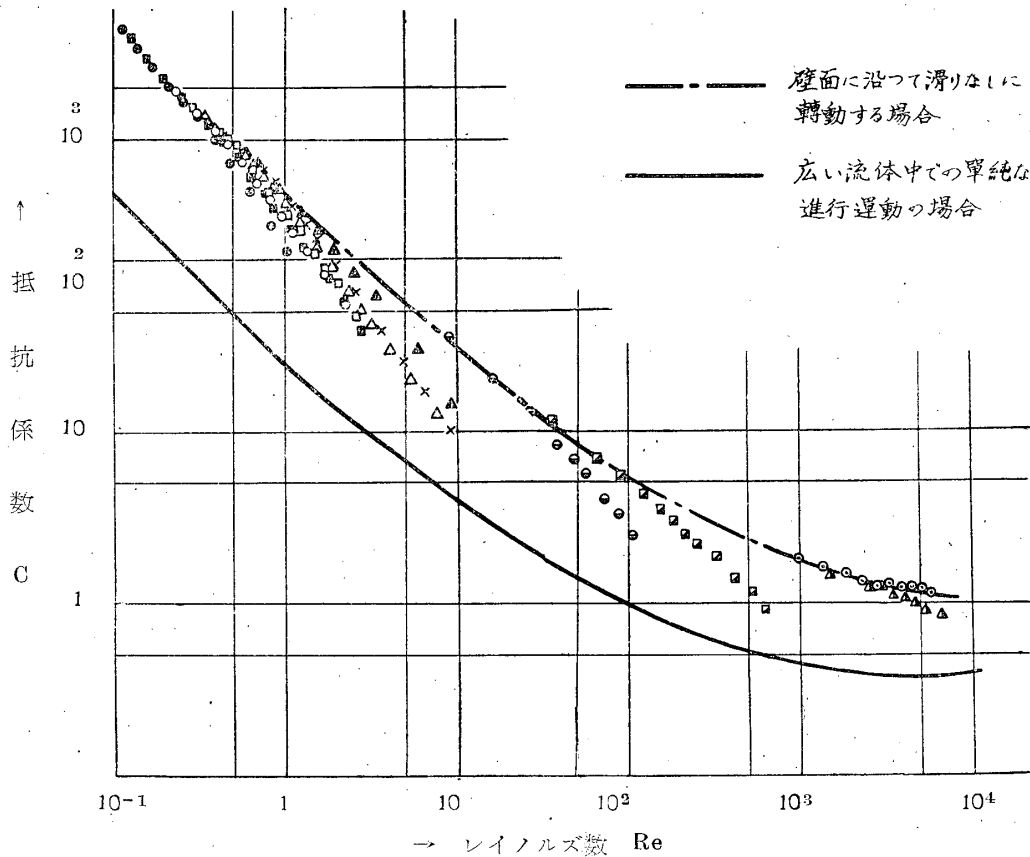
$$C = F / (\pi r^2 \rho \frac{v^2}{2}) \quad (9)$$

なる関係式で定義される一種の抵抗係数  $C$  を計算して、これを

$$Re = \frac{vd}{\nu} \quad (10)$$

$d$  = 球の直径,  $\nu$  = 流体の動粘性係数)

なるレイノルズ数で整理して対数線図で表わしてみると第2図のようになる。すなわち  $Re < 1$  の範囲ではどの曲線も  $Re$  の低い間は  $C$  の値は広い流体中での進行運動の場合の Stokes の抵抗係数の線にほぼ平行な直線になり、従つて  $F$  の値は  $v$  に比例している。しかも球径、流体の種類が異つていてもかかわらず  $C$  の値は大体同一直線上に集つて来る。しかし  $Re$  が増すにつれて各球とも  $C$  の値は直線より逸脱して小になつて来るが、これは球と壁面との接触点における摩擦力が流体抵抗によるモーメントを支えることができなくなつて滑りを生じ、(4) 式の関係が破れ  $v > r\omega$  となるためである。すなわち球の進行速度  $v$  が増しても回転速度  $\omega$  がそれにともなつて増加せず、このための抵抗の減少がこの際生ずる接触点での若干の動摩擦を補つてもなお滑りが無いとした場合に比して抵抗係数の値を小にしているものと考えられる。直線より外れる点が球と流体の同一種類の組合せでは球径の大なるものほど  $Re$  の大なる方に移行し、また乾摩擦である空気の場合ははつきりした折点が出て来るが潤滑摩擦の油の場合は漸次外れて明瞭な折点が表れないなどの結果からも上記の推察は裏書きされている。



第2図 レイノルズ数と抵抗係数の関係

滑りが生じてからの抵抗は(10)式のレイノルズ数で整理するのはもともと無理であり、したがって滑りの生ずる以前の抵抗係数のみを問題にすれば前述のように Stokes の法則に対応する範囲では直線に乗り、しかもその値は Stokes のそれに比して約10倍に達することがわかる。球、壁面ともに良好な滑面であり、球の重量も僅かであるからこの場合のころがり摩擦は流体抵抗に比して省略できる程度のものである。

$Re > 1$  の場合についても各球について得られた曲線の包絡線をたどってみれば  $C$  の変化の傾向はほぼ広い流における進行運動の抵抗係数の変化に類似するようである。しかし両者の比率は  $Re$  の増加とともに次第に減じ  $Re = 5000$  では約3倍になっている。F を構成している  $X$  および  $N/r$  を実験的に別々に分離して求めることは困難であるが、 $Re < 1$  の範囲では滑りが無い場合には  $X$  と  $N/r$  の比は一定と見なして差支えないと思われるので、試みに抵抗係数曲線の折点のはつきりしているプラスチック球の結果を

用いて摩擦係数一定と言う仮定のもとに計算してみると

$$X : \frac{N}{r} \doteq 3 : 2$$

の値が得られた。

#### IV. 助走区間の検討

小球が静止状態から動き始め次第に加速されて行く助走区間においては、ころがり摩擦を省略し、滑りもないものとする、 $Re < 1$  の範囲では実験の結果

$$X + \frac{N}{r} = -av = -a \frac{dx}{dt} \quad (11)$$

( $a = \text{常数}$ )

は各瞬間において成立つ。また球であるから

$$I = \frac{2}{5} M_0 r^2 \quad (12)$$

であつて、(11), (12)式を代入して(5)式を書きかえると

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{5}{7} a \frac{dx}{dt} - \frac{5}{7} \frac{M}{M_0} g \sin \alpha = 0 \quad (13)$$

さらに

$$\left. \begin{aligned} \frac{5}{7} \frac{a}{M_0} &= A \\ \frac{5}{7} \cdot \frac{M}{M_0} \cdot g \sin \alpha &= B \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

とおくと(13)式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A \frac{dx}{dt} - B = 0 \quad (15)$$

の線型二階非斉次方程式になり、その解は

$$x = \left( \frac{C_1}{A} - \frac{B}{A^2} \right) + \frac{B}{A} t + C_2 e^{-At} \quad (16)$$

である。

初期条件として

$$t=0 : x=0, \quad \frac{dx}{dt} = 0$$

を上式に入れて積分常数を決定すると結局

$$x = \frac{B}{A} \left\{ \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{A^2} \right) (e^{-At} - 1) + t \right\} \quad (17)$$

となり、従つて

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{B}{A} \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{1}{A} \right) e^{-At} \right\} \quad (18)$$

になる。

次に  $t \rightarrow \infty$  の場合の  $v$  の終速度を  $v_t$  とすると

$$v_t = \frac{B}{A} = \frac{Mgs \sin \alpha}{a} \quad (19)$$

$$\frac{v}{v_t} = \phi$$

とおき、(17)、(18)式より  $t$  を消去して整理すると

$$x = \frac{v_t}{A} \left[ \frac{1}{A} + \log_e \left( 1 - \frac{1}{A} \right) - \left\{ \phi + \log_e (1 - \phi) \right\} \right] = f(\phi) v_t \quad (20)$$

この関係式を用いて実験より求められた  $a$  の値を代入して、 $\phi=0.99$  に達する  $f(\phi)$  の値を求めてみると第1表の(4)および(7)の実験番号についてはそれぞれ 0.237, 0.033 になり、この場合  $v_t$  は毎秒数 cm 程度までであつたから短い助走区間で速かに定速に達することがわかる。

$Re > 1$  の範囲については(11)式が成立たな

くなるので実験結果の抵抗係数の値を用いて逐次計算を行う必要がある。

## V. 結 論

$Re < 1$  の範囲で完全な粘性流として取扱つても理論的には解析のきわめて難しい問題であるが、実験的には簡単な方法により、なされた仕事の関係から(8)式で示された一種の総合力を求めることができ、これを基にして計算した抵抗係数は Stokes のそれよりも遙かに大になることが判つた。実験は便宜上壁面としてガラス管を多く用いたが、球との直径比の大なる場合は平面と見なしても抵抗係数はほとんど差異はないものと考えられる。そして(8)式の中で球の中心に作用する抵抗力  $X$  と抵抗モーメントによる  $N/r$  とを分離することは球と壁面の間に滑りがない場合は簡単な仮定のもとに一応行うことができるが、なお研究の余地があり、一方壁面に垂直方向の力  $Y$  の大きさも興味ある問題である。 $Re > 1$  の範囲も若干の資料を得、抵抗係数は単純な進行運動の場合の変化と類似することを確かめたが、より高いレイノズル数についての状況は不明である。また壁面と球の間に滑りを生じた場合の流体抵抗なども将来に残された未解決の問題であり逐次解明して行きたい。

本研究は文部省科学研究助成補助金による研究の一部であり、種々助言を賜つた東京工大板谷教授ならびに実験に協力して頂いた河村、湯野、山本、三住の諸君に感謝する。

## 参 考 文 献

- (1) J. Maccoll; J. Roy. Aero. Soc., 32(1923) p. 770.  
谷一郎; 科学, Vol. 20, No. 9 p.405.  
二宮市三; 名古屋大学工学部研究報告, N-2(1951) p. 139.  
岩崎, 福田; 九州大学工学部彙報, Vol. 4, No. 24. p. 150.