

河床の変動について

椿 東一郎, 斉 藤 隆

1. 緒 言

山腹や河床から流出した土砂は、土砂を輸送する能力のないところでは堆積し、逆に輸送能力の大きいところでは浸蝕が行なわれる。このような河床の変動は流路延長にそって流砂量の差異に起因するものであるから、流砂量の変化による河床高の変化の式と流れの式とによって規定される。これらの式から、A. S. Harrison¹⁾ は貯水池における土砂堆積の過程を論じ、岩垣博士²⁾ は特性曲線表示による河床変動の解析方法を提案した。また杉尾氏³⁾ は貯水池の埋没に関する実験を行い、段丘の生成について興味深い現象を報告している。

さて Harrison や岩垣博士の方法を用いると、河床変動を原理的には追跡することはできるが、計算がきわめて複雑であって個々の例からその一般的な性質を把握することは困難である。しかしながら、著者は基礎式を適当に無次元化すると、河床変動は少数のパラメーターに規定され、とくに実際河川に多くみられるように Froude 数が小さくまた掃流力が限界掃流力にくらべて大きい場合には、無次元化された河床変動量 ξ は、初期条件のほかには、無次元時間 τ 及び距離 ξ だけの関数として表わされることを知った。したがって、この表示法により河床変動を支配する要素が明らかとなり、さらに簡単な初期条件のもとでは、河床の初期変形や変動の時間的経過を定量的に求め、多くの自然河川に適用できる基本的な図表をつくることのできる。

2. 河床変動に関係する要素

河床の変化による水流の時間的変化は非常に緩慢であるから非定常項を無視すると、流量を Q 、河巾を B として流れの連続の式、運動の式は次のようになる。

$$Bh\bar{u} = Q \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{dh}{dx} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{u}^2}{2g} \right) - I_* + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{u_*^2}{gh} = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

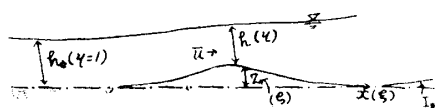
上式の記号は図-1 に示した通りであって、 I_* は基準面の勾配、 u_* は摩擦速度、 z は基準面から測った河床の高さである。また x 軸は河床にそって流れ方向にとる。

単位巾、単位時間あたりの流砂量は、不等速流の場合にも近似的に等流の場合の関係式がなりたつものと仮定して、次の形におく。

$$\frac{q}{\sqrt{sgD^3}} = K(\Psi_e - \Psi_c)^m, \quad \Psi_e = \frac{u_*^2}{sgD} \cdot \frac{\varphi}{\varphi_0} \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 s 、 D は河床砂の水中比重及び粒径、 Ψ_c は限界掃流力の無次元表示、 φ 及び φ_0 はそれぞれ次式で与えられる。

図-1



$$\bar{u} = \varphi u_*, \quad \varphi_0 = 6.0 + 5.75 \log \frac{h}{D}$$

また流砂の連続の式は空隙率 λ を 100 で割って表わしたものを λ とすると

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{B(1-\lambda)} \frac{\partial(qB)}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

で与えられる。いま、 $\bar{u} = \varphi u_*$ を用いて (3) を書きかえると

$$q = \beta \left(\frac{Q}{Bh} \right)^{2m} \left[1 - \gamma \left(\frac{Bh}{Q} \right)^2 \right]^m, \quad \beta = K \frac{\sqrt{sgD^3}}{(sgD\varphi\varphi_0)^m}, \quad \gamma = \Psi_c s g D$$

で表わされるから、(4) に代入すると次式

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{2m}{1-\lambda} \beta \left(\frac{Q}{Bh} \right)^{2m} \left[1 - \gamma \left(\frac{Bh}{Q} \right)^2 \right]^m \times \\ \left[\frac{1}{2m} \frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{1}{2m} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \left\{ 1 - \frac{2m}{1 - \gamma \left(\frac{Bh}{Q} \right)^2} \right\} - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{1}{1 - \gamma \left(\frac{Bh}{Q} \right)^2} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

が得られる。また流れの式は (1), (2) より次のようになる。

$$\frac{\partial h}{\partial x} \left(1 - \frac{Q^2}{gB^2h^3} \right) - I_* + \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{Q^2}{gB^2h^3} \frac{h}{B} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{Q^2}{gB^2h^3\varphi^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

(5), (6) は河床高 z と水深 h とに関する基礎式であるが、このままの形では河床変動を規定する要素をしらべるのに不便であるから、次のような変数変換を行って無次元形に書きなおす。すなわち、基準の水深を h_* 、河巾を B_* 、基準勾配を I_* とし

$$\frac{z}{h_*} = \zeta, \quad \frac{h}{h_*} = \eta, \quad \frac{B}{B_*} = b, \quad \frac{xI_*}{h_*} = \xi, \quad \frac{\beta}{\beta_*} = \beta \quad \dots\dots\dots(7)$$

および

$$t \frac{B_*}{1-\lambda} \left(\frac{Q}{B_*h_*} \right)^{2m} 2m \frac{I_*}{h_*^2} = \tau \quad \dots\dots\dots(8)$$

とおき、基準量としては

$$\frac{Q^2}{gB_*^2h_*^3\varphi_*^2} = I_* \quad \dots\dots\dots(9)$$

を満足するようにとる。流れのなかに等流部分がある場合には、基準量としてその値を用いるのは当然であって、このときには添字 * は等流における値を表わす。なお $\beta/\beta_* = \beta$ における右辺の β は無次元量であって、混同のおそれがないからそのまま用いる。

(7), (8) により (5), (6) はそれぞれ次のように表わされる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} - A \left[\frac{\partial \eta}{\partial \xi} - FC \right] = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \dots\dots\dots(10) \\ \dots\dots\dots(11) \end{array} \right\}$$

$$A = \frac{\beta}{(b\eta)^{2m}} \frac{1}{\eta} F^{m-1}, \quad C = \frac{\eta}{2m} \cdot \frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial \xi} + \frac{\eta}{2m} \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial \xi} \left(1 - \frac{2m}{F} \right)$$

$$F = 1 - \frac{b^2\eta^2}{\eta_c^2}, \quad \eta_c = \left(\frac{Q}{B_*h_*\eta_*} \right) \frac{1}{\sqrt{sgD\Psi_c}}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \left(1 - I_* \varphi^2 \frac{1}{b^2\eta^3} \right) - 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{1}{b^2\eta^3} \left(\frac{\varphi_*^2}{\varphi} \right) - I \varphi_*^2 \frac{1}{b^3\eta^2} \frac{\partial b}{\partial \xi} = 0 \quad \dots\dots\dots(11)$$

いま、 ζ をふたつの部分にわけ

$$\zeta = \zeta_0(\xi) + \zeta'(\zeta, \tau) \quad \dots\dots\dots(12)$$

とおくと、(11) を (10) に代入して次式

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial \tau} + A \frac{1}{1 - I_* \varphi^2 \frac{1}{b^2\eta^3}} \frac{\partial \zeta'}{\partial \xi} = A \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)_0 - FC \right]$$

がえられる。上式は岩垣博士が示したように、²⁾ 次のような特性曲線で表示することができる。すなわち

$$\frac{d\xi}{d\tau} = A \frac{1}{1 - I_* \rho^2 \frac{1}{b^2 \eta^3}} \quad \text{において} \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$\frac{d\zeta'}{d\tau} = A \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)_0 - FC \right] \quad \dots\dots\dots(15)$$

したがって、河床変動の問題は (11), (13) あるいは (11), (14), (15) を与えられた初期条件： $\eta = \eta_0(\xi)$, $\zeta = \zeta_0(\xi)$ のもとにとくことに帰着する。

さてここで注意すべきことは、河巾、河床砂が与えられた河川における河床変動量の無次元表示とは、初期条件のほかには限界掃流力に対応する水深の表示 η_c および流れの Froude 数 $I_* \rho^2$ を補助的なパラメーターとし、主として無次元距離 ξ 及び時間 τ の関数として与えられることである。したがって、河床変化の実際の時間 t は (8) に (9) を代入して

$$t = \frac{1 - \lambda}{B_*} \left(\frac{B_*}{Q} \right)^{2m} \frac{1}{2m} \frac{h_*^{2m+2}}{I_*} \tau \propto h_*^{-m+2} I_*^{-(1+m)} \tau \quad \dots\dots\dots(16)$$

となる。いま Brown にならって $m = \frac{5}{2}$ とおくと⁵⁾

$$t \propto h_*^{-0.5} I_*^{-3.5} \tau$$

となる。同一の相対的変形量を与える実際の時間 t には、勾配が最も大きく関係して勾配がますます急激に減少し、水深とともに僅かに減少する。換言すれば、急勾配の河川においては河床の変形は急速に進行し、緩勾配の河川ではゆっくりと進んでゆく。また流路延長方向の変動範囲は水深に比例し、勾配に逆比例する。

3. 水面變形にともなう河床の初期変形

河床変動の一般式はその基本的な性質を把握するには複雑すぎるので、以下では河巾が一様で、河床砂の粒径および抵抗係数をあらわす ρ , ρ_0 が流路にそって変化しない場合をとり扱う。このとき ($b=1$, $\beta=1$) には、(10), (11) は次のように簡単化される。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} - \frac{1}{\eta^{2m+1}} \left(1 - \frac{\eta^2}{\eta_c^2} \right)^{m-1} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = 0 \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \frac{1 - \frac{1}{\eta^3} - \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}}{1 - I_* \rho^2 \frac{1}{\eta^3}} \quad \dots\dots\dots(11')$$

上式から水面形の変化に應ずる河床の初期変形をみつめることができる。ここでは勾配 I_* で流れていた等流の流れが $\tau=0$ の時間に自然的あるいは人為的な変化を受け、水面形が変化した場合について考える。この場合には、 $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} = 0$ であるから、上の両式より初期変形速度は

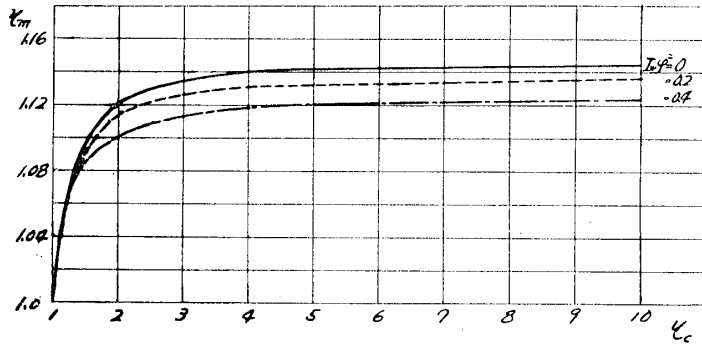
$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right)_{\tau=0} \equiv \chi = \frac{1}{\eta^{2m+1}} \left(1 - \frac{\eta^2}{\eta_c^2} \right)^{m-1} \frac{1 - \frac{1}{\eta^3}}{1 - I_* \rho^2 \frac{1}{\eta^3}} \quad \dots\dots\dots(17)$$

で与えられる。 χ は η , η_c および $I_* \rho^2$ の関数であるから、最大の初期変形を与える水深 η_m は $\frac{\partial \chi}{\partial \eta} = 0$ より次式

$$(2m+1) + 2(m-1) \frac{\eta^2}{\eta_c^2} \frac{1}{1-\frac{\eta^2}{\eta_c^2}} - \frac{3}{\eta^3} \frac{1}{1-\frac{1}{\eta^3}} + 3 \frac{I_*\varphi^2 \frac{1}{\eta^3}}{1-I_*\varphi^2 \frac{1}{\eta^3}} = 0 \dots\dots(18)$$

の根である。普通の河川では $I_*\varphi^2$ は 1 に比べて小さく、また $\eta^2/\eta_c^2 \ll 1$ なることが多いので上式の第 2 項、第 4 項を無視すると

図-2 最大堆積点における水深



$$\eta_m = \sqrt[3]{\frac{4+2m}{2m+1}} \dots(19)$$

となる。

図-2 は (18) 式を計算した結果であって、 η_m の計算値を $I_*\varphi^2$ をパラメーターとして η_c に対して示した。常流の流れ、すなわち、 $I_*\varphi^2 < 1$ の場合には $\eta > 1$ の堰上げ背水の場合だけ

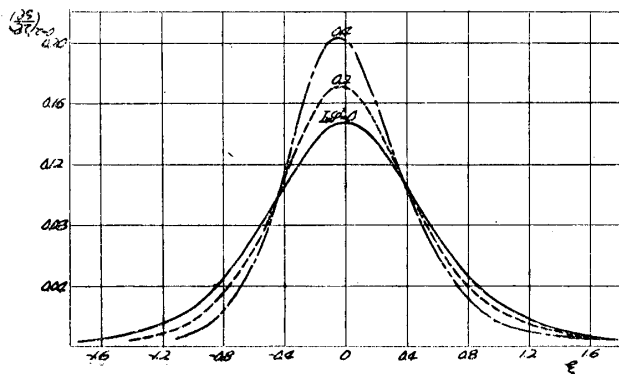
解があり、その最大値は (19) 式で与えられる $\eta_m = 1.145$ である。 η_m の値は Froude 数がますます小さくなり、また η_c がますます増加する。しかしながら、 η_c による η_m の変化は $\eta_c < 2$ のせまい領域だけで著しく、とくに η_c の値が 4 をこえると $\eta_c = \infty$ の場合とほとんど一致することは注目すべきことであろう。杉尾氏⁵⁾ は堰で水をせきあげた貯水池内における堆砂の実験において、最初に堆積の初まる点は背水の終点附近であることを示したが、これは上述の考察とよく一致している。このように堰上げ背水による堆砂は下流部の境界条件に直接の関係をもたず、背水の終点に近い $\eta_m = 1 \sim 1.145$ の水深の位置を中心として堆積することがわかる。

河床の初期変形について一般的な取扱いをするために、堰上げ背水の場合には $I_*\varphi = 0$, $\eta_c \rightarrow \infty$ のときの最大堆積点の水深、すなわち、 $\eta = 1.145$ の地点を $\xi = 0$ としめ、流れの方向に ξ 軸をとる。 $\tau = 0$ における水面形は Bresse の式

$$\xi = \eta - 1.145 - (1 - I_*\varphi^2) \left[B\left(\frac{1}{\eta}\right) - B\left(\frac{1}{1.145}\right) \right]$$

から、 ξ は η の関数として求められ、 $\left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau}\right)_{\tau=0}$ は (17) 式より η_c および $I_*\varphi^2$ をパラメーターとし ξ の関数として与えられる。図-3 は Froude 数の影響をしらべるために、 $\eta/\eta_c \ll 1$

図-3 初期堆積に及ぼす Froude 数の影響($\eta_c = \infty$)

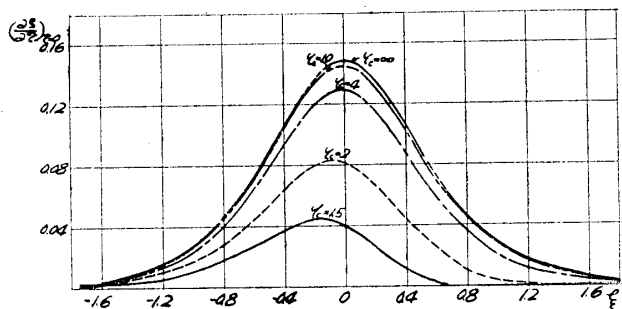


として η_c の影響を無視し、 $I_*\varphi^2 = 0, 0.2, 0.4$ の場合について計算したものである。Froude 数がますますともに、(i) η_m の変化に応じて最大堆積点は僅かながら上流に移動し、(ii) 堆積の山は大きくなり、かつとがってきて、(iii) 堆積の範囲は減少してゆくことがわかる。

図-4 は $I_*\varphi^2 = 0$ として、 η_c の影響をしらべたものである。 η_c が小さくなる程、堆積の山は上流に移動

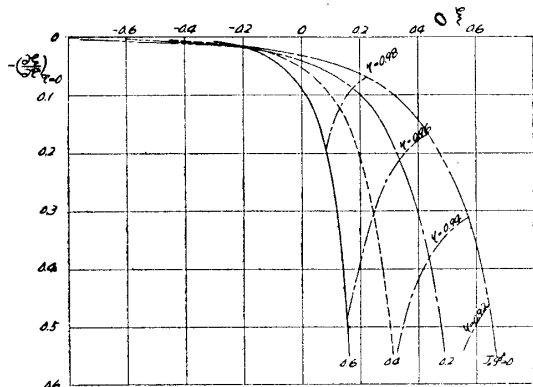
し、山の高さが減少するとともにその形は非対称度をましてくる。しかしながら、 η_c が 4 をこえると、初期堆積曲線は η_c にはほぼ無関係で $\eta_c \rightarrow \infty$ の場合に近い。

図一四 初期堆積曲線に及ぼす移動限界水深の影響 ($I_*\rho^2=0$)



より水面形をもとめ、初期洗滌量 $-\left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau}\right)_{\tau=0}$ の値を ξ の関数として求めることができる。図一五は計算結果の一部を示したものである。同図には対応する水深 η が鎖線で記入されており、

図一五 低下背水による初期洗滌 ($\eta/\eta_c \ll 1$)



流れの Froude 数 $I_*\rho^2$ と境界条件地点の水深 η_b とを与えると、流路にそう洗滌量を見積ることができる。また図から明らかなように、低下背水領域に入ると洗滌量は最初ゆるやかに増加するが、 $I_*\rho^2$ の値に応じて下流に行くに従ってきわめて急激に増大する。なお、低下背水の度合いが大きい場合の洗滌はきわめて大きいこと及び洗滌の及ぶ範囲は堰上げ背水にくらべてかなり小さいことは注意すべきことであろう。

4. 堰上げ背水による河床の変動

背水による河床の初期変形は前述のようにして容易に計算することができるが、変形の過程においては河床は水面形状に影響し、水面形は逆に河床変動を誘起するというふうに、河床は両者の相互作用のもとに変形してゆく。ここでは無次元化された河床変動の式を用い、多くの河川において許される仮定により簡単化して堰上げ背水による河床変動を追跡してみる。

流砂河川においては、 $I_*\rho^2$ は 1 にくらべて小さく、また $\eta_c \gg 1$ の場合が多いので、初期の最大堆積点附近に注目して両者の影響を無視すると、(10'), (11') 式は非常に簡単になり、流れの基礎式は次式

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 1 - \frac{1}{\eta^3} - \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \dots \dots \dots (20)$$

で与えられ、河床変動量 ξ の特性曲線表示は

$$\zeta = \zeta_0(\xi) + \zeta'(\xi, \tau)$$

とにおいて

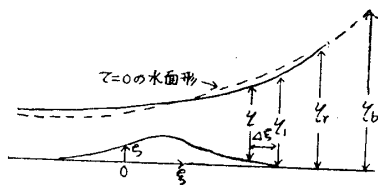
$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{1}{\eta^{2m+1}} \text{ の曲線上において} \dots\dots\dots(21)$$

$$\frac{d\zeta'}{d\tau} = \frac{1}{\eta^{2m+1}} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)_0 \dots\dots\dots(22)$$

となる。初期条件は $\tau=0$ において $\zeta_0(\xi)_{\tau=0}=0$ であり、また堰上げ背水曲線は $\tau=0$ における最大堆積点の水深 $\eta_m=1.145$ の位置を $\xi=0$ と定めると、 $\eta_0(\xi)_{\tau=0}$ は Bresse の式より下流の境界条件に無関係に、 ξ の関数として単一にきめられている。このように考えると、等流状態で流れていた河川に堰上げ背水が起った場合には、河床変動 $\zeta(=z/h_*)$ は $\xi(=xI_*/h_*)$ および $\tau(=t \frac{B_*}{1-\lambda} (\frac{Q}{B_* h_*})^{2m} 2m \frac{I_*}{h_*^2})$ だけの関数であって、堆砂が境界地点に達しない範囲では堰上げの条件には関係しない。したがって、上式を数値的に積分しその結果を図表化しておけば、実際の時間 t 、流路延長 x とその無次元表示 τ, ξ との対応をつけることにより、実際の河床変動量 z を知ることができる。

上式をとくには、 $\Delta\tau$ 時間の間は水面形はかわらないとして $\Delta\tau$ 後の堆砂厚みの増加 $\Delta\zeta$ を計算し、さらに新しい河床形状のもとに水面形を計算して、 $\Delta\tau \rightarrow 2\Delta\tau$ 間の $\Delta\zeta$ を計算すると

図-6

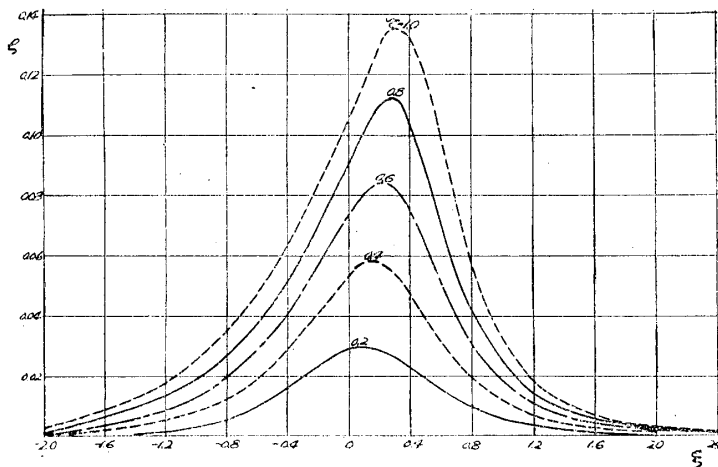


いうふうに逐次計算によらねばならない。このとき水面形を求めるには、 ζ が図-6 のようになったとすると、堆積の無視できる地点 ξ_r より下流における $\xi_b \cong \xi \cong \xi_r$ の範囲においては、水面形は $\tau=0$ におけるものと変らないから、 ξ_r における既知の水深 η_r を与えて上流側に積分すればよい。 $\eta_b \cong \eta_r$ すなわち堆積が境界条件地点に波及しない範囲

では、このようにして堆砂は境界条件に無関係にきめられる。なおこの計算においては $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$ のために (20) 式を数値的に解かねばならないが、図-6 の η_1 より $\Delta\xi$ 上流の水深をもとめるには、 $\eta = \eta_1 + \Delta\eta$ とおき、 $\Delta\xi$ 区間における平均の $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right)$ を用いた次の近似式

$$\Delta\eta = \frac{\left(1 - \frac{1}{\eta_1^3}\right) - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)_0}{3/\eta_1^4} \left(e^{-\frac{3}{\eta_1^4} \Delta\xi} - 1\right)$$

図-7 堆砂の時間的变化

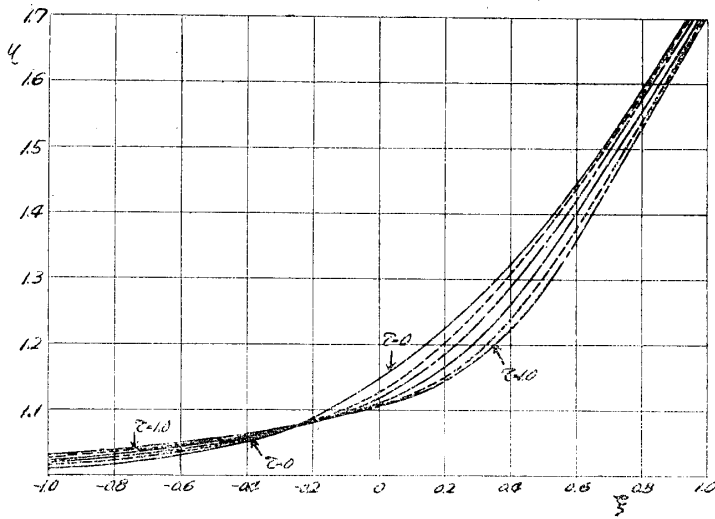


を使用した。

計算は $m=2.5$ とし、 $\Delta\xi=0.1, \Delta\tau=0.2$ ととって行った。計算の結果は、その一部を図-7 に示したように、堆積の山は時間 τ の経過とともに下流に進行しながら生長し、かつ下流側の勾配が急峻になって、遂には段丘を生ずることが予想される。

参考のために、図-8 に水面曲線の時間的变化を示し

図-8 堆砂に伴う水面形の変化



た。理由は明らかでないが、 $\xi = -0.25$ における水深は時間に無関係に原型の値を保ち、その点より下流側では流砂の堆積のために水深は浅くなり、逆に上流側では堆積によりつけ加わる堰上げ作用のために水深は増加する。上流側の水深の増加は砂の輸送能力を減少させてさらに堆砂を促進するから、図-7にみられるように、堆積は順次上流側に波及してゆく。

終りに堆砂形状のなかで、最大堆積高 ζ_m およびその進行位置について述べておく。いまかりに、水面形と河床との同調作用を無視すると河床は前にのべた初期変形の形を保って発達するが、その場合の堆積の山の高さ ζ_{m0} 及びその位置 ξ_{m0} は、 $\eta_m = 1.145$ を (21), (22) 式に代入してそれぞれ次のようになる、

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{m0} &= 0.1482\tau \\ \xi_{m0} &= 0.444\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

ζ_{m0} と ζ_m , ξ_{m0} と ξ_m との関係を図-9, 図-10に実線で示した。山の発達の割合及びその進行速度は河床と水表面との同調現象のために、時間の経過とともに減少している。なお同図は上述の相互作用の影響とともに、 ζ_{m0} , ξ_{m0} はともに τ に比例するから、堆砂の山の高さ及びその位置の時間的経過を示すものである。

図-9 堆砂の山の高さ

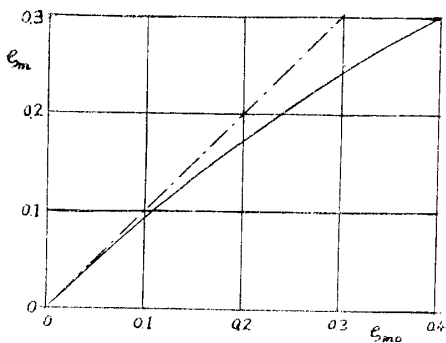
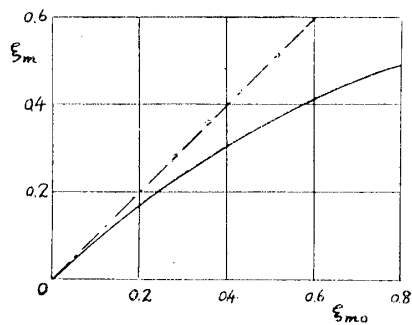


図-10 山の位置



5. 結 語

以上河床変動を規定する要素を明らかにし、水面形の変化による河床の初期変形及び堰上げ背水による変形の過程について若干の考察を加えた。なお貯水池の埋没過程においては、時間の経過とともに下流側の勾配は急峻になり、ついには海岸の波が砕けるように不連続的な段丘が形成されるが、段丘の発生、規模及び進行の模様などについては改めて論じたいと思う。

最後に本文の数値計算は当時の学生三戸完五君の労に負うところが多いことを記し、厚く謝意を表したい。

参 考 文 献

- 1) A. S. Harrison : Deposition of the Head of Reservoirs, Proc, Minnesota Inst. Hyd. Convention, I. A. H. R., 1953.
- 2) Y. Iwagaki : On the River-Bed Variation and its Stability, Proc. 6th National Congress for App. Mech., 1956.
- 3) 杉尾捨三郎 : 垣上流の堆砂現象に関する実験, 土木学会誌, 38卷11号, 昭 28.
- 4) 杉尾捨三郎 : 垣上流の堆砂に関する解析的研究, 土木学会論文集, 32号, 昭 31.
- 5) H. Rouse : Engineering Hydraulics, p. 799.