

走行水平横従動荷重を受ける梁の動的弾性安定解析

會 田 忠 義*・小 松 茂 生**

Analysis of Dynamic Stability of Beams under Traveling Horizontal Transverse Follower Load Systems

Tadayoshi AIDA and Shigeo KOMATSU

Abstract

The purpose of this paper is to investigate the dynamic behavior of the bridge subjected to the traveling horizontal transverse loads due to nosing and yawing of the multiple vehicle of Maglev.

It were found that the perturbation equation of motion of the thin-walled beams under traveling horizontal transverse follower load systems becomes Hill's equation and that parametrically excited unstable coupled vibrations occur. The boundary frequency equations of the simple parametric resonance, from which the instability regions are estimated, are obtained by Bolotin's method. The instability regions of a simply supported beam are illustrated, taking into account the effects of load mass.

1. ま え が き

走行列車の蛇行動・ヨーイングに伴うレールに及ぼす横荷重は比較的大きく、設計に当っては、旅客車、高速貨車、電気機関車、ディーゼル機関車などは、1台車当りの車両重量の15%、一般の貨車では25%の横力がレール面上、橋軸に直角に水平に作用するものとされている。現実においても、レールに作用する横圧は同程度のものとなり、しかも、その作用方向は高速時にはヨーイングが卓越する事実に基づいて、Fig. 1のように作用するものと考えられている。また、その作用方向は交互に反転する。

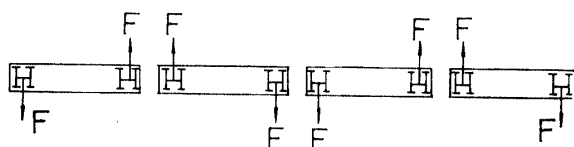


Fig. 1 Horizontal load due to nosing and yawing of vehicles.

これらの横荷重は梁がねじり回転するとき、その作用方向も回転する従動力になると考えられる。現在、

* 建設工学科

** 広島県土木建築部

国鉄で走行実験中の超電導磁気浮上式鉄道車両においては、ガイドウェイに作用する外力は磁気反発力であり、リニアモーターカー走行実験で、上記の横運動がわずかであるが発生していることが報じられている。

本研究は、上記の問題をモデル化して、従動性のある水平横荷重が交互に連続して梁上を走行する場合の梁の動的安定性を明らかにするのを目的としている。

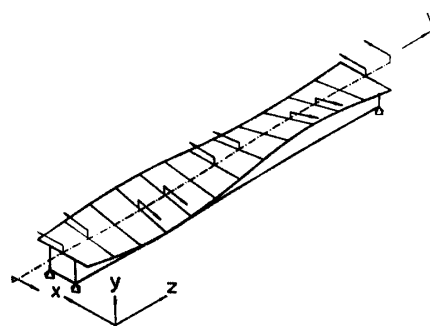


Fig. 2 Beam under traveling horizontal transverse follower load system.

解析に当って、横荷重の作用方向にのみ変形の影響を考慮し、その他の計算には微小変形理論を適用する。また、車両重量は梁の重量に比較して無視できない程、大きい場合もあることを想定して、これ両方の質量を考慮する。動的安定性の検討には、本研究の運動方程式が周期係数をもつ微分方程式となることから、Hill

型の攪乱方程式より、攪乱変位の挙動から安定、不安定の判別をする方法を用いる。係数励振不安定振動、特に、単純共振の境界振動数方程式を Bolotin の方法¹⁾で求め、単純梁の上記共振の不安定領域を示す。

2. 運動方程式

Fig. 3 に示すように、薄肉梁断面の重心 G に原点を置く直交座標を設ける。x および y 軸は断面主軸に、z 軸は梁軸に一致させる。荷重は断面内で (e_x, e_y) の位置に作用する水平荷重 q_x(z) のみを考慮し、断面内の (e_{ix}, e_{iy}) の位置にある z 軸方向に分布する付加質量をも考慮する。

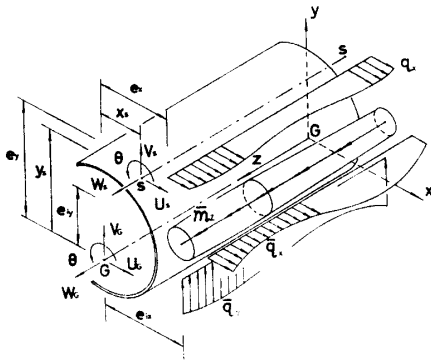


Fig. 3 Displacements and loads of thin-walled beam, and system of coordinates.

Fig. 3 に示すように、せん断中心 S の各座標軸方向の変位を (u_s, v_s, w_s)、重心 G の同様の変位を (u_G, v_G, w_G)、ねじり角を θ とする。

水平横荷重 q_x は従動荷重であることより、ねじり回転にともなって次のように変化する (Fig. 4 参照)。

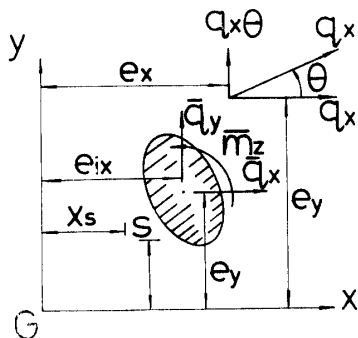


Fig. 4 Horizontal follower load and additional inertia forces due to load mass.

x 方向……q_x, y 方向……q_xθ

さらに、荷重が梁とともに運動することより荷重質量による慣性力 q_y, q_x とモーメント m_z が生じる。

したがって、せん断中心に作用する力およびモーメントは

$$\begin{aligned} x \text{ 方向} &\cdots q_x + \bar{q}_x \\ y \text{ 方向} &\cdots q_x \theta + \bar{q}_y \\ \text{モーメント} &\cdots -q_x(e_y - y_s) + q_x \theta(e_x - x_s) + \bar{m}_z \\ &\quad - \bar{q}_x(e_{iy} - y_s) + \bar{q}_y(e_{ix} - x_s) \end{aligned}$$

となり、梁の曲げとねじりの連成振動の運動方程式は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} m \left(\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} + y_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) + EI_{xx} \frac{\partial^4 u_s}{\partial z^4} - q_x - \bar{q}_x &= 0 \\ m \left(\frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} - x_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) + EI_{yy} \frac{\partial^4 v_s}{\partial z^4} - q_x \theta - \bar{q}_y &= 0 \\ \mu I_{ps} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + m \left(y_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - x_s \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} \right) + EI_{\phi} \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GK \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^4} \\ &+ q_x(e_y - y_s) - q_x \theta(e_x - x_s) - \bar{m}_z + \bar{q}_x(e_{iy} - y_s) \\ &- \bar{q}_y(e_{ix} - x_s) = 0 \end{aligned} \quad \cdots (2.1)$$

ここで、

- m: 梁の単位長さ質量,
- μI_{ps}: 梁断面のせん断中心に関する質量の慣性モーメント,
- EI_{xx}, EI_{yy}: 梁断面の y 軸および x 軸に関する曲げ剛性,
- GK: ねじり剛性,
- EI_φ: 曲げねじり剛性,

支間長 l の梁上を水平横従動荷重が等間隔に連続して走行する場合の水平横荷重 q_x と付加慣性力 q_y, q_x および m_z を以下に示す。

q_x は交互に作用方向が逆になる集中荷重 P cos ωt (P: 荷重振幅, ω: 荷重振動数) からなる Fig. 4 に示す荷重列で、集中荷重間隔は a, 走行速度は V をも

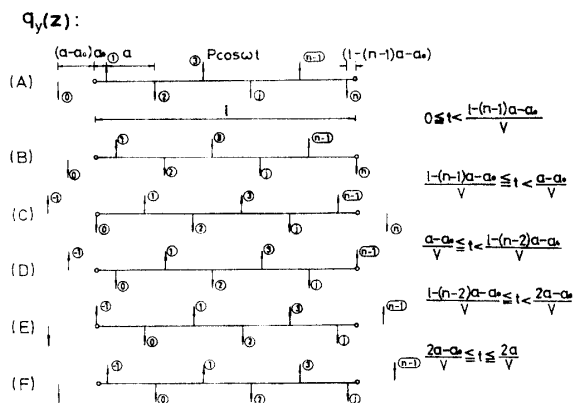


Fig. 5 Traveling horizontal transverse load systems and its moving condition.

つと想定する. Fig. 5 より明らかなように, 速度 V で走行するとき, 周期 $2a/V$ で同じ荷重状態が再現され, q_x は周期 $2a/V$ をもつ次の式で表わされる周期関数になる.

$$q_x = \begin{cases} P \cos \omega t \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \delta(z-\xi) & \dots\dots 0 \leq t < T_{s1} \\ P \cos \omega t \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \delta(z-\xi) & \dots\dots T_{s1} \leq t < T_{s2} \\ P \cos \omega t \sum_{j=1}^n (-1)^j \delta(z-\xi+a) & \dots\dots T_{s2} \leq t < T_{s3} \\ P \cos \omega t \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \delta(z-\xi+a) & \dots\dots T_{s3} \leq t < T_{s4} \\ P \cos \omega t \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \delta(z-\xi+2a) & \dots\dots T_{s4} \leq t \leq T_p \end{cases} \dots\dots (2.2)$$

式中, δ : Dirac の δ 関数, $\xi = Vt + (j-1)a + a_0$, $T_{s1} = \{l - (n-1)a - a_0\}/V$, $T_{s2} = (a - a_0)/V$, $T_{s3} = \{l - (n-2)a - a_0\}/V$, $T_{s4} = (2a - a_0)/V$, $T_p = 2a/V$ である.

ここで, 荷重移動周期 $2a/V$ は荷重振動周期 $2\pi/\omega$ の整数倍である場合を想定する. すなわち,

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \alpha \omega_0 \\ \alpha &: \text{整数}, \quad \omega_0 = \pi V/a \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.3)$$

ω_0 を荷重移動振動数と呼ぶ.

荷重質量に伴う付加慣性力は, 上記集中荷重がそれぞれ質量 M_0 と質量の慣性モーメント J_0 をもつとき, 荷重移動周期の2分の1の周期 a/V をもつ周期関数となり, 質量の中心の水平および鉛直変位がそれぞれ

$$\begin{aligned} x \text{ 方向} &\dots\dots u_s - (e_{iy} - y_s)\theta \\ y \text{ 方向} &\dots\dots v_s + (e_{ix} - x_s)\theta \end{aligned}$$

で表わされることより, 次式となる.

$$\bar{q}_x = \begin{cases} -M_0 \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - (e_{iy} - y_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta(z-\xi) & \dots\dots 0 \leq t < T_{s1} \\ -M_0 \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - (e_{iy} - y_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta(z-\xi) & \dots\dots T_{s1} \leq t < T_{s2} \\ -M_0 \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - (e_{iy} - y_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta(z-\xi+a) & \dots\dots T_{s2} \leq t \leq T_p/2 \end{cases} \dots\dots (2.4)$$

$$\bar{q}_y = \begin{cases} -M_0 \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} + (e_{ix} - x_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta(z-\xi) & \dots\dots 0 \leq t < T_{s1} \\ -M_0 \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} + (e_{ix} - x_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta(z-\xi) & \dots\dots T_{s1} \leq t < T_{s2} \\ -M_0 \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} + (e_{ix} - x_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta(z-\xi+a) & \dots\dots T_{s2} \leq t \leq T_p/2 \end{cases} \dots\dots (2.5)$$

$$\bar{m}_z = \begin{cases} -J_0 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \delta(z-\xi) & \dots\dots 0 \leq t < T_{s1} \\ -J_0 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \delta(z-\xi) & \dots\dots T_{s1} \leq t < T_{s2} \\ -J_0 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \delta(z-\xi+a) & \dots\dots T_{s2} \leq t \leq T_p/2 \end{cases} \dots\dots (2.6)$$

3. 連成振動の解析

運動方程式 (2.1) の解を次の級数で表わす.

$$\left. \begin{aligned} u_s &= \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(t) u_{sk}(z) \\ v_s &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(t) v_{sk}(z) \\ \theta &= \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k(t) \theta_k(z) \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.1)$$

式中, ρ_k, σ_k および τ_k は時間に関する未知関数である. u_{sk} および v_{sk} はそれぞれ水平および鉛直曲げ振動の k 次の固有関数であり, θ_k はねじり振動の k 次の固有関数である. 単純梁の場合, これらは次式で表わされる.

$$u_{sk} = v_{sk} = \sin \frac{k\pi z}{l} \dots\dots (3.2)$$

上式 (3.1) および (3.2) を運動方程式 (2.1), 水平横荷重 (2.2) および付加慣性力 (2.4)~(2.6) に代入し, 固有関数の直交性を利用して整理すると, 運動方程式は次式となる.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho_k}{dt^2} + \frac{2M_0}{lm} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_{ki} \frac{d^2 \rho_i}{dt^2} + y_s \frac{d^2 \tau_k}{dt^2} \\ + \frac{2M_0(\rho_{iy} - y_s)}{lm} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_{ki} \frac{d^2 \tau_k}{dt^2} + \omega_{sk}^2 \rho_k - \frac{2P}{lm} g_k = 0 \\ \frac{d^2 \sigma_k}{dt^2} + \frac{2M_0}{lm} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_{ki} \frac{d^2 \sigma_i}{dt^2} - x_s \frac{d^2 \tau_k}{dt^2} + \frac{2M_0(e_{ix} - x_s)}{lm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_{ki} \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} + \omega_{vk}^2 \sigma_k - \frac{2P}{lm} \sum_{i=1}^{\infty} f_{ki} \tau_i = 0 \\
 & \frac{m y_s}{\mu I_{ps}} \frac{d^2 \rho_k}{dt^2} - \frac{2M_0(e_{iy} - y_s)}{\mu I_{ps} l} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_{ki} \frac{d^2 \rho_i}{dt^2} - \frac{m x_s}{\mu I_{ps}} \frac{d^2 \sigma_k}{dt^2} \\
 & + \frac{2M_0(e_{ix} - x_s)}{\mu I_{ps} l} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_{ki} \frac{d^2 \sigma_i}{dt^2} + \frac{d^2 \tau_k}{dt^2} + \frac{2J_s}{\mu I_{ps} l} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_{ki} \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} \\
 & + \omega_{vk}^2 \tau_k - \frac{2P(e_x - x_s)}{\mu I_{ps} l} \sum_{i=1}^{\infty} f_{ki} \tau_i + \frac{2P(e_y - y_s)}{\mu I_{ps} l} g_k = 0 \\
 & k = 1, 2, \dots \dots (3.5)
 \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 J_s &= J_0 + M_0 \{ (e_{ix} - x_s)^2 + (e_{iy} - y_s)^2 \}, \\
 \omega_{uk} &= \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_{xx}}{m}}, \quad \omega_{vk} = \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_{yy}}{m}}, \\
 \omega_{\theta k} &= \sqrt{\left(\frac{k\pi}{l} \right)^4 \frac{EI_{\omega}}{\mu I_{ps}} + \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \frac{GK}{\mu I_{ps}}}
 \end{aligned}$$

$$\tilde{f}_{ki} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \sin \frac{k\pi \xi}{l} \sin \frac{i\pi \xi}{l} & \dots 0 \leq t < T_{s1} \\ \sum_{j=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi \xi}{l} \sin \frac{i\pi \xi}{l} & \dots T_{s1} \leq t < T_{s2} \\ \sum_{j=1}^n \sin \frac{k\pi(\xi-a)}{l} \sin \frac{i\pi(\xi-a)}{l} & \dots T_{s2} \leq t \leq T_p/2 \end{cases} \dots \dots (3.6)$$

$$f_{ki} = \begin{cases} \cos \omega t \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sin \frac{k\pi \xi}{l} \sin \frac{i\pi \xi}{l} & \dots 0 \leq t < T_{s1} \\ \cos \omega t \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \sin \frac{k\pi \xi}{l} \sin \frac{i\pi \xi}{l} & \dots T_{s1} \leq t < T_{s2} \\ \cos \omega t \sum_{j=1}^n (-1)^j \sin \frac{k\pi(\xi-a)}{l} \sin \frac{i\pi(\xi-a)}{l} & \dots T_{s2} \leq t < T_{s3} \\ \cos \omega t \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \sin \frac{k\pi(\xi-a)}{l} \sin \frac{i\pi(\xi-a)}{l} & \dots T_{s3} \leq t < T_{s4} \\ \cos \omega t \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sin \frac{k\pi(\xi-2a)}{l} \sin \frac{i\pi(\xi-2a)}{l} & \dots T_{s4} \leq t \leq T_p \end{cases} \dots \dots (3.7)$$

$$g_k = \begin{cases} \cos \omega t \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sin \frac{k\pi \xi}{l} & \dots 0 \leq t < T_{s1} \\ \cos \omega t \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \sin \frac{k\pi \xi}{l} & \dots T_{s1} \leq t < T_{s2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \omega t \sum_{j=1}^n (-1)^j \sin \frac{k\pi(\xi-a)}{l} & \dots T_{s2} \leq t < T_{s3} \\ \cos \omega t \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \sin \frac{k\pi(\xi-a)}{l} & \dots T_{s3} \leq t < T_{s4} \\ \cos \omega t \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sin \frac{k\pi(\xi-2a)}{l} & \dots T_{s4} \leq t \leq T_p \end{cases} \dots \dots (3.8)$$

式 (3.5) は無限連立方程式となるが, ここで, 振動変位を N 項からなる有限級数で近似して, 有限連立方程式とし, マトリックス表示する.

$$(A + A_M) \frac{d^2 f}{dt^2} + (B + PC)f + d = 0 \dots \dots (3.9)$$

ここで,

$$f = \{ \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N \}^T \dots \dots (3.10)$$

$$A = \begin{bmatrix} [A_{1rs}] & [A_{2rs}] & [A_{3rs}] \\ [A_{4rs}] & [A_{5rs}] & [A_{6rs}] \\ [A_{7rs}] & [A_{8rs}] & [A_{9rs}] \end{bmatrix} r, s = 1, 2, \dots, N \dots \dots (3.11)$$

$$\begin{aligned}
 A_{1rs} &= A_{5rs} = A_{9rs} = \delta_{rs}, \quad A_{2rs} = A_{4rs} = 0, \\
 A_{3rs} &= y_s \delta_{rs}, \quad A_{6rs} = -x_s \delta_{rs}, \quad A_{7rs} = m y_s / \mu I_{ps}, \\
 A_{8rs} &= -m x_s / \mu I_{ps}, \quad \delta_{rs}: \text{Kronecker の記号}
 \end{aligned}$$

$$A_M = \begin{bmatrix} [A_{M1rs}] & [A_{M2rs}] & [A_{M3rs}] \\ [A_{M4rs}] & [A_{M5rs}] & [A_{M6rs}] \\ [A_{M7rs}] & [A_{M8rs}] & [A_{M9rs}] \end{bmatrix} r, s = 1, 2, \dots, N \dots \dots (3.12)$$

$$\begin{aligned}
 A_{M1rs} &= 2M_0 \tilde{f}_{rs} / lm, \quad A_{M2rs} = 0, \\
 A_{M3rs} &= -2M_0(e_{iy} - y_s) \tilde{f}_{rs} / lm, \quad A_{M4rs} = 0, \\
 A_{M5rs} &= A_{M1rs}, \quad A_{M6rs} = 2M_0(e_{ix} - x_s) \tilde{f}_{rs} / lm, \\
 A_{M7rs} &= -2M_0(e_{iy} - y_s) \tilde{f}_{rs} / \mu I_{ps} l, \\
 A_{M8rs} &= 2M_0(e_{ix} - x_s) \tilde{f}_{rs} / \mu I_{ps} l, \\
 A_{M9rs} &= 2J_s \tilde{f}_{rs} / \mu I_{ps} l.
 \end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} [B_{1rs}] & [B_{2rs}] & [B_{3rs}] \\ [B_{4rs}] & [B_{5rs}] & [B_{6rs}] \\ [B_{7rs}] & [B_{8rs}] & [B_{9rs}] \end{bmatrix} r, s = 1, 2, \dots, N \dots \dots (3.13)$$

$$\begin{aligned}
 B_{1rs} &= \omega_{ur}^2 \delta_{rs}, \quad B_{5rs} = \omega_{vr}^2 \delta_{rs}, \quad B_{9rs} = \omega_{\theta r}^2 \delta_{rs} \\
 B_{2rs} &= B_{3rs} = B_{4rs} = B_{6rs} = B_{7rs} = B_{8rs} = 0.
 \end{aligned}$$

$$C = \begin{bmatrix} [C_{1rs}] & [C_{2rs}] & [C_{3rs}] \\ [C_{4rs}] & [C_{5rs}] & [C_{6rs}] \\ [C_{7rs}] & [C_{8rs}] & [C_{9rs}] \end{bmatrix} r, s = 1, 2, \dots, N \dots \dots (3.14)$$

$$C_{1rs} = C_{2rs} = C_{3rs} = C_{4rs} = C_{5rs} = C_{7rs} = C_{8rs} = 0,$$

$$C_{6rs} = -2f_{rs}/lm, C_{9rs} = -2(e_x - x_s)f_{rs}/\mu I_{ps}l.$$

$$\mathbf{d} = \begin{cases} \{d_{1r}\} \\ \{d_{2r}\} \\ \{d_{3r}\} \end{cases}_{r=1, 2, \dots, N} \quad \dots\dots (3.15)$$

$$d_{1r} = -2g_r/lm, d_{2r} = 0, d_{3r} = 2(e_y - y_s)g_r/\mu I_{ps}l.$$

式 (3,9) を解析することにより、振動変位の時間的経過が明らかになり、荷重質量を考慮した場合の連行した水平横従動荷重に対する動的応答が求められる。

4. 連成振動の安定性解析

連成振動の安定性の判定は定常振動状態に攪乱を与えたときの攪乱変位の時間経過にともなう挙動変化によるものとする。以下、攪乱方程式を求め、同方程式の安定解と不安定解の境界を示す境界振動数方程式を Bolotin の方法により導びき、単純共振のみの係数励振不安定領域を示す。

4.1 攪乱方程式

連行水平横従動荷量を受けて定常振動している状態の攪乱 δ を与えたとき、攪乱状態の解は $\mathbf{f} + \delta$ で表わされる。このとき δ の満すべき攪乱方程式は次式で表わされる。

$$(\mathbf{A} + \mathbf{A}_M)\ddot{\delta} + (\mathbf{B} + \mathbf{PC})\dot{\delta} = \mathbf{0} \quad \dots\dots (4.1)$$

上式中、 \mathbf{A}_M には \tilde{f}_{rs} を含むことより a/V なる周期をもつものに対して、 \mathbf{C} は f_{rs} を含む $2a/V$ なる周期をもつ。したがって、 $(\mathbf{A} + \mathbf{A}_M)^{-1}(\mathbf{B} + \mathbf{PC})$ は \mathbf{C} と同じ周期をもつことより式 (4.1) は Hill 方程式に相当する。

\mathbf{A}_M に含まれる \tilde{f}_{rs} は a/V なる周期をもつが、 $2a/V$ なる周期ももつ。ここで、 \tilde{f}_{rs} および f_{rs} を周期 $2a/V$ をもつ Fourier 級数に展開する。すなわち、

$$\begin{aligned} \begin{cases} f_{rs} \\ \tilde{f}_{rs} \end{cases} &= \frac{1}{2} \begin{cases} a_{0rs} \\ \tilde{a}_{0rs} \end{cases} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\begin{cases} a_{prs} \\ \tilde{a}_{prs} \end{cases} \cos p\omega_0 t \right. \\ &\quad \left. + \begin{cases} b_{prs} \\ \tilde{b}_{prs} \end{cases} \sin p\omega_0 t \right) \quad \dots\dots (4.2) \end{aligned}$$

式 (4.2) を式 (4.1) に代入整理すると、次式になる。

$$\begin{aligned} &[\mathbf{A} + \{\mathbf{A}_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (\mathbf{A}_{1p} \cos p\omega_0 t + \mathbf{A}_{2p} \sin p\omega_0 t)\}] \ddot{\delta} \\ &+ [\mathbf{B} + \mathbf{P}\{\mathbf{C}_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (\mathbf{C}_{1p} \cos p\omega_0 t + \mathbf{C}_{2p} \sin p\omega_0 t)\}] \dot{\delta} \\ &= \mathbf{0} \quad \dots\dots (4.3) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_{1p}, \mathbf{A}_{2p}, \mathbf{C}_0, \mathbf{C}_{1p}, \mathbf{C}_{2p}$ はそれぞれ次の

要素をもつ。

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} [A_{01rs}] & [A_{02rs}] & [A_{03rs}] \\ [A_{04rs}] & [A_{05rs}] & [A_{06rs}] \\ [A_{07rs}] & [A_{08rs}] & [A_{09rs}] \end{bmatrix}_{r, s=1, 2, \dots, N} \quad \dots\dots (4.4)$$

$$A_{01rs} = M_0 \tilde{a}_{0rs}/lm, A_{02rs} = 0,$$

$$A_{03rs} = M_0(e_{iy} - y_s) \tilde{a}_{0rs}/lm, A_{04rs} = 0,$$

$$A_{05rs} = A_{01rs}, A_{06rs} = M_0(e_{ix} - x_s) \tilde{a}_{0rs}/lm,$$

$$A_{07rs} = -M_0(e_{iy} - y_s) \tilde{a}_{0rs}/\mu I_{ps}l,$$

$$A_{08rs} = M_0(e_{ix} - x_s) \tilde{a}_{0rs}/\mu I_{ps}l,$$

$$A_{09rs} = J_s \tilde{a}_{0rs}/\mu I_{ps}l.$$

$$\mathbf{A}_{1p} = \begin{bmatrix} [A_{11rs}] & [A_{12rs}] & [A_{13rs}] \\ [A_{14rs}] & [A_{15rs}] & [A_{16rs}] \\ [A_{17rs}] & [A_{18rs}] & [A_{19rs}] \end{bmatrix}_{r, s=1, 2, \dots, N} \quad \dots\dots (4.5)$$

$$A_{11rs} = 2M_0 \tilde{a}_{prs}/lm, A_{12rs} = 0,$$

$$A_{13rs} = -2M_0(e_{iy} - y_s) \tilde{a}_{prs}/lm, A_{14rs} = 0,$$

$$A_{15rs} = A_{11rs}, A_{16rs} = 2M_0(e_{ix} - x_s) \tilde{a}_{prs}/lm,$$

$$A_{17rs} = -2M_0(e_{iy} - y_s) \tilde{a}_{prs}/\mu I_{ps}l,$$

$$A_{18rs} = 2M_0(e_{ix} - x_s) \tilde{a}_{prs}/\mu I_{ps}l,$$

$$A_{19rs} = 2J_s \tilde{a}_{prs}/\mu I_{ps}l.$$

$$\mathbf{A}_{2p} = \begin{bmatrix} [A_{21rs}] & [A_{22rs}] & [A_{23rs}] \\ [A_{24rs}] & [A_{25rs}] & [A_{26rs}] \\ [A_{27rs}] & [A_{28rs}] & [A_{29rs}] \end{bmatrix}_{r, s=1, 2, \dots, N} \quad \dots\dots (4.6)$$

$$A_{21rs} = 2M_0 \tilde{b}_{prs}/lm, A_{22rs} = 0,$$

$$A_{23rs} = -2M_0(e_{iy} - y_s) \tilde{b}_{prs}/lm, A_{24rs} = 0,$$

$$A_{25rs} = A_{21rs}, A_{26rs} = 2M_0(e_{ix} - x_s) \tilde{b}_{prs}/lm,$$

$$A_{27rs} = -2M_0(e_{iy} - y_s) \tilde{b}_{prs}/\mu I_{ps}l,$$

$$A_{28rs} = 2M_0(e_{ix} - x_s) \tilde{b}_{prs}/\mu I_{ps}l,$$

$$A_{29rs} = 2J_s \tilde{b}_{prs}/\mu I_{ps}l.$$

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} [C_{01rs}] & [C_{02rs}] & [C_{03rs}] \\ [C_{04rs}] & [C_{05rs}] & [C_{06rs}] \\ [C_{07rs}] & [C_{08rs}] & [C_{09rs}] \end{bmatrix}_{r, s=1, 2, \dots, N} \quad \dots\dots (4.7)$$

$$C_{01rs} = C_{02rs} = C_{03rs} = C_{04rs} = C_{05rs} = C_{07rs} = C_{08rs} = 0,$$

$$C_{06rs} = -a_{0rs}/lm, C_{09rs} = -(e_x - x_s)a_{0rs}/\mu I_{ps}l.$$

$$\mathbf{C}_{1p} = \begin{bmatrix} [C_{11rs}] & [C_{12rs}] & [C_{13rs}] \\ [C_{14rs}] & [C_{15rs}] & [C_{16rs}] \\ [C_{17rs}] & [C_{18rs}] & [C_{19rs}] \end{bmatrix}_{r, s=1, 2, \dots, N} \quad \dots\dots (4.8)$$

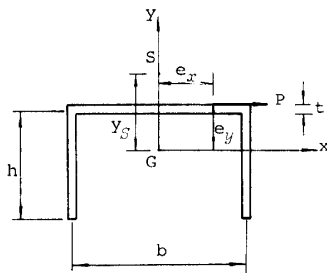


Fig. 6 Cross-section of thin-walled beam.

面諸量をもつ単純梁を対象とする。

$$t/h=0.02, b/h=1.5, h/l=0.05, x_s/h=0, y_s/h=0.6857, e_x/h=e_{ix}/h=0.375, e_y/h=e_{iy}/h=0.2956, I_{yy}/I_{xx}=0.2709, Ah^2/I_{ps}=1.0191, \{EI_0^s(\pi/l)^4+GK(\pi/l)^2\}/h^2EI_{xx}(\pi/l)^4=1.11188$$

数値計算に当たって、振動解 (3.1) の座標関数は 1 次の固有関数のみを取り、境界振動数方程式 (4.17) の計算では、攪乱解 (4.10) の 2 項 ($\zeta=1, 3$) を取り、式 (4.25) の計算では攪乱解 (4.18) の 2 項 ($\zeta=2, 4$) を取った。また、Fourier 級数は 4 項 ($p=1\sim 4$) までを用いた。

以下、荷重振動数、荷重間隔 (梁上の荷重数) および荷重質量の影響を示す。図中、縦軸は無次元荷重 $P_* = P/\{EI_0^s(\pi/l)^4+GK(\pi/l)^2\}$ を、横軸は荷重移動振動数 ω_0 を平均荷重作用時の第 1 固有値 Ω_1 の 2 倍で除した無次元振動数を表わす。ここで、 Ω_1 は運動方程式

$$(A+A_0)\ddot{\delta}+(B+PC_0)\dot{\delta}=0$$

の第 1 固有値で、第 2 および第 3 固有値をそれぞれ Ω_2 および Ω_3 とする。第 1 次モードはねじり振動が卓越し、第 2 および 3 次モードはそれぞれ鉛直および水平振動が卓越する。

(荷重振動数の影響)

荷重質量を無視し、荷重間隔 $a/l=1.05$ の場合の単純共振の係数励振不安定領域を Fig. 7 に示す。図には荷重振動数 ω が 0, ω_0 , $2\omega_0$ および $5\omega_0$ の場合の領域を示す。図中、斜線部が不安定領域である。さらに、 $\omega_0=2\Omega_1$ の近傍の $P_*=20$ における不安定領域幅 (W_u) の荷重振動数の変化に伴う挙動を Fig. 8 に示す。 α が奇数の場合と 0 および偶数の場合で異なるが、 ω の増加に伴って不安定領域幅は減少し安定化することがわかる。

(梁上の荷重数の影響)

荷重質量を無視し、荷重振動数がゼロの場合の単純共振の係数励振不安定領域を Fig. 9 に示す。図には

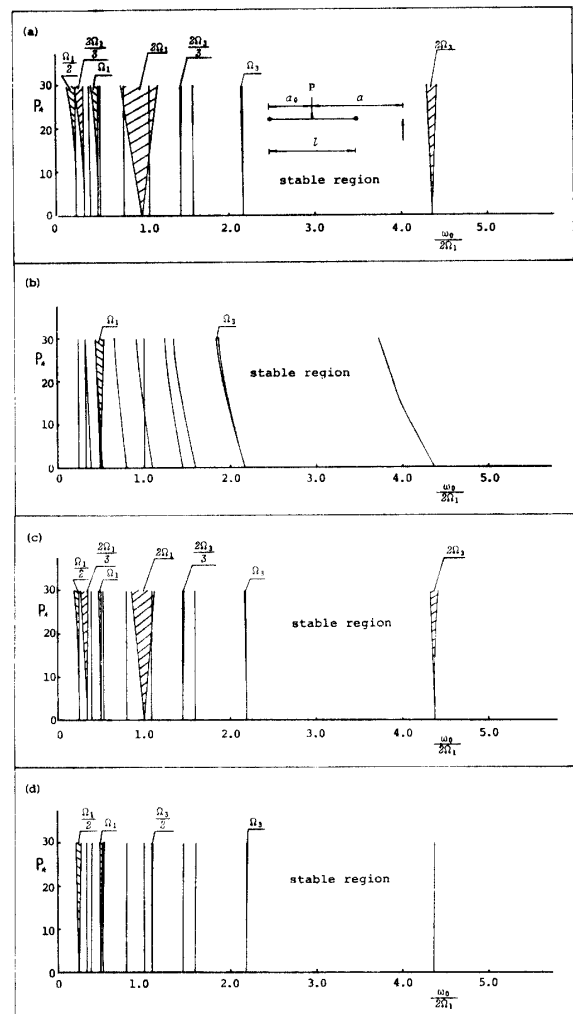


Fig. 7 Regions of simple parametric instability of a simply supported beam under traveling horizontal transverse follower load systems with various values of ω when $a/l=1.05$ and load mass is neglected. (a) $\omega=0$; (b) $\omega=\omega_0$; (c) $\omega=2\omega_0$; (d) $\omega=5\omega_0$.

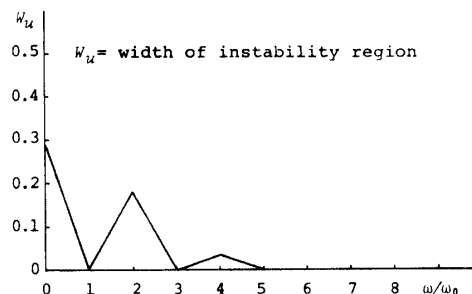


Fig. 8 Change of width of the instability region in the vicinity of $\omega_0=2\Omega_1$, when $P_*=20$ and $a/l=1.05$, with circular frequency of load ω .

梁上の荷重数が 1, 2 および 5 の場合の領域を示す。図中の $\omega_0=2\Omega_1$ の近傍の $P_*=20$ における不安定領

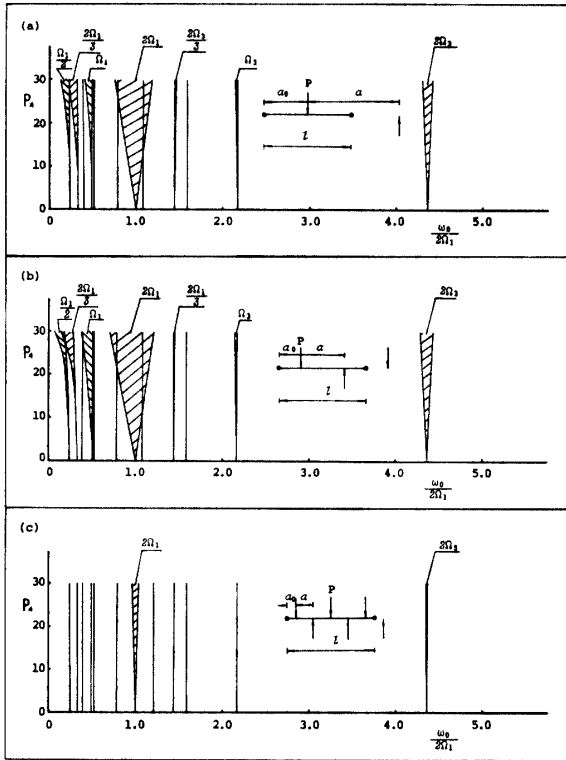


Fig. 9 Regions of simple parametric instability of a simply supported beam under traveling horizontal transverse follower load system with various values of a/l when $\omega_0=0$ and load mass is neglected.

(a) $a_0/l=0.5$ and $a/l=1.05$; (b) $a_0/l=0.25$ and $a/l=0.5$; (c) $a_0/l=0.10$ and $a/l=0.20$.

域幅 (W_u) の荷重数 (n) の変化に伴う挙動を Fig. 10 に示す。梁上の荷重数の増加に伴って領域幅は荷重 2 をピークに減少することがわかる。

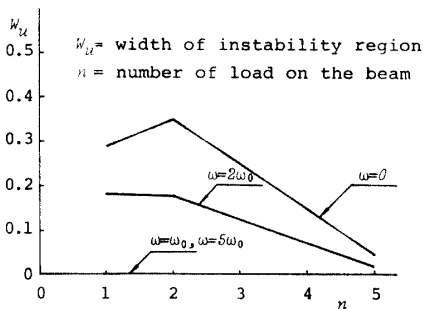


Fig. 10 Change of width of the instability region in the vicinity of $\omega_0=2\Omega_1$, when $P_*=20$ and $\omega=0$, with number of load on the beam.

(荷重質量の影響)

荷重質量 $M_0/lm=0.103453$, $J_0/\mu I_{ps}l=0.004394$ をもち、荷重間隔 $a/l=1.05$ の場合の単純共振の係数励

振不安定領域を Fig. 11 に示す。図には荷重振動数 ω が 0 , ω_0 , $2\omega_0$ および $5\omega_0$ の場合の領域を示す。図より明らかなように、主に、 $\omega_0=\Omega_2$ および Ω_3 の近傍の不安定領域が影響を受け不安定化することがわかる。

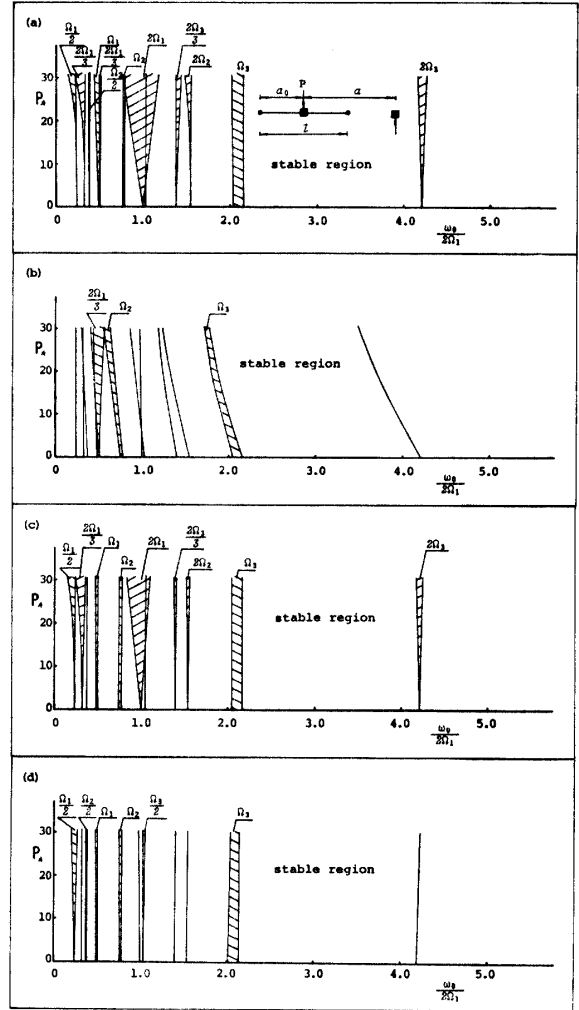


Fig. 11 Regions of simple parametric instability of a simply supported beam under traveling horizontal transverse follower load system with various values of ω when $a/l=1.05$, $M_0/lm=0.103453$ and $J_0/\mu I_{sp}l=0.004394$. (a) $\omega=0$; (b) $\omega=\omega_0$; (c) $\omega=2\omega_0$; (d) $\omega=5\omega_0$.

6. 結 び

連続走行する水平横従動荷重を受ける梁の動的弾性安定性を明らかにするに当たり、梁の運動の攪乱方程式が Hill 方程式になり係数励振不安定振動が起ることを示した。また、梁系の動的不安定性の解析に有用な単純パラメトリック共振の境界振動数方程式を Bolotin

の方法を用いて求め提示した。適用例として単純梁の単純共振不安定領域を明らかにした。

本研究の数値計算は松本敏君（若築建設）および福田徹君（山口県）の協力を得、九州大学大型計算機センターの FACOM M-200 および山口大学情報処理センターの FACOM 230-28 ならびに ACOS-800 により行った。また、本研究の一部は昭和 55 年度の文部省

科学研究費（一般研究 D）の補助を受けた。ここに記して感謝します。

参 考 文 献

- 1) ボローチン（近藤・中田訳）：弾性系の動的安定，コロナ社（1972），p. 15.

（昭和 57 年 4 月 16 日 受理）