

薄肉遊星歯車の円環部のたわみの理論解析

石田 武*・日高 照晃*・三上 孝弘**・滝沢 秀晴***

Theoretical Analysis of the Deflection along Line of Action of Planet Gear with Thin Rim

By Takeshi ISHIDA, Teruaki HIDAKA, Takahiro MIKAMI
and Hideharu TAKIZAWA

Abstract

A planet gear with a thin rim, which has a small radial clearance between the rim and a planet gear shaft, is chosen as the subject of study. Both the fillet stress and the stiffness along the line of action of the planet gear which have been little clarified until now have to be estimated for designing the bending strength of planet gear. A theoretical method of obtaining nominal stresses in the rim was shown to estimate the fillet stress by using an equivalent ring whose bending stiffness was equal to that of the planet gear after a theoretical method of determining the magnitude of a region where the rim is in contact with the gear shaft was shown in the previous report. In this report, a theoretical method of obtaining the radial, circumferential and angular displacements at an arbitrary position in the equivalent ring of the planet gear is shown considering the condition of contact between the rim and the gear shaft. Further, a method of translating the displacements of the equivalent ring to those along the line of action in order to obtain the total deflection of the planet gear along the line of action which is composed of both the deflection of tooth and that of rim.

1. 緒言

歯車の曲げ強度設計時には歯元応力や作用線方向のばねこわさが明らかでなければならない。遊星歯車装置では、内歯車や遊星歯車に円環部の薄い薄肉歯車を用い、荷重配分の均一化をはかることがしばしば行われる。薄肉歯車の歯元応力や作用線方向のばねこわさは、円環部の変形の影響を受け、厚肉歯車の場合⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾と異なるが、薄肉内歯車の歯元応力や作用線方向のばねこわさに関してはいくつかの研究がある⁽⁵⁾⁻⁽⁹⁾。軸すきまを伴う薄肉遊星歯車では、遊星歯車円環部と歯車軸との接触領域が歯面荷重や軸すきまによって変化するため、歯元応力や作用線方向たわみが歯面荷重に比例せず、さらに軸すきまによって異なる。このため、軸すきまを伴う薄肉遊星歯車の歯元応力や作用線方向

たわみに関しては、解析が薄肉内歯車の場合より複雑であり、研究例も少なく、不明な点が多い。一方、著者ら⁽¹⁰⁾は、軸すきまを伴う薄肉遊星歯車の歯元応力を明らかにするため、等価円環⁽¹¹⁾と薄肉円環の理論を用いて、円環部と歯車軸との接触領域や円環部の公称応力を求める方法を示し、公称応力の計算結果が光弾性実験結果とよく一致することを示している。

そこで本報では、先の報告⁽¹⁰⁾と同様に等価円環と薄肉円環の理論を用い、円環部と歯車軸との接触領域がわかった場合に、薄肉遊星歯車の円環部の半径方向変位、接線方向変位、断面の傾き角求める方法を示し、これらの変位を作用線方向に換算して薄肉遊星歯車の作用線方向たわみを求める方法を示した。

2. 遊星歯車の解析モデル

解析に際しては、先の報告と同様に、Fig. 1 に示すように、円環部厚さ h の遊星歯車のかわりに厚さ h_e の等価円環を用い、歯車荷重 P_n を、半径 r_e の等価円環中心線上における半径方向力 P_{cr} と接線方向力 P_{ct} および

*生産機械工学科

**生産機械工学専攻

***三菱自動車㈱

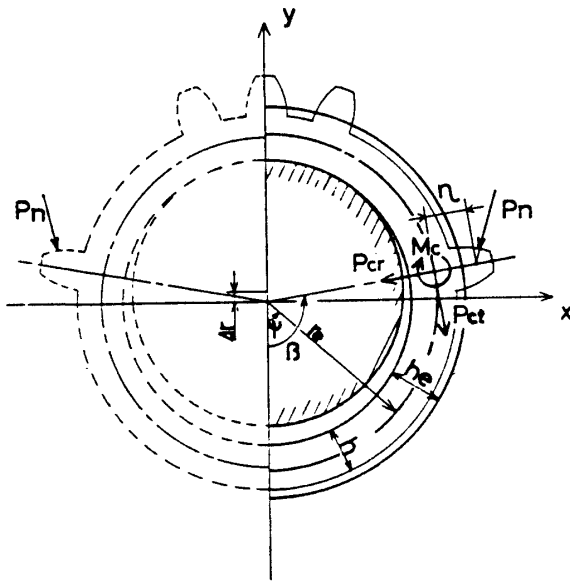


Fig.1 Schema of planet gear and equivalent ring

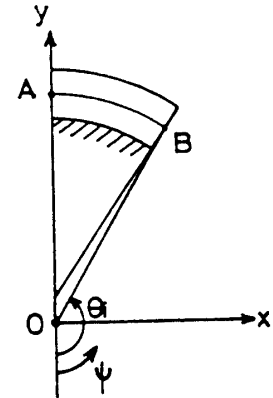


Fig.3 Region where the rim is in contact with the gear shaft

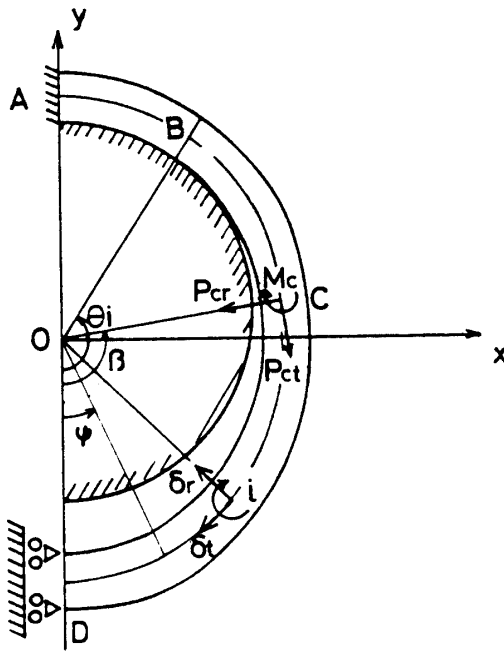


Fig.2 Curved beam model used

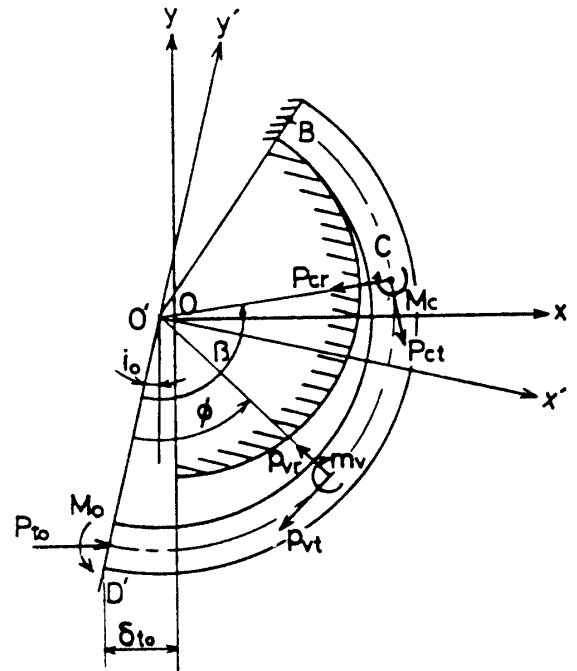


Fig.4 Region where the rim is out of contact with the gear shaft

等価円環中心線からの荷重点の高さ η と接線方向力 P_{ct} によるモーメント $M_c (= P_{ct}\eta)$ に置き換える。さらに Fig. 2 に示すように、全体の1/2部分を考え、 $\beta \leq \psi \leq \pi$ の範囲で円環部と歯車軸とが面接触する場合を取り扱うことにする。ここで、荷重を受ける歯の位置を $\psi = \beta$ で示す。また、面接触する領域 $\theta_i \leq \psi \leq \pi$ と面接触し

ない領域 $0 \leq \psi \leq \theta_i$ の二つの部分に分け、これらの部分を Fig. 3, Fig. 4 のような曲りはりとして取り扱い、それぞれ遊星歯車円環部の半径方向変位、接線方向本位、断面の傾き角を求めることにした。なお、等価円環を用いての解析に際しては、薄肉円環の理論が成り立つものと仮定した。

3. 接触領域の大きさ⁽¹⁰⁾

以下の説明では、遊星歯車円環部と歯車軸とが面接触する領域を接触領域、面接触しない領域を非接触領域とよぶことにする。

接触領域における曲げモーメント M は一定となり、式(1)で表される。ただし、曲げモーメントは等価円環の曲率を大きくする場合を正とする。

$$M = \frac{1}{EI_e} \left(\frac{1}{r_e - \Delta r} - \frac{1}{r_e} \right) \dots\dots\dots(1)$$

ここで、 E は縦弾性係数、 Δr は半径軸すきまを示し、 I_e は等価円環の断面二次モーメントを示す。

また、 $\theta_1 \leq \psi \leq \pi$ の範囲が接触領域であると仮定すれば、接触領域と非接触領域との境界 $\psi = \theta_1$ における曲げモーメントは、C断面における力とモーメント P_{cr} , P_{ct} , M_c およびD端における力とモーメント P_{to} , M_o を用いて次のように表される。

$$M = -M_o - P_{to}r_e(CO - C4) + M_c + P_{ct}r_e(I - C3) + P_{cr}r_eS3 \dots\dots\dots(2)$$

ただし、 $C0, C1 \dots$ は三角関数を表す記号であり、まとめて Table 1 に示す。また、 M_o や P_{to} は式(3)に示すような大きさとなる。

$$\left. \begin{aligned} P_{to} &= \frac{EI_e}{r_e^2 J} \{ -\theta_1 K + r_e(\theta_1 \cdot C0 - S4 - S0)L \} \\ M_o &= \frac{EI_e}{r_e^2 J} \left\{ (-\theta_1 \cdot C0 + S4 + S0) \frac{K}{r_e} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{S4 \cdot C4}{2} + \frac{S0 + C0}{2} + \theta_1 \cdot C0^2 - 2S4 \cdot C0 - 2S0 \cdot C0 \right) L \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

式(3)中の J, K, L を式(4)に示す。

$$\left. \begin{aligned} J &= \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_1}{2} (S4 \cdot C4 + S0 \cdot C0) - (S0 + S4)^2 \\ K &= \delta_{i0} + \left(\frac{r_e}{EI_e} \right) (a_{k1} M_c r_e + a_{k2} P_{ct} r_e^2 + a_{k3} P_{cr} r_e^2) \\ L &= i_0 + \left(\frac{r_e}{EI_e} \right) (a_{l1} M_c + a_{l2} P_{ct} r_e + a_{l3} P_{cr} r_e) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

式(4)における係数 $a_{k1} \dots, a_{l1} \dots$ を Table 2 に示す。また、 i_0 と δ_{i0} を式(5)に示す。

$$\left. \begin{aligned} i_0 &= \frac{\Delta r (\pi - \theta_1)}{r_e - \Delta r} \\ \delta_{i0} &= (r_e + \Delta r) \sin \left\{ \frac{\Delta r (\pi - \theta_1)}{r_e - \Delta r} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

Table 1 Symbols of trigonometrial functions

$S0 = \sin i_0$	$CO = \cos i_0$
$S1 = \sin(\beta - \Psi)$	$C1 = \cos(\beta - \Psi)$
$S2 = \sin(\theta_1 - \Psi)$	$C2 = \cos(\theta_1 - \Psi)$
$S3 = \sin(\theta_1 - \beta)$	$C3 = \cos(\theta_1 - \beta)$
$S4 = \sin(\theta_1 - i_0)$	$C4 = \cos(\theta_1 - i_0)$
$S5 = \sin(i_0 - \Psi)$	$C5 = \cos(i_0 - \Psi)$
$S6 = \sin \theta_1$	$C6 = \cos \theta_1$
$S7 = \sin \beta$	$C7 = \cos \beta$

Table 2 Coefficients in Eq. (4)

a_{k1}	$(C6 - C7)SO + (\theta_1 - \beta - S6 + S7)CO$
a_{k2}	$\{ C6 - (3/4)C7 + (1/2)(\theta_1 - \beta)S7 + (1/4)(S3 + S6 - C3, C6) \} SO + \{ \theta_1 - \beta - S3 - S6 + (3/4)S7 + (1/2)(\theta_1 - \beta)C7 + (1/4)(S3, C6 - C3, S6) \} CO$
a_{k3}	$\{ - (1/4)S7 - (1/2)(\theta_1 - \beta)C7 + (1/4)(S3 \times C6 + C3, S6) \} SO + \{ -C3 + 1 + (1/2)(\theta_1 - \beta)S7 + (1/4)C7 + (1/4)(C3, C6 - S3, S6) \} CO$
a_{l1}	$\theta_1 - \beta$
a_{l2}	$(\theta_1 - \beta) - S3$
a_{l3}	$1 - C3$

式(1)の曲げモーメントと式(2)の曲げモーメントは当然等しくなければならないので、この条件から接触領域の大きさが決定できる。

4. 等価円環の半径方向変位、接線方向変位、断面の傾き角

4.1 接触領域における等価円環の半径方向変位、接線方向変位、断面の傾き角

接触領域においては、Fig. 3のA軸を固定した状態で、等価円環の中心線半径が r_e から $r_e - \Delta r$ に変化するので、半径方向変位 δ_r 、接線方向変位 δ_t 、断面の傾き角 i は幾何学的に求まり、式(6)のように表される。ただし、 δ_r, δ_t, i は Fig. 2 に示す矢印の向きを正とする。

$$\left. \begin{aligned} \delta_r &= -(r_e - \Delta r) \cos i_0 + r_e - \Delta r \cos(\pi - \psi) \\ \delta_i &= (r_e - \Delta r) \sin i_0 - \Delta r \sin(\pi - \psi) \\ i &= \frac{\Delta r (\pi - \psi)}{r_e - \Delta r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

4.2 非接触領域における等価円環の半径方向変位, 接線方向変位, 断面の傾き角

非接触領域における各変位を求める際, Fig. 4 に示すC断面やD端に力やモーメントが作用せずにB端が歯車軸に接することのみによる変位と, B端が歯車軸に接した後, C断面やD端に力やモーメントが作用することによる変位の二つに分けて解析することにした. またB端が歯車軸に接した後, C断面やD端に力やモーメントが作用することによる変位を求める際は, Fig. 4 に示す0'x'y'座標系において, 等価円環の任意の角度位置 ψ に仮想の荷重 p_{vt} , p_{vr} とモーメント m_v を作用させてエネルギー法を用いることにした. Fig. 4 に示したC断面における力とモーメント P_{cr} , P_{ct} , M_c およびD端における力とモーメント P_{to} , M_o による曲げモーメントは次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \psi \leq \beta \text{ では} \\ M &= -M_o - P_{to} r_e (CO - C5) \\ \beta \leq \psi \leq \theta_1 \text{ では} \\ M &= -M_o - P_{to} r_e (CO - C5) + M_c \\ &\quad + P_{ct} r_e (1 - C1) - P_{cr} r_e S1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

一方, 仮想の荷重 p_{vt} , p_{vr} とモーメント m_v による曲げモーメントは次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \psi \leq \phi \text{ では} \\ M &= 0 \\ \phi \leq \psi \leq \theta_1 \text{ では} \\ M &= m_v - p_{vr} r_e \sin(\psi - \phi) \\ &\quad + p_{vt} r_e \{1 - \cos(\psi - \phi)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

したがって, 式(7)と式(8)を加算すれば, C断面やD端に力とモーメントが作用し, さらに仮想の荷重やモーメントが作用する場合の曲げモーメントが求まる.

式(7), 式(8)より, 等価円環の全ひずみエネルギーUを

$$U = \frac{r_e}{2EI_e} \int_0^{\theta_1} M^2 d\psi \dots\dots\dots(9)$$

によって求め,

Table 3 Coefficients in Eq. (11)

	$0 \leq \psi \leq \beta$	$\beta \leq \psi \leq \theta_1$
br_1	$C1 - C2$	$1 - C2$
br_2	$-(C2, S3 + S2, C3)/4 - S1/4 + (\theta_1 - \beta)C1/2$	$-(C2, S3 + S2, C3)/4 + S1/4 + (\theta_1 - \psi)C1/2$
br_3	$(-S2, S3 + C2, C3)/4 - C2 + 3C1/4 + (\theta_1 - \beta)S1/2$	$(-S2, S3 + C2, C3)/4 + 1 - C2 - C1/4 + (\theta_1 - \psi)S1/2$
br_4	$-1 + C2$	
br_5	$-(C2, C4 - S2, S4)/4 - CO + CO, C2 + C5/4 - (\theta_1 - \psi)S5/2$	
bt_1	$(\theta_1 - \beta) - S2 - S1$	$(\theta_1 - \psi) - S2$
bt_2	$(-S2, S3 + C2, C3)/4 - C3 + 1 - C1/4 - (\theta_1 - \beta)S1/2$	$(-S2, S3 + C2, C3)/4 - C3 + 3C1/4 - (\theta_1 - \psi)S1/2$
bt_3	$(C2, S3 + S2, C3)/4 - S3 - 3S1/4 - S2 + (\theta_1 - \beta)(1 + C1/2)$	$(C2, S3 + S2, C3)/4 - S3 - S2 + 3S1/4 + (\theta_1 - \psi)(1 + C1/2)$
bt_4	$-(\theta_1 - \psi) + S2$	
bt_5	$-(S2, C4 + C2, S4)/4 - CO, S2 + S4 - 3S5/4 - (\theta_1 - \psi)(CO + C5/2)$	
bi_1	$\theta_1 - \beta$	$\theta_1 - \psi$
bi_2	$1 - C3$	$C1 - C3$
bi_3	$(\theta_1 - \beta) - S3$	$(\theta_1 - \psi) - S3 + S1$
bi_4	$-\theta_1 + \psi$	
bi_5	$-(\theta_1 - \psi)CO + S4 - S5$	

$$\left. \begin{aligned} \delta_r' &= \left(\frac{\partial U}{\partial p_{vr}} \right)_{m_v = p_{vr} = p_{vt} = 0} \\ \delta_t' &= \left(\frac{\partial U}{\partial p_{vt}} \right)_{m_v = p_{vr} = p_{vt} = 0} \\ i' &= \left(\frac{\partial U}{\partial m_v} \right)_{m_v = p_{vr} = p_{vt} = 0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

とおけば、0'x'y'座標系における非接触領域の半径方向変位 δ_r' 、接線方向変位 δ_t' 、断面の傾き角 i' が得られる。得られた結果を角度 ψ に対して式(11)に示す。

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta_r' \\ \delta_t' \end{pmatrix} &= \frac{r_e}{EI_e} \left\{ \begin{pmatrix} b_{r1} \\ b_{t1} \end{pmatrix} M_c + \begin{pmatrix} b_{r2} \\ b_{t2} \end{pmatrix} P_{cr} r_e \right. \\ &\quad + \begin{pmatrix} b_{r3} \\ b_{t3} \end{pmatrix} P_{ct} r_e + \begin{pmatrix} b_{r4} \\ b_{t4} \end{pmatrix} M_o \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} b_{r5} \\ b_{t5} \end{pmatrix} P_{to} r_e \right\} \dots\dots\dots(11) \\ i' &= \frac{1}{EI_e} (b_{11} M_c + b_{12} P_{cr} r_e + b_{13} P_{ct} r_e \\ &\quad + b_{14} M_o + b_{15} P_{to} r_e) \end{aligned} \right\}$$

ここで b_{r1} , b_{t1} , b_{i1} は角度位置 ψ によって決まる定数であり、これを Table3 に示す。

一方、Fig.4 に示したように、C 断面や D 端に力やモーメントが作用しないで、B 端が歯車軸に接することによる半径方向変位 δ_r'' 、接線方向変位 δ_t'' 、断面の傾き角 i'' は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \delta_r'' &= -r_e \cos i_0 + r_e + \Delta r \cos(\theta_1 - i_0 - \psi) \\ &\quad - \Delta r \cos(\pi - \psi) \\ \delta_t'' &= r_e \sin i_0 - \Delta r \sin(\theta_1 - i_0 - \psi) - \Delta r \sin(\pi - \psi) \\ i'' &= i_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

したがって、等価円環の非接触領域 $0 \leq \psi \leq \theta_1$ における半径方向変位 δ_r 、接線方向変位 δ_t 、断面の傾き角 i は次式によって求められる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_r &= \delta_r' + \delta_r'' \\ \delta_t &= \delta_t' + \delta_t'' \\ i &= i' + i'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

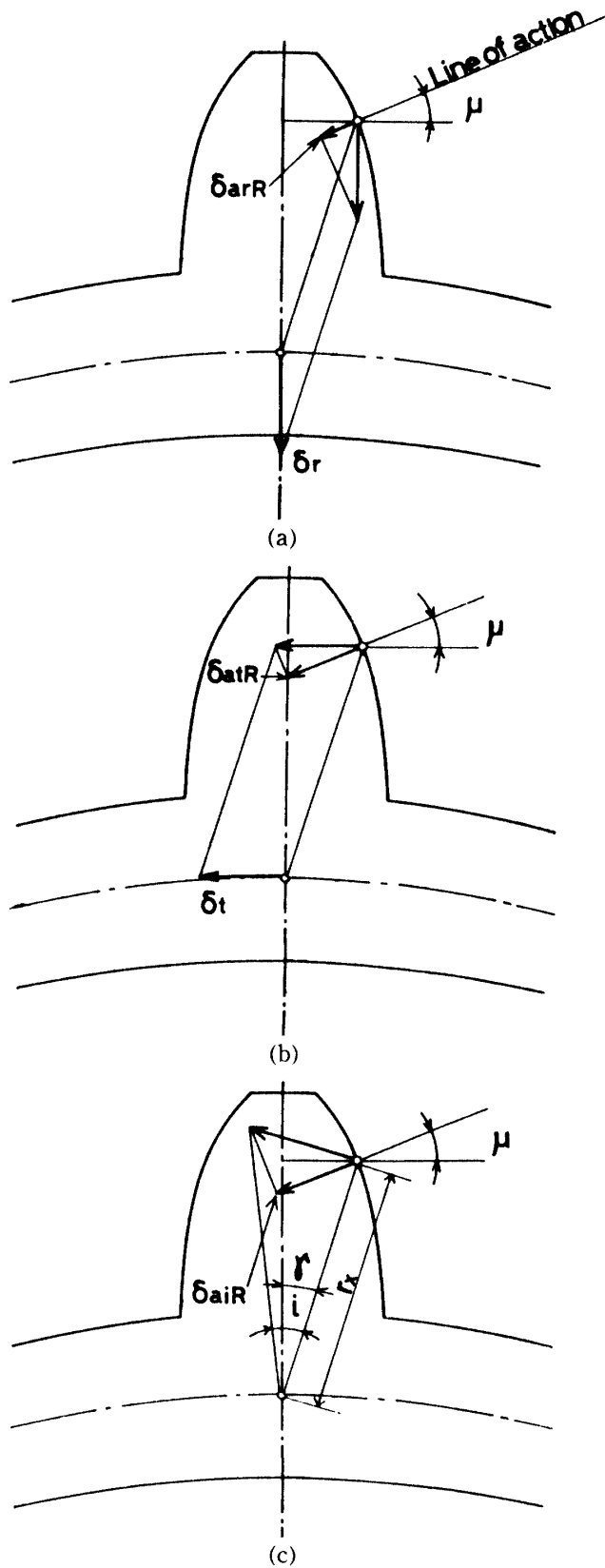


Fig.5 Translation of displacements of the equivalent ring to the deflection along line of action

5. 各変位の作用線方向への換算

式(6), 式(13)で示される等価円環の各変位を, Fig. 5 に示したように, 歯形中心線と等価円環中心線との交点の変位で代表させると, 式(14)により, 近似的に半径方向変位による作用線方向たわみ δ_{orR} , 接線方向変位による作用線方向たわみ δ_{atR} , 断面の傾き角による作用線方向たわみ δ_{aIR} を求めることができる.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{orR} &= \delta_r \sin \mu \\ \delta_{atR} &= \delta_t \cos \mu \\ \delta_{aIR} &= ir_x \cos(\mu + \gamma) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

ただし, μ は歯形中心線に対する垂線と作用線のなす角を示し, r_x は等価円環中心線と歯形中心線との交点から, 対象とする歯の歯面と作用線の交点までの距離を示す. また γ は等価円環中心線と歯形中心線の交点を中心とし, 対象とする歯面上の位置の歯形中心線に対する角度である. 式(14)を用いると, 薄肉遊星歯車の円環部の変位による作用線方向たわみ δ_{aR} は次式によって求めることができる.

$$\delta_{aR} = \delta_{orR} + \delta_{atR} + \delta_{aIR} \dots\dots\dots(15)$$

一方, 薄肉歯車の作用線方向たわみは歯のたわみと円環部のたわみの和と考えることができるので, 文献(2)~(4)などにより歯のたわみ δ_{aT} を求めると, 軸すきまを伴う薄肉遊星歯車の作用線方向たわみ δ_a を次式によって求めることができると考えられる.

$$\delta_a = \delta_{aR} + \delta_{aT} \dots\dots\dots(16)$$

6. 結言

本報では薄肉遊星歯車を等価円環に置き換え, 軸すきまを伴う場合における薄肉遊星歯車円環部の作用線方向たわみを理論的に求める方法を示し, このたわみに歯の作用線方向たわみを加算して, 軸すきまを伴う薄肉遊星歯車の作用線方向たわみを求める方法を示した.

参考文献

- (1) 会田・寺内：機論, 27-178, 868 (1968).
- (2) 藤井・ほか2名：機講論, No.780-2, 175 (1978).
- (3) 寺内・ほか2名：機論, 46-406, C, 649 (1980).
- (4) Weber, C. und Banaschek, F. : Formänderung und Profilrücknahme bei gerad- und schräg-verzahnern Rädern, Fried. Vieweg und Sohn, (1955)
- (5) 日高・ほか2名：機論, 49-441, C, 803, (1983)
- (6) 日高・ほか2名：精密機械, 49-5, 617, (1983)
- (7) 日高・ほか2名：機論, 50-454, C, 1032, (1984)
- (8) 鄭・ほか3名：機論, 49-442, C, 1038, (1983)
- (9) 石田・ほか2名：精密機械, 51-2, 385 (1985)
- (10) Ishida, T., et al., Tech. Prport of Yamaguchi Univ. 3-5, (1986).
- (11) Sinkevich Yu, B. and Sholomov, N. M., Russ. Eng. J., 51-6, 25 (1971).

(昭和61年10月15日受理)