

半円状母線と直線状母線間の相互インダクタンス (IV)

武平 信夫* 小出 幸男** 小谷 雅士***

Mutual Inductance between the Semicircular Bus and the Straight Bus (IV)

Nobuo TAKEHIRA*, Yukio KOIDE** and Masashi KOTANI***

Abstract

Mutual inductance between the semicircular bus and the straight bus was calculated. The authors developed their previous papers. The results are graphed.

1. 緒 言

ひきつづき半円状母線と直線状母線の相互インダクタンスを算出した¹⁾²⁾³⁾。本稿では文献2の場合を二次元的に拡張した場合を解析している。計算方法も文献2とほとんど同一である。

3. 相互インダクタンスの算出

Fig. 1のように $d\mathbf{l}_1$, $d\mathbf{l}_2$ それぞれ直線状母線, 半円状母線の線素ベクトルとすると, そのスカラー積は

$$d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = dl_1 dl_2 \sin\theta = r \sin\theta d\theta dl_1 \quad (1)$$

また $d\mathbf{l}_1$, $d\mathbf{l}_2$ 間の距離 R は

$$R = \sqrt{(l - l_1 + p + r - r \cos\theta)^2 + m^2 + r^2 \sin^2\theta} \quad (2)$$

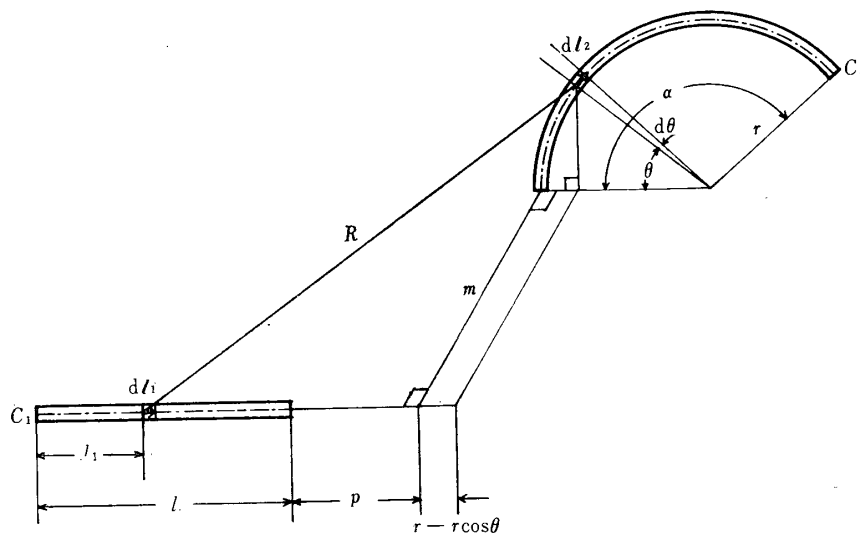


Fig. 1 Arrangement of two conductors

2. 導体配置 (Fig. 1 参照)

直線状母線と, 半円状母線の直線状母線に近い一端とその中心とを結ぶ直線を含む平面は, 半円状母線を含む平面と互に直交する。はじめはより一般的に円弧状母線と直線状母線の相互インダクタンスを解析し, その特別な場合として半円状母線を取り扱う。

したがって相互インダクタンス M は, Neumann の公式によりつぎの二重積分で示される。

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\alpha \int_0^l \frac{r \sin\theta d\theta dl_1}{\sqrt{(l - l_1 + p + r - r \cos\theta)^2 + m^2 + r^2 \sin^2\theta}} \quad (3)$$

l_1 をつぎのように変数変換し x について積分する。

$$\left. \begin{aligned} l \\ l - l_1 + p + r - r \cos\theta = x \\ 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} p + r - r \cos\theta \\ l + p + r - r \cos\theta \end{aligned} \quad (4)$$

$$d\mathbf{l}_1 = -dx$$

* 電気工学教室

** 日本ビクター株式会社

*** 九州電力株式会社

(4)式を用いて

$$\int_0^l \frac{dl_1}{\sqrt{(l-l_1+p+r-r \cos \theta)^2+m^2+r^2 \sin^2 \theta}} = \int_{l+p+r-r \cos \theta}^{p+r-r \cos \theta} \frac{-dx}{\sqrt{x^2+m^2+r^2 \sin^2 \theta}}$$

$$= \ln\{l+p+r-r \cos \theta + \sqrt{(l+p+r-r \cos \theta)^2+r^2 \sin^2 \theta+m^2}\}$$

$$- \ln\{p+r-r \cos \theta + \sqrt{(p+r-r \cos \theta)^2+r^2 \sin^2 \theta+m^2}\} \quad (5)$$

(5)式を使うと相互インダクタンス M は

$$M = \frac{\mu_0 r}{4 \pi} \int_0^\alpha \sin \theta \ln\{l+p+r-r \cos \theta + \sqrt{(l+p+r-r \cos \theta)^2+r^2 \sin^2 \theta+m^2}\} d\theta$$

$$- \frac{\mu_0 r}{4 \pi} \int_0^\alpha \sin \theta \ln\{p+r-r \cos \theta + \sqrt{(p+r-r \cos \theta)^2+r^2 \sin^2 \theta+m^2}\} d\theta = M_1 - M_2 \quad (6)$$

ここで M_1 および M_2 は (6) 式の第一項、第二項を示す。

M_1 は文献 2 の (6) 式において l を $l+p$ と置換したものに等しい。したがって同文献の (11) 式を参照すれば

$$M_1 = \frac{\mu_0 r}{4 \pi} \left\{ (1 - \cos \alpha) \ln(l+p+r-r \cos \alpha + \xi_1) - (1 - \cos \alpha) + \frac{\xi_1 - \xi_2}{r} \right.$$

$$\left. - \ln \frac{r(1 - \cos \alpha) + l+p+\xi_1}{l+p+\xi_2} + \frac{\xi_3}{r} \ln \frac{r+l+p+\xi_1-\xi_3}{r+l+p+\xi_1+\xi_3} - \frac{\xi_3}{r} \ln \frac{r+l+p+\xi_2-\xi_3}{r+l+p+\xi_2+\xi_3} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし } \xi_1 &= \sqrt{2r(r+l+p)(1 - \cos \alpha) + m^2 + (l+p)^2} \\ \xi_2 &= \sqrt{m^2 + (l+p)^2} \\ \xi_3 &= \sqrt{r^2 + m^2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

M_2 は (7) 式において $l=0$ とおいたものである。

$$M_2 = \frac{\mu_0 r}{4 \pi} \left\{ (1 - \cos \alpha) \ln(p+r-r \cos \alpha + \xi_4) - (1 - \cos \alpha) + \frac{\xi_4 - \xi_5}{r} - \frac{\xi_3}{r} \ln \frac{r+p+\xi_5-\xi_3}{r+p+\xi_5+\xi_3} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし } \xi_4 &= \sqrt{2r(r+p)(1 - \cos \alpha) + m^2 + p^2} \\ \xi_5 &= \sqrt{m^2 + p^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(6), (7), (9) 式から相互インダクタンスは

$$M = \frac{\mu_0 r}{4 \pi} \left\{ (1 - \cos \alpha) \ln \frac{l+p+r-r \cos \alpha + \xi_1}{p+r-r \cos \alpha + \xi_4} + \frac{\xi_1 - \xi_2 - \xi_4 + \xi_5}{r} - \ln \frac{(p+\xi_5)\{r(1 - \cos \alpha) + l+p+\xi_1\}}{(l+p+\xi_2)\{r(1 - \cos \alpha) + p+\xi_4\}} \right.$$

$$\left. + \frac{\xi_3}{r} \ln \frac{(r+l+p+\xi_1-\xi_3)(r+p+\xi_4+\xi_3)}{(r+l+p+\xi_1+\xi_3)(r+p+\xi_4-\xi_3)} - \frac{\xi_3}{r} \ln \frac{(r+l+p+\xi_2-\xi_3)(r+p+\xi_5+\xi_3)}{(r+l+p+\xi_2+\xi_3)(r+p+\xi_5-\xi_3)} \right\} \quad (11)$$

4. 数 値 例

Fig. 2 は(11)式において $r=2\text{ m}$, $l=3\text{ m}$, $m=1\text{ m}$, $\alpha=2\pi/3$ とした場合の相互インダクタンス M と p の関係を示したものである。

5. 特別な場合の相互インダクタンス

5.1 $\alpha=\pi$ (Fig. 3 参照)

(11)式を用いると

$$M = \frac{\mu_0 r}{4 \pi} \left\{ 2 \ln \frac{l+p+2r+\xi_{1a}}{p+2r+\xi_{4a}} + \frac{\xi_{1a} - \xi_2 - \xi_{4a} + \xi_5}{r} \right.$$

$$\left. - \ln \frac{(p+\xi_5)(l+p+2r+\xi_{1a})}{(l+p+\xi_2)(p+2r+\xi_{4a})} \right.$$

$$\left. + \frac{\xi_3}{r} \ln \frac{(l+p+r+\xi_{1a}-\xi_3)(p+r+\xi_{4a}+\xi_3)}{(l+p+r+\xi_{1a}+\xi_3)(p+r+\xi_{4a}-\xi_3)} \right\}$$

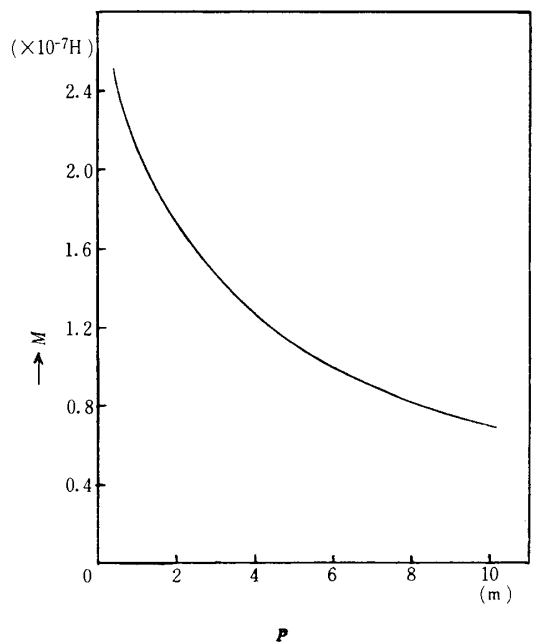


Fig. 2 Relationship between M and p when r, l, m and α are 2.0m, 3.0m, 1.0m and $2\pi/3$ respectively

$$-\frac{\xi_3}{r} \ln \frac{(l+p+r+\xi_2-\xi_3)(p+r+\xi_5+\xi_3)}{(l+p+r+\xi_2+\xi_3)(p+r+\xi_5-\xi_3)} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし } \xi_{1a} &= \sqrt{4r(r+l+p)+m^2+(l+p)^2} \\ \xi_{4a} &= \sqrt{4r(r+p)+m^2+p^2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

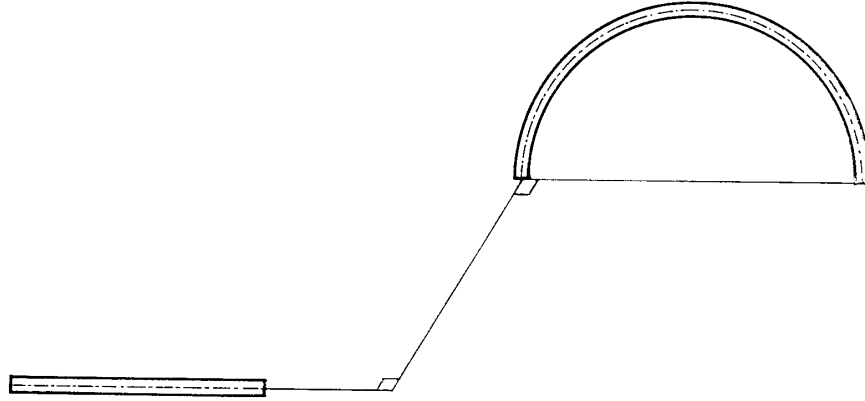


Fig. 3 Arrangement of two conductors, $\alpha=\pi$

5.2 $\alpha=\pi/2$ (Fig. 4 参照)

(11) 式を用いると

$$M = \frac{\mu_0 r}{4\pi} \left\{ \ln \frac{l+p+r+\xi_{1b}}{p+r+\xi_{4b}} + \frac{\xi_{1b}-\xi_2-\xi_{4b}+\xi_5}{r} - \ln \frac{(p+\xi_5)(l+p+r+\xi_{1b})}{(l+p+\xi_2)(p+r+\xi_{4b})} \right. \\ \left. + \frac{\xi_3}{r} \ln \frac{(l+p+r+\xi_{1b}-\xi_3)(p+r+\xi_{4b}+\xi_3)}{(l+p+r+\xi_{1b}+\xi_3)(p+r+\xi_{4b}-\xi_3)} - \frac{\xi_3}{r} \ln \frac{(l+p+r+\xi_2-\xi_3)(p+r+\xi_5+\xi_3)}{(l+p+r+\xi_2+\xi_3)(p+r+\xi_5-\xi_3)} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし } \xi_{1b} &= \sqrt{2r(r+l+p)+m^2+(l+p)^2} \\ \xi_{4b} &= \sqrt{2r(r+p)+m^2+p^2} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

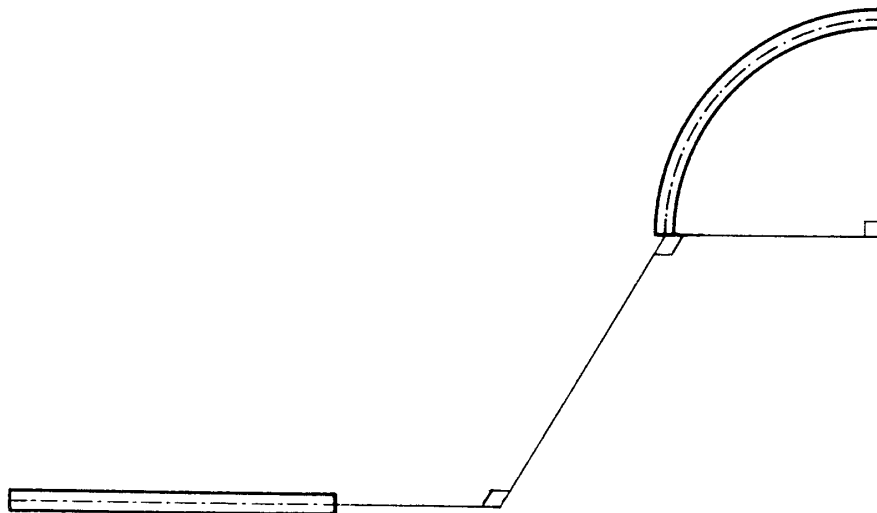


Fig. 4 Arrangement of two conductors, $\alpha=\pi/2$

5.3 $p=0$

同じく (11) 式を用いる。この場合には

$$M = \frac{\mu_0 r}{4\pi} \left[(1-\cos \alpha) \ln \frac{l+r(1-\cos \alpha)+\xi_{1c}}{r(1-\cos \alpha)+\xi_{4c}} + \frac{\xi_{1c}-\xi_2-\xi_{4c}+m}{r} - \ln \frac{m\{r(1-\cos \alpha)+l+\xi_{1c}\}}{(l+\xi_2)\{r(1-\cos \alpha)+\xi_{4c}\}} \right]$$

$$+ \frac{\xi_3}{r} \ln \frac{(r+l+\xi_{1c}-\xi_3)(r+\xi_{4c}+\xi_3)}{(r+l+\xi_{1c}+\xi_3)(r+\xi_{4c}-\xi_3)} - \frac{\xi_3}{r} \ln \frac{(r+l+\xi_{2a}-\xi_3)(r+m+\xi_3)}{(r+l+\xi_{2a}+\xi_3)(r+m-\xi_3)} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし } \xi_{1c} &= \sqrt{2r(r+l)(1-\cos \alpha) + m^2 + l^2} \\ \xi_{2a} &= \sqrt{m^2 + l^2} \\ \xi_{4c} &= \sqrt{2r^2(1-\cos \alpha) + m^2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

となり筆者らが先に求めた公式⁴⁾と一致する。

5.4 $m=0$ (Fig.5 参照)

(11)式から

$$M = \frac{\mu_0 r}{4\pi} \left\{ (1-\cos \alpha) \ln \frac{l+p+r(1-\cos \alpha)+\xi_{1d}}{p+r(1-\cos \alpha)+\xi_{4d}} + \frac{\xi_{1d}-\xi_{4d}-l}{r} \ln \frac{(p+r)\{r(1-\cos \alpha)+l+p+\xi_{1d}\}}{(l+p+r)\{r(1-\cos \alpha)+p+\xi_{4d}\}} \right. \\ \left. + \ln \frac{(l+p+\xi_{1d})(p+2r+\xi_{4d})}{(l+p+2r+\xi_{1d})(p+\xi_{4d})} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし } \xi_{1d} &= \sqrt{2r(r+l+p)(1-\cos \alpha) + (l+p)^2} \\ \xi_{4d} &= \sqrt{2r(r+p)(1-\cos \alpha) + p^2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

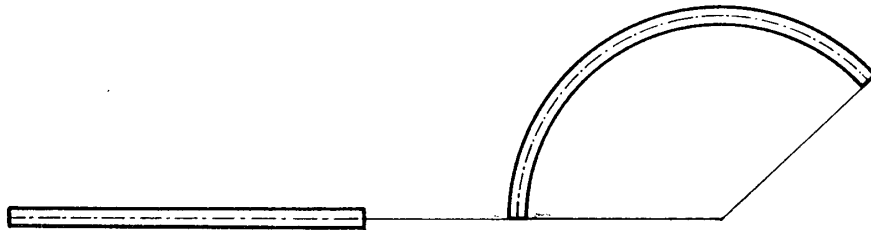


Fig. 5 Arrangement of two conductors, $rm=0$

5.5 $m=0, \alpha=\pi$ (Fig.6 参照)

(18)式を用いて

$$M = \frac{\mu_0 r}{2\pi} \ln \frac{l+p+r}{p+r} \quad (20)$$

(20)式において $p=0$ とおくと文献1で得た結果と同一になる。

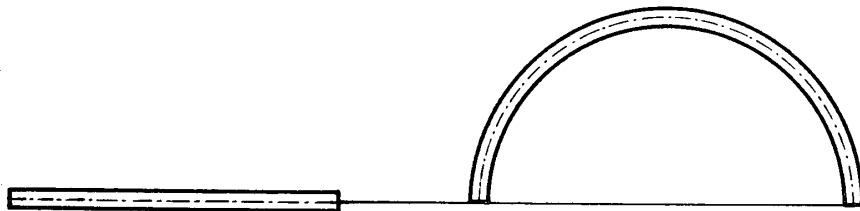


Fig. 6 Arrangement of two conductors, $m=0, \alpha=\pi$

5.6 $m=0, \alpha=\pi/2$ (Fig.7 参照)

(18)式を用いると

$$M = \frac{\mu_0 r}{4\pi} \left\{ \ln \frac{(l+p+r)(l+p+\xi_{1e})(p+2r+\xi_{4e})}{(p+r)(l+p+2r+\xi_{1e})(p+\xi_{4e})} + \frac{\xi_{1e}-\xi_{4e}-l}{r} \right\} \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし } \xi_{1e} &= \sqrt{2r(r+l+p) + (l+p)^2} \\ \xi_{4e} &= \sqrt{2r(r+p) + p^2} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

(21)式で $p=0$ とおけば文献2の(19)式と一致する。

5.1~5.6 以外の場合については文献2を参照されたい。



Fig. 7 Arrangement of two conductors, $m=0, \alpha=\pi/2$

6. 結 言

本稿で述べた導体配置では、相互インダクタンスは初等関数で表現できた。しかしもっと一般的な導体配置においては、特殊関数を用いねばならぬ場合が多い。それらについては別の機会に発表したい。

なお、本論文の一部は本学で開催された昭和44年度電気四学会中国支部大会で発表した。

終りに日頃ご援助いただく戸田圭一講師に厚く感謝

の意を表する。

参 考 文 献

- 1) 小出, 小谷, 武平: 山口大学工学部研究報告, **20**, 2, 237 (1969)
- 2) 小出, 小谷, 武平: 山口大学工学部研究報告, **20**, 2, 241 (1969)
- 3) 小出, 小谷, 武平: 山口大学工学部研究報告, **20**, 2, 247 (1969)
- 4) 文献2, p. 243

(昭和44年12月15日受理)