伝熱工学における特殊非線型積分方程式について

村川　勝彌*・宮本　政英*・栗間　諄二*・日高　正夫**

On a Special Nonlinear Integral Equation in Heat Transfer

Katsuhisa MURAKAWA, Masahide MIYAMOTO, Junji KURIMA and Masao HITAKA

Abstract

Numerical solution with high accuracy of a special nonlinear integral equation in heat transfer is found by numerical integration with high accuracy.

1. 緒　　言

伝熱工学における熱移動の反応熱や，充填層の拡散とか，化学反応速度定数にかんするアレニウス式などでは一般に温度 θ に比例的でなく，a，b を係数とすれば $a\exp(-b\theta)$ の様な形であらわされる場合が多い．

特に最近の航空，宇宙工学における伝熱，燃焼，物質移動や，これらが同時に共存するときの問題ではアレニウス式が現われて来る場合が非常に多くなり，取扱いも複雑困難となって来ている．

しかし数学的な解も見付からないので著者らは高精度で，しかも解くべき方程式数を少なくして著者らの研究室に備えつけの小型卓上計算機で数値計算のできるような方法を考えて，できるだけ大型電子計算機の使用をさけて費用と労力との節約をはかるような方法を考究した．

上述のように，温度に比例的でない場合は微分方程式も積分方程式もあまり現われない特殊な形の非線型となって数学的にも，まれで複雑となって来るので，従来のようにエネルギ式を微分方程式として解くよりも，積分方程式化した方が取扱いも，解き方も容易になり，また数値微分は精度が落ちるが数値積分法は精度が向上して高精度の数値解が期待できて，公式通りに扱えることは，積分方程式の有難味ともいうべきであろう．

工業上においては2次元，3次元の場合が必要であるが，原理や方法の説明のために，ここでは他の例のように1次元（変数 x）のときについて述べる．

始めに，かんたんな場合について略述して最後に著者らの考究による積分方程式化して高精度数値積分法によって，多元連元一次方程式に帰着して線型化する方法を述べる．

著者らの考究した方法は今後，熱工学や他の工学における非線型問題に大いに活用され使用されて，その威力が期待できるものである．

*　機械工学教室
**　宇部工業高等専門学校

2. $F(x)=0$ の場合

上述の場合における一般のエネルギ式は，3次元（x, y, z）のときは

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}+a\cdot e^{-b\theta(x,y,z)}+F(x,\ y,\ z)=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

で，あらわされる $\theta(x, y, z)$ は，無次元化された温度，(x, y, z) は無次元化された3変数，a，b は無次元化された定数，$F(x, y, z)$ は無次元化された既知関数である．

この(1)式で最も困るのは左辺の $ae^{-b\theta}$ の θ にかんする非線型の項で，この項が反応熱や反応速度などに関係のあるものとなる．

次に，かんたんのため1次元の場合について，これから述べることとする．

そのときは(1)式は次の(2)式のようになる．

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}+a\ e^{-b\theta(x)}+F(x)=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

したがって，(2)式が基礎式となり今後の研究の対象となるものである．

つぎに最もかんたんな場合として $F(x)=0$ のときは

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}+a\ e^{-b\theta(x)}=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

となるので

$$\theta=y,\ f(y)=-ae^{-by} \quad \cdots\cdots(4)$$

とおけば(3)式は

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(y) \qquad \cdots\cdots(5)$$

のように書きかえられるから 両辺に $2(dy/dx)dx=2dy$ をかけて積分すれば

$$\int\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)2\left(\frac{dy}{dx}\right)dx=\int 2f(y)\ dy+C$$

$$\therefore\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2\int f(y)dy+C$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\left[2\int f(y)dy+C_1\right]^{1/2}$$

$$\therefore\quad dx=\frac{dy}{\left[2\int f(y)dy+C^1\right]^{1/2}}$$

$$\therefore\quad x=\int\frac{dy}{\left[2\int f(y)dy+C_1\right]^{1/2}}+C_2 \qquad \cdots\cdots(6)$$

このように(2)式において $F(x)=0$ の場合は普通の例のように(6)式で示される．
C_1, C_2 は積分定数で境界条件によって決定されるものである．

つぎに(3)式について具体的な１例をあげて(3)式において $a=\lambda>0$, $-b=1$ のときは

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}+\lambda\ e^{\theta}=0 \qquad \cdots\cdots(7)$$

境界条件として

$$\theta(a)=\theta(b)=0 \qquad \cdots\cdots(8)$$

として Green 関数 $G(x,t)$ を求めれば

$$\left.\begin{aligned} G(x,t)&=\frac{(b-x)(t-a)}{b-a},\ t\leqq x\\ &=\frac{(b-t)(x-a)}{b-a},\ t\geqq x\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(9)$$

となるので(7)式はつぎのような積分方程式に書きかえられる．

$$\theta(x)=\lambda\int_a^b G(x,t)e^{\theta(t)}dt \qquad \cdots\cdots(10)$$

(10)式は Bratu の式といわれる θ にかんして非線型積分方程式となる．
積分方程式にかんしては後述することとして(7), (8)式に立ちかえって，かんたんのため $a=0$ とおき $m=\theta'(0)$ とすれば

$$(\theta')^2-m^2+2\lambda(e^{\theta}-1)=0 \qquad \cdots\cdots(11)$$

$$t=1+\frac{m^2}{2\lambda} \qquad \cdots\cdots(12)$$

と，おけば

$$(y')^2=2\lambda(t-e^{\theta}) \qquad \cdots\cdots(13)$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{t-e^{\theta}}} \qquad \cdots\cdots(14)$$

(14)式は(6)式と同じ形式で示される．
普通は $\theta=\cdots\cdots$ の形で示されるのに対して，この場合は逆に $x=\cdots\cdots$ の形となる．

非線型の問題では，よく現われる形である．

3. $F(x)=a_0=$ (定数) の場合

(2)式の $\exp(-b\theta)$ を展開して θ^3 まで取れば，つぎの形で示される．

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}=A+B\theta+C\theta^2+D\theta^3 \qquad \cdots\cdots(15)$$

次に

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2=a+b\theta+c\theta^2+d\theta^3+e\theta^4 \qquad \cdots\cdots(16)$$

を考え

$$a+b\theta+c\theta^2+d\theta^3+e\theta^4=0 \qquad \cdots\cdots(17)$$

の根を α, β, γ, δ とすれば(16)式は

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2=e(\theta-\alpha)(\theta-\beta)(\theta-\gamma)(\theta-\delta) \qquad \cdots\cdots(18)$$

で示されるので，特に $e=k^2$, 根が 1, -1, $1/k$, $-1/k$ のときを考えると

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2=(1-\theta^2)(1-k^2\theta^2) \qquad \cdots\cdots(19)$$

この時，特に，$\theta(0)=0$, $\theta'(0)=1$ ならば

$$\theta=Sn(x,\ k) \qquad \cdots\cdots(20)$$

となり $Sn(x,k)$ は elliptic sine of Jacobi である．
つぎに(15)式にかえって，(16)式から

$$2\theta'\theta''=b\theta'+2c\theta\theta'+3d\theta'\theta^2+4e\theta'\theta^3$$

θ' を除けば(15)と同じ形となり，$\theta=\sin\ y$ とおけば(19)式は

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1-k^2\sin^2 y \qquad \cdots\cdots(21)$$

(19)式は

$$F(\theta,\ k)=\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{(1-\theta^2)(1-k^2\theta^2)}},\quad k^2<1 \qquad \cdots\cdots(22)$$

(21)式は

$$F(\phi,\ k)=\int_0^{\phi}\frac{dy}{\sqrt{1-k^2\sin^2 y}},\quad k^2<1 \qquad \cdots(23)$$

(22), (23)は elliptic integral となる．
(15)式のように θ^3 まで展開したら(20), (22), (23)の様な，だ円関数，だ円積分などの高等関数を使用する必要が生じ，しかも θ^3 まででは(15)式は不充分である．

数学的な解は，なかなか得がたいことが分る．

普通の非線型と異なり $\exp(-b\theta)$ の形をした非線型は取り扱いが困難なことが理解される．

4. $F(x)$ が x の一般的関数の場合

(A) Quasilinearization 法

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}+ae^{-b\theta(x)}+F(x)=0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

は，

$$ae^{-b\theta(x)}=g(\theta) \qquad \cdots\cdots(24)$$

と，おけばつぎのように書きかえられる．

$$\theta''+g(\theta)+F(x)=0 \quad \therefore \quad \theta''=f(\theta,x) \cdots\cdots (25)$$

$$f(\theta,x)=-\{g(\theta)+F(x)\} \cdots\cdots (26)$$

(25)式の境界条件として，たとえば

$$\{\theta(0)\}=0,\ \{\theta(b)\}=0 \cdots\cdots (27)$$

を，あたえたとすれば， Newton-Raphson-Kantorovich approximation method を用いて Quasilinearlization によって

$$\left.\begin{aligned}&\theta''_{n+1}=f_\theta(\theta_n,x)(\theta_{n+1}-\theta_n)+f(\theta_n,x)\\&\theta_{n+1}(0)=0,\ \theta_{n+1}(b)=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots (28)$$

(28)式において θ_{n+1} を未知関数，θ_n を逐次にあたえられた関数と考えれば境界条件を満足する Green 関数 $K(x,\xi)$ を用いて(28)式はつぎの線型，第2種 Fredholm 型積分方程式になおすことができる．

$$\theta_{n+1}=\int_0^b K(x,\ \xi)\Big[f_\theta(\theta_n,\xi)(\theta_{n+1}-\theta_n)+f(\theta_n,\ \xi)\Big]d\xi \quad \cdots\cdots (29)$$

(29)式は線型化されたので，線型積分方程式の解法の公式にしたがって多元一次連立方程式となるので

$$\int_0^b (\qquad)\,d\xi$$

の数値積分法に高精度数値積分法として Gauss, Gauss-Moors, Gauss-Lobatto の方式を用いて連立方程式の数を少くして，高精度の数値解を得ることができる．

この場合(25)，(28)式の操作は，ある程度，逐次に繰り返えしが必要であるから，このような微分方程式から出発する方法は労力がかかるので著者らは次のような直接(2)式から出発して積分方程式化して途中の計算を省略する方法を考究した．

(B) 積分方程式化して高精度数値積分法による方法

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}+ae^{-b\theta(x)}+F(x)=0 \cdots\cdots (2)$$

(2)式において，必要な境界条件をあたえれば Green 関数 $G(x,\xi)$ が求まるので，(2)式の微分方程式を積分方程式化すれば

$$\theta(x)=f(x)+\int_0^1 G(x,\xi)a\ e^{-b\theta(\xi)}d\xi \quad \cdots\cdots (30)$$

のような非線型積分方程式が得られる．

$\theta(x)$ は求めようとする未知の無次元温度，$f(x)$ は $F(x)$と$G(x,\xi)$ とから得られたわかっている無次元の関数，変数の変域は数値計算に便利なように〔$0\leq x\leq 1$〕，〔$0\leq\xi\leq 1$〕になおしておく．

あたえられた(2)の微分方程式と境界条件とは(30)式と同等であるから，(30)式を高精度で解けばよいことになるので，

$$\int_0^1 (\qquad)\,d\xi$$

の定積分に Gauss, Gauss-Moors, Gauss-Lobatto の方式の高精度数値積分法を適用すればよい．

公式を書けば

$$\int_a^{a+H} f(x)\,dx=H\Big[R_1^n f\left(a+\frac{1}{2}H+x_1\right)+R_2^n f\left(a+\frac{1}{2}H+x_2\right)+\cdots\cdots+R_n^n f\left(a+\frac{1}{2}H+x_n\right)\Big] \quad \cdots (31)$$

となるから，この式によって計算すればよい．

(31)の公式を(31)式に用いて $x=a_n$，$\xi=a_n$，($n=1,2,3,\cdots\cdots,n$) の n 個の各点における $\theta(x)$ の値 $\theta(a_n)$ にかんする連立方程式は

$$\left.\begin{aligned}\theta(a_1)&=f(a_1)+G(a_1,\ a_1)R_1^n a\ e^{-b\theta(a_1)}+G(a_1,\ a_2)R_2^n ae^{-b\theta(a_2)}+\cdots\cdots\\\theta(a_2)&=f(a_2)+G(a_2,\ a_1)R_1^n a\ e^{-b\theta(a_1)}+G(a_2,\ a_2)R_2^n\ a\ e^{-b\theta(a_2)}+\cdots\cdots\\\theta(a_n)&=f(a_n)+G(a_n,\ a_1)R_1^n ae^{-b\theta(a_1)}+\cdots\cdots+(a_n,\ a_n)R_n^n ae^{-b\theta(a_n)}\end{aligned}\right\}(32)$$

となるから

$$e^{-b\theta(a_n)}=y_n \quad \cdots\cdots (33)$$

とおけば(32)は

$$\left.\begin{aligned}\frac{\log_e y_1}{(-b)}&=f(a_1)+G(a_1,\ a_1)R_1^n ay_1+G(a_1,\ a_2)R_2^n ay_2+\cdots\cdots\\\frac{\log_e y_n}{(-b)}&=f(a_n)+G(a_n,\ \sigma)\ R_1^n\ ay_1+\cdots\cdots+G(a_n\ a_n)R_n^n\ a\ y_n\end{aligned}\right\}(34)$$

(34)の右辺は y_1, y_2, ……, y_n にかんする n元1次式の連立方程式となるが，左辺に $\log_e y_n$ の非線型項が現われて来る．

(33)より y_n は $0\leq\theta_n\leq 1$ であるから

$$0<e^{-b}\leqq y_n\leqq 1$$

したがって(34)の左辺は

$$0\leqq\left\{\frac{\log_e y_n}{(-b)}\right\}\leqq 1$$

の範囲と考えられるので，先ず y_n の第0次近似値を求めるために

$$\log_e y_n\doteqdot(y_n-1)-\frac{1}{2}(y_n-1)^2+\frac{1}{3}(y_n-1)^3+\frac{1}{4}(y_n-1)^4 \quad \cdots\cdots (35)$$

$y_n{}^4$ まで展開して

$$\log_e y_n\doteqdot(-b)[f(a_n)+G(a_n,\ a_n)R_n^n ay_n] \cdots (36)$$

より，(36)式の左辺に，(35)の右辺を代入して y_n の4次代数方程式から y_n の近似値 $y_{n,0}$ を求め，(34)の左辺に代入して

$$\left\{ f(a_n)+\frac{\log_e y_{n,0}}{b}\right\}=f_n \quad \cdots\cdots(37)$$

とおけば(34)式は

$$\left.\begin{array}{l} G(a_1,a_1)R_1^n a\ y_1+\cdots\cdots+f_1=0 \\ G(a_n,a_n)R_n^n a\ y_n+\cdots\cdots+f_n=0 \end{array}\right\} \quad (38)$$

のように $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ にかんする n 元1次連立方程式となるので y_n の正しい値を逐次求めて(37)の f_n の修正を行って，最終的に $y_1, y_2, \cdots, y_n$ が得られるので(33)によって $x=a_n$ の温度 $\theta(a_n)$ が求まることになる．

Gauss, Gauss-Moors の方式によれば連立方程式の数 $n=4$，Gauss-Lobatt の方式なら $n=5$ の程度で充分であろう．

したがって温度分布 $\theta(x)$ が求まれば，燃焼，物質移動，熱伝達などが同時に共存する場合の熱伝達率 α〔kcal/m^2 h°C〕，ヌッセルト数 Nu や，シュタントン数 St などの伝熱計算に入ることができる．(2)式を微分方程式論によって解くことは，極めて困難であるが積分方程式論を使用して，著者らの考案したような(30)，(38)式に帰着して解けば容易に目的を達することができて，しかも解くべき連立方程式の数 ($n=4$～5) が少なくてすみ高精度の数値解が得られる．

従来の方法では連立方程式の数は11個以上の多数のものを解かねばならない．

5. 結　言

(2)式から(15)式のような近似展開をおこなっても，だ円関数や，だ円積分が表われて，なかなか解き難いことが予想される．そこで(30)式のように積分方程式化して Hammerstein 型の非線型積分方程式として(6)式から固有関数系の係数を決定しようとしても $e^{-b\theta}$ の形のために実際上は係数の決定は極めて困難となりそうである．

また，$\theta(x)$ の小さい範囲では Lalesco, Schmidt, Picard, Poincare 流の逐次近似法もある程度，有効であるかも知れないが変域全体にわたっては収束の速度がおそい場合は困る．

以上の様に種々な困難性のため著者らは，高精度で，解くべき連立方程式の数を少くして，労力を節約する方法として，(2)式，(30)式，(31)式，(38)式のように，積分方程式化と，高精度数値積分法公式を使用して目的を達する方法を考究した．

しかも(38)式は線型1次連立方程式化されていて，方程式の数も極めて少いので解くことは極めて容易である．

つぎに特別な場合として

(1) $\theta \gg exp(-b\theta)$ のときは，$\theta_0 \doteqdot f(x)$ から出発してもよいし，

(2) $\theta \ll exp(-b\theta)$ のときは $exp(-b\theta)=y$ とおいて(34)の左辺を0として，$y_1, y_2\cdots\cdots y_n$ の線型1次連立方程式として直ちに解くことができるし

(3) (35)式において $\log_e y_n \doteqdot (y_n-1)$ とすれば(30)式は

$$y_n(x)\doteqdot B(x)+k\int_0^1 G(x,\xi)y_n(\xi)d\xi$$

の形となり $y_n(x)$ を未知関数とする線型第2種 Fredholm 型積分方程式となって普通の線型積分方程式の解法にしたがって公式どおりに解いてゆけばよい．

$B(x)$ はあたえられた関数，k は定数である．

著者らの方法のように積分方程式化と高精度数値積分法公式とを併用すれば数学的には解法が極めて困難でしかも特殊な非線型方程式の高精度数値解でも容易にえられることがわかる．

熱工学においては非線型の方程式が多数に現われて来るが，著者らの考え方や方法は今後，他の工学における非線型方程式の高精度数値解法に使用されて，しかも大いに威力を発揮することが期待できるものである．

Nomenclature

A：　係数
a：　係数，定数
a_n：　x, ξ の値 ($n=1$，2，，……，n)
a_0：　定数
$B(x)$：　x の関数
B：　係数
b：　係数，定数
C：　係数
c_1：　積分定数
c_2：　積分定数
D：　係数
d：　係数
e：　係数
$F(x)$：　与えられた x の関数
$f(x)$：　与えられた x の関数
$F(\theta, k)$：　楕円積分
$F(\phi, k)$：　楕円積分

$G(x,\xi)$: Green 関数
$g(\theta)$: θの関数
H: 積分区間
k: 定数
m: $\theta'(0)$
n: 1, 2, 3……, 自然数
R_n^n: 係数 ($n=1, 2, \cdots\cdots, n$)
S^n: 楕円関数
t: 変数
x: 変数
y: 変数
y_n: (33)式
z: 変数

Greek letters

α: 熱伝達率〔kcal/m² h °C〕, 4次式の根
β: 4次式の根
γ: 4次式の根
δ: 4次式の根
$\theta(x)$: 無次元温度
ξ: 変数
θ'': $\dfrac{d^2\theta}{dx^2}$
θ': $\dfrac{d\theta}{dx}$
ϕ: 楕円積分の上限
λ: パラメーター

Appendix

(31)式の R_n^n と x^n および誤差の項 F に関する数値表

〔I〕Gauss の方式

$n=3$, $x_1=-0.38729833H$
$x_2=0$
$x_3=0.38729833H$
$R_1^3=\dfrac{5}{18}$
$R_2^3=\dfrac{8}{18}$
$R_3^3=\dfrac{5}{18}$
$F=\dfrac{1}{2800}H^7a_6+\cdots\cdots$

$n=4$, $x_1=-0.430568155797H$
$x_2=-0.169990521792H$
$x_3=0.169990521792H$
$x_4=0.430568155797H$
$R_1^4=0.173927422569$
$R_2^4=0.326072577431$
$R_3^4=0.326072577431$
$R_4^4=0.173927422569$
$F=\dfrac{1}{44100}H^9\ a_8+\cdots\cdots$

〔II〕Gauss-Moors の方式

$n=3$, $x_1=-0.3872983H$
$x_2=0$
$x_3=0.3872983H$
$R_1^3=0.277777827439$
$R_2^3=0.444444345122$
$R_3^3=0.277777827439$
$F=0.0^8\ 2235H^5\ a_4$
$+0.000357143528H^7\ a_6$
$+\cdots\cdots\cdots$

$n=4$, $x_1=-0.43056816H$
$x_2=-0.16999052H$
$x_3=0.16999052H$
$x_4=0.43056816H$
$R_1^4=0.173927419816$
$R_2^4=0.326072580184$
$R_3^4=0.326072580181$
$R_4^4=0.173927419816$
$F=0.0^9\ 259H^5\ a_4$
$+0.0^9\ 906H^7\ a_6$
$+0.000022675740H^9\ a_8$
$+\cdots\cdots\cdots$

〔III〕Gauss-Lobatto の方式

$n=5$, $x_1=-0.5H$
$x_2=-0.327327H$
$x_3=0$
$x_4=0.327327H$
$x_3=0.5H$
$R_1^5=0.049999911974$
$R_2^5=0.272222153758$
$R_3^5=0.355555868534$
$R_4^5=0.272222153758$
$R_5^5=0.049999911974$
$F=\cdots\cdots+0.0^9698H^7\ a_6$
$-0.00002834H^9\ a_8\cdots\cdots\cdots$

(昭和44年8月7日受理)