近傍制限直並列アレイアクセプタ

斉藤　理*・谷口　弘**・井上克司**・高浪五男**

Parallel Sequential Array Acceptors with Restricted Neighborhood

Osamu SAITOH, Hiroshi TANIGUCHI, Katsushi INOUE
and Itsuo TAKANAMI

Abstract

This paper investigates some properties of Parallel Sequential Array Acceptors with Restricted Neighborhood (RPSA's). An RPSA is a Parallel Sequential Array Acceptor (PSA) with the restriction that the neighborhood template of each cell except the first cell is {0, 1}.

This paper first investigates the relationships of accepting powers between RPSA's and PSA's, and also investigates the difference between the accepting powers of one-way and two-way RPSA's, and the difference between the accepting powers of deterministic and nondeterministic RPSA's. This paper then investigates closure properties of the classes of sets accepted by one-way RPSA's under several operations.

1. まえがき

文献1)～3), 7), 8) において，2次元テープ上で動作するオートマトンのひとつのモデルとして，直並列アレイアクセプタが提案され，その種々の性質が調べられ興味ある結果が報告されている．

本論文では，新たに，直並列アレイアクセプタの第1セル以外の各セルの近傍が制限された近傍制限直並列アレイアクセプタを提案し，その2, 3の性質を明らかにする．

まず，2方向非決定性直並列アレイアクセプタ，1方向非決定性直並列アレイアクセプタ，1方向決定性直並列アレイアクセプタの各々について，近傍形の相違に基づく受理能力の関係を調べる．

次に，これらの結果を基に，近傍制限直並列アレイアクセプタの受理能力が，動作の決定性と非決定性，セル配列の移動可能方向（1方向と2方向），などに依存していかに異ってくるかを議論する．

最後に，1方向決定性近傍制限直並列アレイアクセプタで受理される集合族の二，三の演算に関する閉包性を調べる．

* 赤井電機(株)
** 電子工学科

2. 諸定義

〔定義1〕 記号の有限集合 Σ 上の2次元テープとは，Σ の要素からなる m 行 n 行の方形配列（$m, n \geqq 1$）をいう．Σ 上のすべての2次元テープの集合を $\Sigma^{(2)+}$ と記す．

各 $x \in \Sigma^{(2)+}$ に対し，$l_1(x)$ は x の行の数を表わし，$l_2(x)$ は x の列の数を表わす．各 i, j ($1 \leqq i \leqq l_1(x)$, $1 \leqq j \leqq l_2(x)$) に対し，$x_{i,j}$ は x 上の i 行 j 列に位置する記号を表す．更に，$x[(i,j),(i',j')]$ は，$1 \leqq i \leqq i' \leqq l_1(x)$，且つ $1 \leqq j \leqq j' \leqq l_2(x)$ のときのみ次の (i), (ii) を同時に満たす2次元テープ z として定義される．

(i)　$l_1(z)=i'-i+1$，且つ $l_2(z)=j'-j+1$

(ii)　各 k, r ($1 \leqq k \leqq l_1(z)$, $1 \leqq r \leqq l_2(z)$) に対し

$$z_{k,r}=x_{k+i-1,r+j-1}$$

$x[(i,j),(i',j')]$ を x の $[(i,j),(i',j')]$ 一部分と呼ぶ．

〔定義2〕 2方向非決定性直並列アレイアクセプタ (PSA)[1] は，同一の有限状態機械の1次元無限配列であり，次の6項系列

$$M=(\Sigma, k, q_0, \sigma, \mu, F)$$

で定義される．ここで Σ は入力記号の有限集合（Σ は3つの境界記号 ¢, \$, # を含む．ここで ¢, \$, # をそれぞれ上境界記号, 下境界記号, 左右境界記号と呼ぶ), K は配列の中の各セル（配列中の各有限状態機械に通常の方法で1次元座標を割り当て，座標 i に位置する有限状態機械を第 i セルと呼ぶ）の取り得る状態の有限集合で，特別な境界状態 $q_\#$ を含む．$q_0 \in K$ は初期状態．σ は各セルの状態遷移関数で

$$\sigma\colon K^3 \times \Sigma \longrightarrow 2^K$$

ある時刻 t における第 i セルの状態を $q_i(t)$, 時刻 $t+1$ に第 i セルの取り得る状態の集合を $Q_i(t+1)$ とすれば

$$Q_i(t+1) = \sigma(q_{i-1}(t), q_i(t), p_{i+1}(t), a)$$

但し，a は時刻 t における第 i セルの読む記号．特に $q_i(t) = q_\#$ ならば

$$Q_i(t+1) = \{q_\#\}$$

とする．第 $i-1$ セル，第 i セル，第 $i+1$ セルを第 i セルの近傍という．μ は move 関数で

$$\mu\colon K \longrightarrow 2^D$$

但し,

$$D = \{0, \pm 1\}$$

である．時刻 t において M が2次元テープのいかなる行を読むかは $\mu(q)$（但し，q は時刻 t における第1セルの状態）で決められる．M は $0 \in \mu(q)$ なら時刻 $t-1$ におけるのと同一の行を読み，$1 \in \mu(q)$, $-1 \in \mu(q)$ なら，それぞれ時刻 $t-1$ において読んだ行の1つ下の行，1つ上の行を読むものとする．

$F \subseteq K$ は最終状態の集合.

M は m 行 n 列の2次元テープ x 上で次の様に動作する．x には Fig. 1 の様に境界記号が付けられているものとする（¢, \$ は M が2次元テープ x からはみ出すことを阻止する)．最初，第 i セル（$1 \leqq i \leqq n$）は時刻 $t=0$ において初期状態 q_0 で記号 $x_{1,i}$ を読み，ほかのすべてのセルは状態 $q_\#$ で記号 # を読んでいる．

この状況から出発して σ, μ に従って2次元テープ

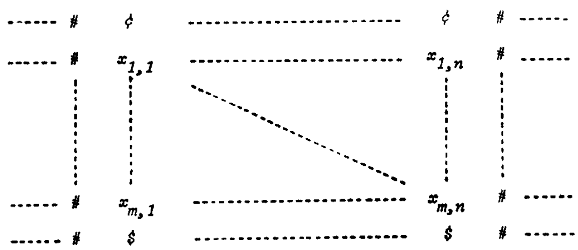

Fig. 1 An input tape.

x を読んでいくとき，第1セルが一度 F の中のある状態に入れば，M は x を受理するという．

M の受理するすべての2次テープの集合を $T(M)$ と記す.

近傍制限直並列アレイアクセプタ（$RPSA$）は，その各セルの近傍形が，以下に与えるように制限された PSA である．$RPSA$ M は次の7項系列

$$M = (\Sigma, K, q_0, \sigma_1, \sigma_2, \mu, F)$$

で定義される．ここで K, Σ, q_0, μ, 及び F は PSA の定義で与えたそれらと同様に定義される．σ_1: $\{q_\#\} \times K^2 \times \Sigma \to 2^K$ は第1セルの状態遷移関数であり, σ_2: K^2 $\Sigma \times \to 2^K$ は第1セル以外のセルの状態遷移関数である.

時刻 $t+1$ において第 i セルの読む記号を a, 時刻 t における第 i セルの状態を $q_i(t)$, 時刻 $t+1$ に第 i セルの取り得る状態の集合を $Q_i(t+1)$ とすれば,

(i) $Q_1(t+1) = \sigma_1(q_\#, q_1(t), q_2(t), a)$

(ii) $Q_i(t+1) = \sigma_2(q_i(t), q_{i+1}(t), a)$ (但し，$i \neq 1$)

また特に，$q_i(t) = q_\#$ ならば $Q_i(t+1) = \{q_\#\}$ とする．

任意の $q \in K$ に対し

$$-1 \notin \mu(q)$$

であるような PSA ($RPSA$) M は1方向性であると呼ばれ，1方向 PSA（1方向 $RPSA$）を $1WPSA$（$1WRPSA$）と記す.

〔定義3〕 $M = (\Sigma, K, q_0, \sigma, \mu, F)$ を任意の PSA ($1WPSA$) とする．このとき，各 $q_1, q_2, q_3 \in K$, 各 $a \in \Sigma$ に対して,

$$|\sigma(q_1, q_2, q_3, a)|^\dagger \leqq 1 \quad 且つ \quad |\mu(q_1)| \leqq 1$$

であるとき，M は決定性であると呼ばれる．決定性 PSA（決定性 $1WPSA$）を $DPSA$ ($1WDPSA$) と記す.

同様に，決定性 $RPSA$（決定性 $1WRPSA$）も定義され，$DRPSA$ ($1WDRPSA$) と記す.

PSA により受理されるすべての2次元テープの集合のクラスを $\mathscr{L}(PSA)$ と記す．$\mathscr{L}(RPSA)$, $\mathscr{L}(1WPSA)$ なども同様な意味を表す.

又，特に入力テープが正方形に限定された PSA により受理されるすべての2次元テープ集合のクラスを $\mathscr{L}^S$(PSA) と記す．$\mathscr{L}^S(RPSA)$, $\mathscr{L}^S(1WPSA)$ なども同様である.

† 任意の集合 S に対し, |S| は S の要素の個数を示す.

3. 近傍形の相違に基づく受理能力の差異

本章では，各種 PSA の近傍形の相違に基づく受理能力の関係を調べる．

3.1. 2方向非決定性における差異

補題1 $\mathscr{L}(PSA)\subseteq\mathscr{L}(RPSA)$

証明 いま，$M_1=(\Sigma, K_1, q_0, \sigma_1, \mu_1, F_1)$ を任意の PSA とし（$q_\#$ を M_1 の境界状態とする），$T(M_1)=T\subseteq\Sigma^{(2)+}$ とする．本補題を証明するには $T(M_1)=T(M_2)=T$ なる $RPSA$ M_2 が構成できることを示せば十分である．

M_2 の構成法を以下に示す．

$$M_2=(\Sigma, K_2, Q_0, \sigma_2, \sigma_2', \mu_2, F_2)$$

ここで，$K_2=K_1\times(K_1-\{q_\#\})^2\cup\{Q_\#, Q_0\}$ であり（$Q_\#$ は境界状態），σ_2 は次のように構成される．

(i) 各 $a\in\Sigma$ に対して，

・$\sigma_2(Q_\#, Q_0, Q_0, a)=\{(q_\#, q_0, r)\,|\,r\in\sigma_1(q_\#, q_0, q_0, a)\}$

(ii) 各 $Q_1=(q_\#, q_2, q_3), Q_2=(p_1, p_2, p_3)\in K_2-\{Q_\#, Q_0\}$，各 $a\in\Sigma$ に対して，

・$\sigma_2(Q_\#, Q_1, Q_2, a)$
$=\{(q_\#, q_3, r)\,|\,r\in\sigma_1(q_\#, q_3, p_3, a)\}$ …$p_1=q_2$ のとき
$=\phi$（空集合）…さもないとき

次に，σ_2' の構成法を示す．

(iii) 各 $a\in\Sigma$ に対して，

・$\sigma_2'(Q_0, Q_0, a)=\{(q_0, q_0, r)\,|\,r\in\sigma_1(q_0, q_0, q_0, a)\}$

・$\sigma_2'(Q_0, Q_\#, a)=\{q_0, q_0, r)\,|\,r\in\sigma_1(q_0, q_0, q_\#, a)\}$

(iv) 各 $Q_1=(q_1, q_2, q_3), Q_2=(p_1, p_2, p_3)\in K_2-\{Q_\#, Q_0\}$，各 $a\in\Sigma$ に対して，

・$\sigma_2'(Q_1, Q_2, a)$
$=\bigcup_{p\in K_1-\{q_\#\}}\{(p, q_3, r)\,|\,r\in\sigma_1(p, q_3, p_3, a)\}$ …$p_1=q_2$のとき
$=\phi$…さもないとき

・$\sigma_2'(Q_1, Q_\#, a)$
$=\bigcup_{p\in K_1-\{q_\#\}}\{(p, q_3, r\}\,|\,r\in\sigma_1(p, q_3, q_\#, a)\}$

次に，μ_2 の構成法を示す．

(v) $\mu_2(Q_0)=\mu_1(q_0)$

(vi) 各 $Q=(p, q, r)\in K_2-\{Q_\#, Q_0\}$ に対して，

$\mu_2(Q)=\mu_1(r)$…$p=q_\#$ のとき
$=\phi$…さもないとき

また，

$$F_2=\{(q_\#, q, r)\,|\,r\in F\}$$

とする．

以上のように構成される M_2 について，その動作を直観的に説明しよう．

いま，m 行 n 列（$m, n\geqq 1$）のテープが M_2 へ与えられたとする．

M_2 の各セルの状態を M_1 の各セルの状態の3項組から構成することによって（但し，初期状態 Q_0 と境界状態 $Q_\#$ は除く），以下のように，M_2 は M_1 の動作を模倣する．

時刻 $t=0$ において，M_2 の各第 $i(1\leqq i\leqq n)$ セルは，初期状態 Q_0 で $x_{1,i}$ を読み（他のすべてのセルは境界状態 $Q_\#$ で # を読んでいる），状態遷移した後に（p_i, q_0, r_i）なる状態に入る．ここで p_i は，時刻 $t=0$ における M_1 の第 $i-1$ セルの状態を推測したものであり，また r_i は $p_i, t=0$ における M_1 の第 i セルの状態 $q_0, t=0$ における M_1 の第 $i+1$ セルの状態，及び $t=0$ における M_1 の第 i セルの読んでいる入力記号 $x_{1,i}$ のもとで，PSA M_1 の状態遷移を模倣することで求まる．

各時刻 $t\geqq 1$ における M_2 の各 $i(1\leqq i\leqq n)$ セルの状態を

$$Q_i(t)=(p_i(t), q_i(t), r_i(t))$$

とする．

M_2 の第 i セルは，第3項 $r_i(t)$ でその時刻 t における M_1 の第 i セルの状態遷移を模倣する．第1項，及び第2項はそのために必要となる．すなわち，

○第1項 $p_i(t)$ は，時刻 $t-1$ における M_1 の第 $i-1$ セルの状態を推測したものである．

○第2項 $q_i(t)$ は，時刻 $t-1$ における M_1 の第 i セルの状態を示す．

○第3項 $r_i(t)$ は，$p_i(t), Q_i(t-1)$ の第3項 $r_i(t-1)$, $Q_{i+1}(t-1)$ の第3項 $r_{i+1}(t-1)$，及び時刻 $t-1$ における第 i セルの読む記号のもとでの M_1 の状態遷移から求まる．

また，推測した第1項 $p_i(t)$ が正しいか否かは，次の時刻 $t+1$ における状態を決めるときに，第 $i-1$

セルが，$p_i(t)$，($Q_i(t)$ の第1項）と $q_{i-1}(t)$($Q_{i-1}(t)$) の第2項）が一致するか否かを調べることにより，容易に知れる．不一致の場合は，以後の動作を放棄するものとする．

また，各時刻 $t(t\geqq 1)$ におけるセル配列の移動方向は，$p_1(t)$ が $p_1(t)=q_{\#}$ のときのみ，$\mu_1(r_1(t))$ に従う．

このようにして M_2 が動作していくとき，第1セルの第3項が一度 M_1 における最終状態 F_1 の中のある状態に入れば，M_2 は x を受理するように動作する．

以上のように構成される $RPSA$ M_2 に対して，

$$T(M_2)=T(M_1)=T$$

となることは明らか．よって本補題の成立することが知れる．

（証明終）

定理1 $\mathscr{L}(RPSA)=\mathscr{L}(PSA)$

証明 $\mathscr{L}(RPSA)\subseteq\mathscr{L}(PSA)$ は定義より明らか．また，補題1より，逆の包含関係も成立し，従って，本定理が成立する．

（証明終）

3.2. 1方向非決定性における差異

次の補題の成立することは補題1の証明と同様にして示される（証明は略す）．

補題2 $\mathscr{L}(1WPSA)\subseteq\mathscr{L}(1WRPSA)$

定理2 $\mathscr{L}(1WRPSA)=\mathscr{L}(1WPSA)$

証明 $\mathscr{L}(1WRPSA)\subseteq\mathscr{L}(1WPSA)$ は定義より明らか．また，補題2より，逆の包含関係も成立し，従って，本定理が成立する．

（証明終）

3.3. 1向非決定性における差異

補題3 $T_1=\{x\in\{0,1\}^{(2)+}\mid \exists n\geqq 2[l_1(x)=l_2(x)=n\ \&\ \forall j(2\leqq j\leqq n)\,[x_{n-j+1,1}=x_{n,j}]]\}$

(Fig. 2 参照）とする．このとき，

（1） $T_1\in\mathscr{L}^S(1WDPSA)$

（2） $T_1\notin\mathscr{L}^S(1WDRPSA)$

証明 （1） 次の様に動作する $1WDPSA$ M' を考える．n 行 n 列 ($n\geqq 2$) の $\{0,1\}$ 上の入力テープ x が M' へ与えられたとする（それ以外の形の入力テープは M' により容易に拒否され得る）．

まず，時刻 $t=0$ において，第 n セルから左方に単位スピード（1セル/1時刻）で信号 S を出す．

次に，任意の時刻 t において，第1セルは信号 S が伝達されてこない限り，その時刻で読んだ記号を状態の中に貯え，それ以降，その記号を右方へ単位スピードで伝達する．尚，その間，第1セルは，1行読む毎に下方へ1段ずつ動いていくように動作する．

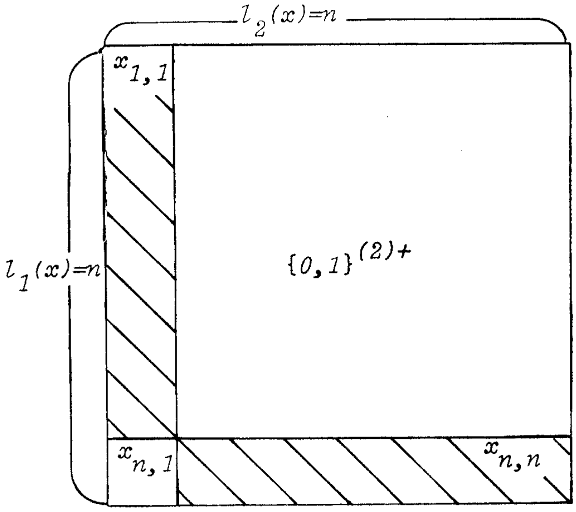

Fig. 2 A tape in T_1.

一方，第1セルは，信号 S が伝達されると（すなわち，第 n 行を読むとき），今度はその行に留るように動作し，各第 j セル ($2\leqq j\leqq n$) は，以下の3つの動作をする（そのとき，第 j セルには，記号 $x_{n-j+1,1}$ が伝達されていることに注意されたい．）．

i) 第 n セルは，左方から伝達された記号と第 n セルの読む記号が一致したときのみ，状態 q_e に入る．

ii) 第 j セル ($2\leqq j\leqq n-1$) は，左方から伝達された記号とそのセルの読む記号とが一致し，且つ第 $j+1$ セルの状態が q_e であるときのみ，状態 q_e に入る．

iii) 第1セルは，第2セルの状態が q_e であるときのみ受理状態 q_f に入る．

このような動作をする M' に対し，$T(M')=T_1$ となるのは明らか．

（2） T_1 を受理する $1WDRPSA$ M が存在すると仮定し，M の各セルの状態数を k とする．

いま，各 $n\geqq 2$ に対して

$$V(n)=\{x\in\{0,1\}^{(2)+}\mid l_1(x)=l_2(x)=n\ \&\ x[(1,2),(n-1,n)]\in\{0\}^{(2)+}\ \&\ x_{n,1}=0\}$$

$$V_1(n)=V(n)\cap T_1$$

とする．$V_1(n)$ の中の各テープは，M により受理されることに注意されたい．更に，各 $x\in V(n)$ に対して，

$q(x)\triangleq x$ の $n-1$ 行目を離れた直後の第1セルの状態

$\rho(x)\triangleq x$ の $n-1$ 行目を離れた直後の第2セルから第 n セルの状態の系列

$\mathrm{conf}(x) \triangleq q(x) \cdot \rho(x)$（すなわち，$x$ の第 $n-1$ 行目を離れた直後の M のコンフィグレイション[†]）

とする．このとき，次の2つの命題が成立する．

命題3.1 任意の $x, y \in V(n)$ に対し，

$$\rho(x) = \rho(y)$$

〔証明：$x[(2,1),(n,n-1)] = y[(2,1),(n,n-1)]$ であることと，M が $1WDRPSA$ であることより明らか．〕

命題3.2 相異なる任意の $x, y \in V_1(n)$ に対して，

$$q(x) \neq q(y)$$

〔証明：逆に $q(x) = q(y)$ であると仮定する．

次の (i), (ii) を同時に満足するテープ $z \in V(n)$ を考える．

(i) $z[(1,1),(n-1,n)] = x[(1,1),(n-1,n)]$

(ii) $z[(n,1),(n,n)] = y[(n,1),(n,n)]$

(i) より明らかに，

$$\mathrm{conf}(z) = \mathrm{conf}(x)$$

であり，また仮定より，

$$q(x) = q(y)$$

であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{conf}(z) &= \mathrm{conf}(x)\\ &= q(x) \cdot \rho(x)\\ &= q(y) \cdot \rho(x)\\ &= q(y) \cdot \rho(y) \quad (\text{命題3.1より})\\ &= \mathrm{conf}(y)\end{aligned}$$

となる．ところで，$y \in V_1(n) \subseteq T_1$ であるから，$\mathrm{conf}(y)$ なるコンフィグレイションで y の最終行を読むと，y は M で受理される．従って，$\mathrm{conf}(z) = \mathrm{conf}(y)$ であること，及び (ii) より，z もまた，M で受理されることになり矛盾である（$z \notin T_1$ に注意されたい）．〕

明らかに，

$$|V_1(n)| = 2^{n-1}$$

である．一方，$V_1(n)$ の中のテープの $n-1$ 行目を離れた直後に取り得る M の第1セルの状態数は，高々 k であるので，十分大きな n を考えると，

$$|V_1(n)| > k$$

が成立する．そのような n に対しては，

$$q(x) = q(y)$$

となるような相異なる $x, y \in V_1(n)$ が存在することになり，命題3.2に矛盾する．従って本補題が成立する．

（証明終）

定理3 $\mathscr{L}^S(1WDRPSA) \subsetneq \mathscr{L}^S(1WDPSA)$

証明 $\mathscr{L}^S(1WDRPSA) \subseteq \mathscr{L}^S(1WDPSA)$ は定義より明らか．このことと補題3より，本定理が成立する．

（証明終）

4. 近傍制限 *PSA* の受理能力

本章では，4章の結果に基づき，近傍制限 PSA の受理能力が，動作の決定性と非決定性，セル配列の移動可能方向（1方向と2方向）などに依存して，いかに異なってくるかを議論する．

まず，近傍制限1方向 PSA では，非決定性は決定性より真に強い受理能力をもつことを示す．

定理4 $\mathscr{L}^S(1WDRPSA) \subset \mathscr{L}^S(1WRPSA)$

証明 定義より明らかに，

$$\mathscr{L}^S(1WDPSA) \subseteq \mathscr{L}^S(1WPSA)$$

である．このことと，定理2，3より，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^S(1WDRPSA) &\subsetneq \mathscr{L}^S(1WDPSA) \quad (\text{定理3})\\ &\subseteq \mathscr{L}^S(1WPSA)\\ &= \mathscr{L}^S(1WRPSA) \quad (\text{定理2})\end{aligned}$$

となり，本定理の成立することが知れる．

（証明終）

次に，1方向と2方向の受理能力の差異を調べる．まず，決定性に対する場合を考える．

補題4 T_1 を補題3で用いた集合とする．このとき，

$$T_1 \in \mathscr{L}^S(DRPSA)$$

証明 次の様に動作する $DRPSA$ M を考える．

n 行 n 列 ($n \geqq 2$) の $\{0,1\}$ 上の入力テープ x が与えられたとする（それ以外の形の入力テープは，M により容易に拒否され得る）．

まず，M は下境界記号 \$ まで動いていく．次に，M は1段上方に動き，その行（すなわち，第 n 行）に於いて，各第 j セル ($2 \leqq j \leqq n$) は，読んだ記号 $x_{i,j}$ を状態の中に貯え，また，第1セルは特別な状態 q_e を

[†] 入力テープを読むセル配列の状態の組合せを，コンフィグレイションと呼ぶ．

とり，M は上方へ1段動く．

それ以降，各第 j セル $(2 \leqq j \leqq n)$ は，左方へ単位スピードでその記号 $x_{n,j}$ を伝達する．その間，第1セルは，右方から伝達された記号と第1セルの読む記号が一致し，且つ第1セルの状態が q_e であるときのみ，状態 q_e に入り，M は上方へ1段動くように動作する．そのような動作を続けて第1セルが上境界記号 $¢$ を読み，且つ第1セルの状態が q_e であるときのみ，第1セルは受理状態 q_f に入るように動作する．

このように動作する M に対し，$T(M)=T_1$ となるのは明らか． （証明終）

定理5 $\mathscr{L}^S(1WDRPSA) \subsetneqq \mathscr{L}^S(DRPSA)$

証明 $\mathscr{L}^S(1WDRPSA) \subseteq \mathscr{L}^S(DRPSA)$ は定義より明らか．このことと，補題3の (2)，及び補題4より，本定理の成立することが知れる．

（証明終）

最後に，非決定性の場合を考える．

補題5 $T_2=\{x \in \{0,1\}^{(2)+} \mid \exists n \geqq 1[l_1(x)$
$=l_2(x)=2n$ & $x[(1,1),(n,2n)]$
$=x[(n+1,1),(2n,2n)]]\}$

とする．このとき，

(1) $T_2 \in \mathscr{L}^S(DPSA) \subseteq \mathscr{L}^S(PSA)$

(2) $T_2 \notin \mathscr{L}^S(1WPSA)$

証明 (1) の成立することは容易に示されるので省略し，以下 (2) の成立することを示す．

T_2 を受理する 1WPSA M が存在すると仮定し，M の各セルの状態数を k とする．

いま，各 $n \geqq 1$ に対して

$$V(n)=\{x \in T_2 \mid l_1(x)=l_2(x)=2n\}$$

とする．$V(n)$ の中の各テープは，M により受理されることに注意されたい．さらに，各 $x \in V(n)$ に対して，

conf$(x) \triangleq M$ が x を受理するときに，第 n 行を離れた直後の M のコンフィグレイションの集合

とする．このとき，次の命題4.1が成立する．

命題4.1 相異なる任意の $x, y \in V(n)$ に対して

$$\mathrm{conf}(x) \cap \mathrm{conf}(y)=\phi$$

〔証明：逆に，$\rho \in \mathrm{conf}(x) \cap \mathrm{conf}(y)$ であると仮定する．

次の (i), (ii) を同時に満足するテープ z を考える．

(i) $z[(1,1),(n,2n)]=x[(1,1),(n,2n)]$

(ii) $z[(n+1,1),(2n,2n)]=y[(n+1,1),(2n,2n)]$

(i) より，明らかに z の第 n 行を離れた直後に M は ρ なるコンフィグレイションを取り得る．

一方，ρ なるコンフィグレイションで，引き続き z の第 $n+1$ 行目を読んでいくと，(ii) より，z は M により受理されることになる．このことは矛盾である（$z \notin T_2$ に注意）．〕

ところで，明らかに，

$$|V(n)|=2^{n \cdot 2n}=2^{2n^2}$$

である．一方，$V(n)$ 行を離れた直後に取り得る M のコンフィグレイションの総数は，高々 k^{2n} であるので，十分大きな n を考えると，

$$|V(n)|>k^{2n}$$

が成立する．そのような n に対しては，

$$\mathrm{conf}(x) \cap \mathrm{conf}(y) \neq \phi$$

となるような相異なる $x, y \in V(n)$ が存在することになり，命題4.1に矛盾する．

以上で，(2) の成立することが知れ，従って本補題が成立する．

（証明終）

定理6 $\mathscr{L}^S(1WRPSA) \subsetneqq \mathscr{L}^S(RPSA)$

証明 $\mathscr{L}^S(1WPSA) \subseteq \mathscr{L}^S(PSA)$ は定義より明らか．このことと，補題5より，

$$\mathscr{L}^S(1WPSA) \subsetneqq \mathscr{L}^S(PSA)$$

が成立する．また，定理1，2より，

$$\mathscr{L}^S(PSA)=\mathscr{L}^S(RPSA) \quad \text{(定理1)}$$

$$\mathscr{L}^S(1WPSA)=\mathscr{L}^S(1WRPSA) \quad \text{(定理2)}$$

であるから，

$$\mathscr{L}^S(1WRPSA) \subsetneqq \mathscr{L}^S(RPSA)$$

の成立することが知れ，本定理が成立する．

（証明終）

5. 近傍制限1方向直並列アレイアクセプタの閉包性

本章では，$\mathscr{L}$(1WRPSA) 及び $\mathscr{L}$(1WDRPSA) の次の8つの演算に関する閉包性を議論する．各種演算の定義については，それぞれ適当な文献を参照されたい．

（1） ①連接（①）[6]，②連接（②）[6]

（2） ①閉包（①+）[6]，②閉包（②+）[6]

（3） ①逆転（①ref）[6]，②逆転（②ref）[6]

（4） 回転 (R)[6]

（5） プロジェクション[9]

まず，$\mathscr{L}(1WRPSA)$ の各種演算に対する閉包性を調べよう．文献6)～8) に，$\mathscr{L}(1WPSA)$ は回転演算に関し閉じていないが，ⓘ連接 $(i=1,2)$，ⓘ閉包 $(i=1,2)$，ⓘ逆転 $(i=1,2)$ 及びプロジェクションに関しては閉じていることが示されている．このことと，定理2より $\mathscr{L}(1WRPSA)$ の各種演算に関する閉包性について，直に次の定理を得る．

定理7 （1） $\mathscr{L}(1WRPSA)$ は回転演算に関し閉じていない．

（2） $\mathscr{L}(1WRPSA)$ は各 $i(1\leqq i\leqq 2)$ に対して，ⓘ連接，ⓘ閉包，ⓘ逆転及びプロジェクションに関し閉じている．

次に，$\mathscr{L}(1WDRPSA)$ の各種演算に対する閉包性を調べよう．最初に，$\mathscr{L}(1WDRPSA)$ が①連接，①閉包に関し閉じていないことを示す．

補題6 $T_3=\{0,1\}^{(2)+}$, $T_4=\{x\in T_3 \mid l_1(x)\geqq 2$ 且つ x の先頭行と最終行が同一である$\}$，$T_5=\{x\in\{2\}^{(2)+} \mid l_1(x)=1\}$ とし，$T_6=(T_4 \textcircled{1} T_5 \textcircled{1} T_3)^{\textcircled{1}+}$ とする。このとき，

$$T_3 \textcircled{1} T_4,\quad T_6 \notin \mathscr{L}(1WDRPSA)$$

証明 文献8) の補題4と補題5にそれぞれ，$T_3 \textcircled{1} T_4 \notin \mathscr{L}(1WDPSA)$ 及び $T_6 \notin \mathscr{L}(1WDPSA)$ であることが示されている．また，定義より明らかに，$\mathscr{L}(1WDRPSA) \subseteq \mathscr{L}(1WDPSA)$ であり，以上のことより本補題が成立する． （証明終）

補題6 より，次の定理が得られる．

定理8 $\mathscr{L}(1WDRPSA)$ は①連接と①閉包に関して閉じていない．

証明 前述の集合 T_3, T_4, 及び $(T_4 \textcircled{1} T_5 \textcircled{1} T_3)$ が 1 $WDRPSA$ で受理されることは容易に確かめられる．このことと，補題6より本定理が成り立つ．

（証明終）

次に，$\mathscr{L}(1WDRPSA)$ は②連接，②閉包及びプロジェクションに関しても閉じていないことを示そう．

補題7 T_3 を補題6で述べた集合とし，$T_7=\{x\in\{0,1\}^{(2)+} \mid l_1(x)=2l_2(x)$ であり，しかも x の上半分の最終列が下半分の第1列と同一である.$\}$ とする．このとき，

$$T_7 \textcircled{2} T_3 \notin \mathscr{L}(1WDRPSA)$$

証明 $T_7 \textcircled{2} T_3$ を受理する $1WDRPSA$ M が存在するとし，M の各セルの状態の個数を k とする．いま，各 $n\geqq 1$ に対し，

$$V(n)=\{x\in\{0,1\}^{(2)+} \mid l_1(x)=n,\ l_2(x)=2n,$$
$$x[(1,1),(n,n)]\in\{0\}^{(2)+} \text{ であり，しかも}$$
$$x[(1,n+1),(n,2n)]\in\{0,1\}^{(2)+}\}$$

とする．各 $n\geqq 1$ に対し，M が $V(n)$ の中のテープ読み終えるときの M のコンフィグレイションの総数 $c(n)$ は

$$c(n)\leqq k^{2n}$$

である．ところが，明らかに $|V(n)|=2^{n^2}$ である．従って，十分大きな n に対しては，$|V(n)|>c(n)$ となり，このような n に対しては，M がそれらを読み終えるときの M のコンフィグレイションが同一であるような相異なる2つのテープ $x,y\in V(n)$ が存在する．一般性を失うことなく，ある $r_1(1\leqq r_1\leqq n)$, r_2 $(n+1\leqq r_2\leqq 2n)$ に対し，$x_{r_1,r_2}\neq y_{r_1,r_2}$ とする．いま，次の (i)～(iv) を満足するような2つのテープ $z,z'\in\{0,1\}^{(2)+}$ を考える．

(i) $l_1(z)=l_1(z')=2r_2$, 且つ $l_2(z)=l_2(z')=2n$

(ii) $z[(1,1),(n,2n)]=x$, 且つ $z'[(1,1),(n,2n)]=y$

(iii) $z[(1,r_2),(r_2,r_2)]=z[(r_2+1,1),(l_1(z),1)]$

(iv) z と z' とは，x, y 以外の部分は全く同一である．

明らかに，$z\in T_7 \textcircled{2} T_3$ であるから，z は M で受理され，結局 z' も又，M で受理されることになり，矛盾が生じる（$z'\notin T_7 \textcircled{2} T_3$ であることに注意 ）．

（証明終）

補題7の証明と同様な手法で，次の補題の成立することが示される（証明は略す）．

補題8 T_3, T_4 を上述の集合とし，$T_8=\{x\in\{2\}^{(2)+} \mid l_2(x)=1\}$ とする．このとき

$$T_9=(T_3 \textcircled{2} T_8 \textcircled{2} T_7)^{\textcircled{2}+} \notin \mathscr{L}(1WDRPSA)$$

補題7.8より，次の定理を得る．

定理9 $\mathscr{L}(1WDRPSA)$ は②連接，②閉包及びプロジェクションに関して閉じていない．

証明 前述の集合 T_3, T_7 及び $(T_3 \textcircled{2} T_8 \textcircled{2} T_7)$ が $1WDRPSA$ で受理されることは容易に確かめられる．このことと，補題7, 8より，②連接と②閉包に対する場合が証明されたことになる．集合 $T_3 \textcircled{2} T_8 \textcircled{2} T_7$ は $1WDRPSA$ で受理されるが，$\bar{h}(T_3 \textcircled{2} T_8 \textcircled{2} T_7)=T_3 \textcircled{2} T_{10} \textcircled{2} T_7 \notin \mathscr{L}(1WDRPSA)$ であることより（このことは，補題7の証明と同様にして示される），$\mathscr{L}(1WDRPSA)$ は，プロジェクションに関し閉じていないことが知れる．ここで，$\bar{h}$ は写像 h: $\{0,1,2\}\rightarrow\{0,1\}$ $(h(0)=0,$

$h(1)=1$, $h(2)=0$) を拡張して得られるプロジェクションであり，$T_{10}=\{x\in\{0\}^{(2)+}|l_2(x)=1\}$ である．

最後に，$\mathscr{L}(1WDRPSA)$ は，①逆転 ($i=1, 2$) 及び回転演算に関しても閉じていないことを示そう．

補題9 $T_{11}=\{x\in\{0,1,2\}^{(2)+}|\exists n\geqq 2[l_1(x)=l_2(x)=2n, \ \& \ \exists j(1\leqq j\leqq n)[x_{1,j+n}=2 \ \& \ \forall r(1\leqq r\leqq 2n, r\neq j+n)[x_{1,r}\in\{0,1\}] \ \& \ x[(2,1),(2n,2n)]\in\{0,1\}^{(2)+} \ \& \ x[(2,j+n),(n,j+n)]=x[(n+2,j),(2n,j)]]]\}$ とし，$T_{12}=T_{11}{}^{①\mathrm{ref}}$ とする．このとき，

$$T_{12}\notin\mathscr{L}(1WDRPSA)$$

証明 いま，T_{12} を受理するような $1WDRPSA\ M$ が存在すると仮定し，M の各セルの状態の個数を k とする．

各 $n\geqq 2$ に対して，

$$Y(n)=\{x\in\{0,1\}^{(2)+}|l_1(x)=n-1, l_2(x)=2n, \ \& \ x[(1,n+1),(n-1,2n)]\in\{0\}^{(2)+}\}$$

$$V(n)=\{x\in\{0,1,2\}^{(2)+}|l_1(x)=l_2(x)=2n, \ \& \ x[(1,1),(n-1,2n)]\in Y(n)\}$$

とする．また，各 $x\in V(n)$ に対して，

$\mathrm{conf}(x)\triangleq x$ の第 $n-1$ 行目を離れた直後の M のコンフィグレイション

とし，$R(n)=\{\mathrm{conf}(x)|x\in V(n)\}$ とする．

明らかに，$|Y(n)|=2^{n(n-1)}$ であり，$|R(n)|\leqq k^{2n}$ であるから，十分大きな n に対しては，$|Y(n)|>|R(n)|$ となる．そのような n に対しては，次の2条件を同時に満足するテープ $x, y\in V(n)$ が存在する．

① ある整数 $i(1\leqq i\leqq n-1), j(1\leqq j\leqq n)$ が存在して，$x_{i,j}\neq y_{i,j}$

② $\mathrm{conf}(x)=\mathrm{conf}(y)$

ここで，次の (i)～(v) を同時に満足するテープ $z, z'\in V(n)$ を考える．

(i) $z[(1,1),(n-1,2n)]=x[(1,1),(n-1,2n)]$
$z'[(1,1),(n-1,2n)]=y[(1,1),(n-1,2n)]$

(ii) $z[(n+1,n+1),(2n-1,2n)]=z[(1,1),(n-1,n)]$

(iii) $z_{2n,j+n}=2$

(iv) z の (i)～(iii) で述べた以外の位置の記号はすべて0

(v) $z'[(n,1),(2n,2n)]=z[(n,1),(2n,2n)]$

明らかに，$z\in T_{12}$ であり，z は M で受理される．一方，(i) より明らかに，$\mathrm{conf}(z)=\mathrm{conf}(x)$，$\mathrm{conf}(z)=\mathrm{conf}(z')$ となる．$\mathrm{conf}(z)=\mathrm{conf}(z')$ であることと (v) より，結局 z' もまた M で受理されることになり，矛盾が生じる ($z'\notin T_{12}$ であることに注意.)．

(証明終)

以上の結果より，次の定理を得る．

定理10 $\mathscr{L}(1WDRPSA)$ は①逆転 ($i=1, 2$) 及び回転演算に関して閉じていない．

証明 補題9で述べた集合 T_{11} が $1WDRPSA$ で受理されることは容易に確かめられる．このことと，補題9より，①逆転の場合が証明される．また，T_1 を補題3で述べた集合とする．このとき，$T_1^{②\mathrm{ref}}$ が $1WDRPSA$ で受理されることは容易に確かめられる．このことと，補題3より，②逆転に対する場合が証明される．回転演算に関し閉じていないことは，$(T_1^{②\mathrm{ref}})^R=T_1$ であること及び補題3より明らか．

(証明終)

6. むすび

本論文では，$RPSA$ を導入することにより，PSA, $1WPSA$, $DPSA$, $1WDPSA$ の各々について，近傍形の相違に基づく受理能力の関係を調べ，それらの結果を基に，$RPSA$ の受理能力が，動作の決定性と非決定性，セル配列の移動可能方向などに依存していかに異なってくるかを議論し，また，$1WRPSA$, $1WDRPSA$ について，受理される集合族の2，3の演算に関する閉包性を調べた．

未解決として残された問題を与えて，本論文を終る．

(1) $\mathscr{L}(DRPSA)\subsetneqq\mathscr{L}(DPSA)$ であるか？

(2) $\mathscr{L}(DRPSA)\subsetneqq\mathscr{L}(RPSA)$ であるか？

参考文献

1) 井上，中村：'直並列アレイアクセプタに関するある性質'，信学論 (D), J **58**-D, 167 (1975)
2) 井上，中村：'直並列アレイアクセプタと2次元2マーカーオートマトンのある性質'，信学論 (D), J **59**-D, 680 (1975)
3) 井上，中村：'1方向直並列アレイアクセプタと2次元1マーカーオートマトンのある性質'，信学論 (D), **59**-D, 682 (1976)
4) 井上，高浪，谷口：'回転入力をもつ2次元オートマタ(積形)'，信学論 (D), J **63**-D, 747 (1980)
5) 井上，高浪，谷口：'回転入力をもつ2次元オートマタ(和形)'，信学論 (D), J **64**-D, 101 (1981)
6) 井上，中村：'2次元テープ上のオートマタに関するある性質—その (2)—'，信学技報，AL 75-9 (1975)
7) K. Inoue and A. Nakamura: 'Nonclosure properties

of two-dimensional on-line tessellation acceptors and one-way parallel sequential array acceptors', Trans. IECE of Japan., E **60**, 475 (1977)

8) 井上, 中村：'2次元非決定性有限オートマタと直並列アレーアクセプタに関するある性質', 信学論 (D), J **60**–D, 990 (1977)

9) 井上, 中村：'n次元オンラインテセレーションアクプセタ', 信学論 (D), J **59**–D, 229 (1976)

(昭和56年4月6日 受理)