

走行従動荷重を受ける梁の特性指数を用いた動的弾性安定解析

會田 忠義*・平井 利典**・中山 高明**

Analysis of Dynamic Elastic Stability of Beams under Traveling Follower Load Systems by the Characteristic Exponent

Tadayoshi AIDE, Toshifumi HIRAI and Takaaki NAKAYAMA

Abstract

It is well known that there is a method proposed by Bolotin for analytical method of parametrically excited unstable vibrations and unstable regions of simple resonances are only evaluated by above method. In this paper, an analytical method of investigation of the unstable regions of beams under traveling follower load system which are multi-degree-of-freedom parametric dynamic system is presented by using the characteristic exponents, and simple and combination resonances of beams under traveling vertical and horizontal transverse follower load systems are estimated.

1. まえがき

従動荷重が梁上を規則的に連続走行する場合、梁の運動の攪乱方程式はHill方程式になる¹⁾。運動がHill方程式で表わされる系には係数励振振動が発生し、次のような共振が起ることは周知の通りである。すなわち、単純共振 (Simple Resonance) として、主共振 (Main Re.), 分数調波共振 (Sub-harmonic Re.), 高調波共振 (Ultra-harmonic Re.) 及び高分数調波共振 (Ultra-Subharmonic Re.), 及び結合共振 (Combination Re.) として和形結合共振 (Combination Re. of Summed Type) 及び差形結合共振 (Combination Re. of Differential Type) である。

係数励振振動の不安定領域を求める方法に、励振振動周期と同じか、その2倍の周期をもつ振動解が安定領域と不安定領域を区分することから、上記の周期をもつ解をFourier級数で表わし、これらの解の存在条件から不安定領域の境界を示す境界振動数方程式を求めるBolotin²⁾の方法がある。この方法では、単純共振領域のみが決定され、結合共振領域が求められない。著者らのこれまでの研究¹⁾では主にこの方法に基づき単純共振領域のみに注目してきた。

本研究の方法は、Hill方程式の一般解が、特性指数を λ 、方程式の周期係数の周期と同じ周期をもつ周期関数

を $\varphi(t)$ とするとき、 $e^{\lambda t}\varphi(t)$ で表わされる (Floquetの定理)³⁾ことより、この解の存在条件を求めることに相当する。この条件より指数 λ が与えられた励振振動数と荷重パラメータのもとで、どのような符号をもつ値を取るかにより安定・不安定の判定を行うものである。本研究と同様の方法に高橋の研究⁴⁾があるが、本研究は任意の周期をもつ周期係数を含む連成したHill方程式への拡張に相当する。最後に、連行した鉛直及び水平横従動荷重を受ける梁の解析結果を示す。

2. 攪乱方程式

連行した鉛直従動荷重を受ける場合及び同様の水平横従動荷重を受ける場合の梁の運動の攪乱方程式は次式で表わされる¹⁾。

$$\{A + A_M(t)\} \delta'' + D\delta' + \{B + PC(t)\} \delta = 0 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} A_M(t) &= A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (A_{1p} \cos p\omega_0 t + A_{2p} \sin p\omega_0 t) \\ C(t) &= C_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (C_{1p} \cos p\omega_0 t + C_{2p} \sin p\omega_0 t) \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

ここで、

δ : 攪乱変位ベクトル、

P : 集中荷重の振幅

ω_0 : 荷重移動振動数

t : 時刻

*建設工学科

**大学院土木工学専攻

$$[A_M]_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & -3A_{26} & -2(A_{25}-A_{21}) & -(A_{24}-A_{22}) & O & (A_{14}+A_{12}) & 2(A_{15}+A_{11}) & 3(A_{16}+2A_0) & \cdots \\ \cdots & -3(A_{25}+A_{21}) & -2A_{24} & -(A_{23}-A_{21}) & O & (A_{13}+A_{11}) & 2(A_{14}+2A_0) & 3(A_{15}+A_{11}) & \cdots \\ \cdots & -3(A_{24}+A_{22}) & -2(A_{23}+A_{21}) & -A_{22} & O & (A_{12}+2A_0) & 2(A_{13}+A_{11}) & 3(A_{14}+A_{12}) & \cdots \\ \cdots & -3A_{23} & -2A_{22} & -A_{21} & O & A_{11} & 2A_{12} & 3A_{13} & \cdots \\ \cdots & 3(A_{14}-A_{12}) & 2(A_{13}-A_{11}) & (A_{12}-2A_0) & O & A_{22} & 2(A_{23}-A_{21}) & 3(A_{24}-A_{22}) & \cdots \\ \cdots & 3(A_{15}-A_{11}) & 3(A_{14}-2A_0) & (A_{13}-A_{11}) & O & (A_{23}+A_{21}) & 2A_{24} & 3(A_{25}-A_{21}) & \cdots \\ \cdots & 3(A_{16}-2A_0) & 2(A_{15}-A_{11}) & (A_{14}-A_{12}) & O & (A_{24}+A_{22}) & 2(A_{25}+A_{21}) & 3A_{26} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \cdots (11)$$

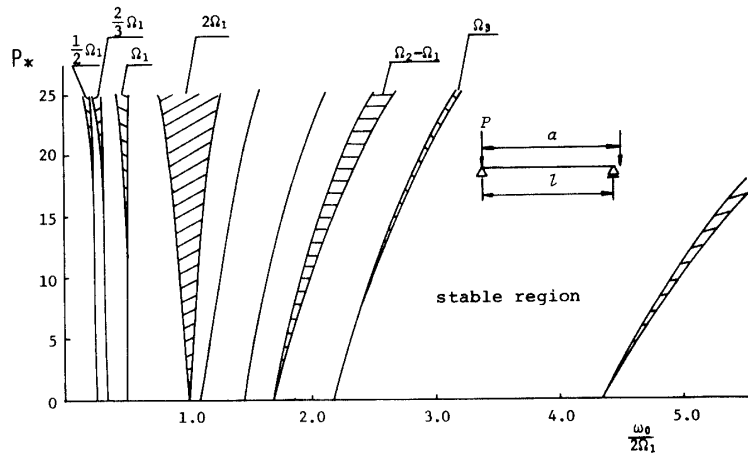
$$[A_M]_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & (2A_0+A_{16}) & (A_{11}+A_{15}) & (A_{12}+A_{14}) & A_{13} & (A_{24}-A_{22}) & (A_{25}-A_{21}) & A_{26} & \cdots \\ \cdots & (A_{11}+A_{15}) & (2A_0+A_{14}) & (A_{11}+A_{13}) & A_{12} & (A_{23}-A_{21}) & A_{24} & (A_{25}+A_{21}) & \cdots \\ \cdots & (A_{12}+A_{14}) & (A_{11}+A_{13}) & (2A_0+A_{12}) & A_{11} & A_{22} & (A_{23}+A_{21}) & (A_{24}+A_{22}) & \cdots \\ \cdots & A_{13} & A_{12} & A_{11} & A_0 & A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots \\ \cdots & (A_{24}-A_{22}) & (A_{23}-A_{21}) & A_{22} & A_{21} & (2A_0-A_{12}) & (A_{11}-A_{13}) & (A_{12}-A_{14}) & \cdots \\ \cdots & (A_{25}-A_{21}) & A_{24} & (A_{23}+A_{21}) & A_{22} & (A_{11}-A_{13}) & (2A_0-A_{14}) & (A_{11}-A_{15}) & \cdots \\ \cdots & A_{26} & (A_{25}+A_{21}) & (A_{24}+A_{22}) & A_{23} & (A_{12}-A_{14}) & (A_{11}-A_{15}) & (2A_0-A_{16}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \cdots (12)$$

$$[B] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \ddots & & & & & \\ & B & & & & \\ & & B & & & \\ & & & B & & \\ \hline & & & \frac{1}{2}B & & \\ \hline & & & & B & \\ & & & & & B \\ & & & & & & B \\ & & & & & & & \ddots \end{array} \right) \cdots (13)$$

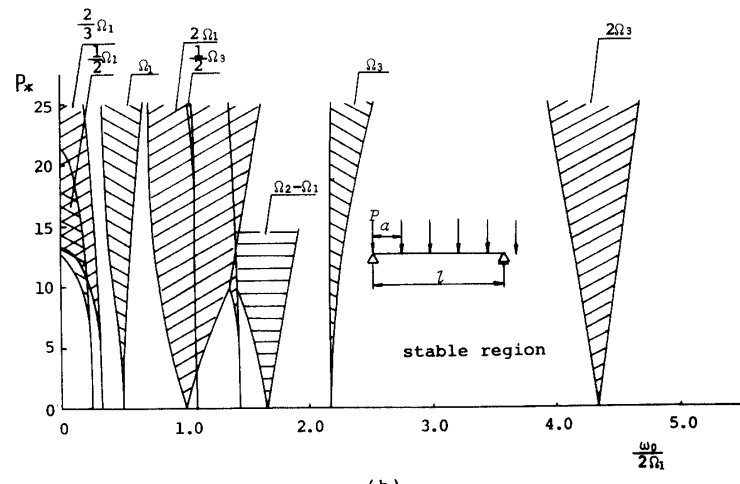
$$[C] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & (2C_0+C_{16}) & (C_{11}+C_{15}) & (C_{12}+C_{14}) & C_{13} & (C_{24}-C_{22}) & (C_{25}-C_{21}) & C_{26} & \cdots \\ \cdots & (C_{11}+C_{15}) & (2C_0+C_{14}) & (C_{11}+C_{13}) & C_{12} & (C_{23}-C_{21}) & C_{24} & (C_{25}+C_{21}) & \cdots \\ \cdots & (C_{12}+C_{14}) & (C_{11}+C_{13}) & (2C_0+C_{12}) & C_{11} & C_{22} & (C_{23}+C_{21}) & (C_{24}+C_{22}) & \cdots \\ \cdots & C_{13} & C_{12} & C_{11} & C_0 & C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots \\ \cdots & (C_{24}-C_{22}) & (C_{23}-C_{21}) & C_{22} & C_{21} & (2C_0-C_{12}) & (C_{11}-C_{13}) & (C_{12}-C_{14}) & \cdots \\ \cdots & (C_{25}-C_{21}) & C_{24} & (C_{23}+C_{21}) & C_{22} & (C_{11}-C_{13}) & (2C_0-C_{14}) & (C_{11}-C_{15}) & \cdots \\ \cdots & C_{26} & (C_{25}+C_{21}) & (C_{24}+C_{22}) & C_{23} & (C_{12}-C_{14}) & (C_{11}-C_{15}) & (2C_0-C_{16}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \cdots (14)$$

$$[D]_0 = \begin{pmatrix} & & & & \dots \\ & & & & & \dots \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \dots \\ & \dots \\ & \dots \\ & \dots \end{pmatrix} \dots (15)$$

$$[D]_1 = \begin{pmatrix} & & & & \dots \\ & & & & & \dots \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \dots \\ & \dots \\ & \dots \end{pmatrix} \dots (16)$$

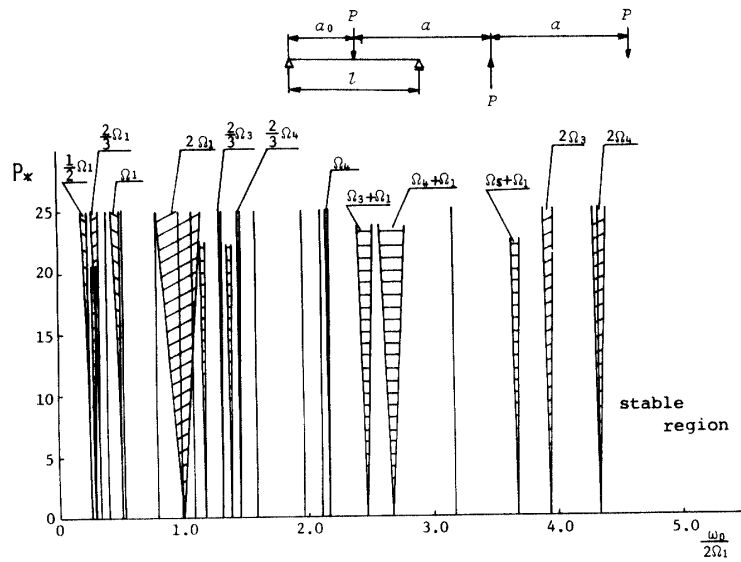


(a)

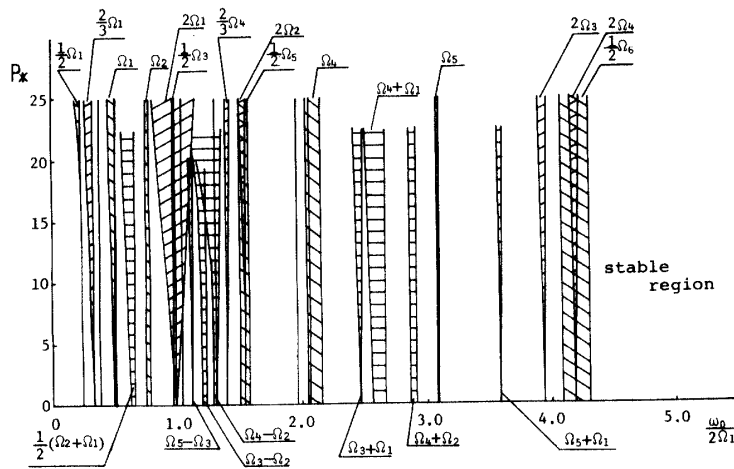


(b)

Fig.1 Regions of parametric instability for a simply supported beam under traveling vertical follower load system when $M_0 = J_0 = 0$. (a) constant load ($\omega = 0$) with $a/\ell = 1.05$; (b) periodic load ($\omega = \omega_0$) with $a/\ell = 0.22$.



(a)



(b)

Fig.2 Regions of parametric instability for a simply supported beam under traveling horizontal follower load system when $a_0/l=0.50$ and $a/l=1.05$. (a) $M_0=J_0=0$; (b) $M_0/lm=0.103453$ and $J_0/\mu I_{ps}l=0.004394$.

x がゼロ以外の解をもつためには、式(5)の係数行列式がゼロでなければならない。すなわち、

$$\begin{aligned} &| -\omega_0^2([A]_0 + \frac{1}{2}[A_M]_0) + \omega_0[D]_0 + [B] + \frac{P}{2}[C] \\ &+ 2\lambda\omega_0([A]_1 + \frac{1}{2}[A_M]_1) + \lambda[D]_1 \\ &+ 2\lambda^2\omega_0([A]_2 + \frac{1}{2}[A_M]_2) | = 0 \quad \dots\dots (17) \end{aligned}$$

上式が特性方程式である。式(17)の固有値として特性指数 λ を求めればよい。固有計算に当て次のように変換すると計算が容易である。

$$\left[\begin{array}{cc} [O] & [E] \\ -[A_T]^{-1}[K] - [A_T]^{-1}[D_T] & \end{array} \right] - \lambda \left[\begin{array}{cc} [E] & [O] \\ [O] & [E] \end{array} \right] = 0 \quad \dots (18)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} [A_T] &= [A]_2 + \frac{1}{2}[A_M]_2 \\ [D_T] &= 2\omega_0([A]_1 + \frac{1}{2}[A_M]_1) + [D]_1 \\ [K] &= -\omega_0^2([A]_0 + \frac{1}{2}[A_M]_0) + \omega_0[D]_0 \\ &+ [B] + \frac{P}{2}[C] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (19)$$

4. 単純梁の動的弾性安定性

単純梁の結合共振も含めた動的不安定領域を上述の方法により求める。次の断面諸量をもつ梁¹⁾を対象とする。

$$\begin{aligned} h/l &= 0.05, \quad x_s/h = 0, \quad y_s/h = 0.6857, \quad I_{yy}/I_{xx} = 0.2709, \\ Ah^2/I_{ps} &= 1.0191, \quad \{EI^s \omega(\pi/l)^4 + GK(\pi/l)^2\}/h^2 EI_{xx} \\ (\pi/l)^4 &= 1.11188, \quad h = \text{梁の高さ。} \end{aligned}$$

鉛直従動荷重の作用位置は $e_x/h = e_{ix}/h = 0.0$, $e_y/h = e_{iy}/h = 0.2956$, 水平横従動荷重の作用位置は $e_x/h = e_{ix}/h = 0.3750$, $e_y/h = e_{iy}/h = 0.2956$ である。

鉛直従動荷重による不安定領域の計算に当て、振動解の座標関数は1次の固有関数のみを取った。すなわち、 A, B, \dots は 2×2 の正方マトリックスとなった。水平横従動荷重による不安定領域の計算では、振動解の座標関数に2次までの固有関数を取った。この場合 A, B, \dots は 6×6 の正方マトリックスとなった。

以下、走行鉛直従動荷重及び走行水平横従動荷重が作用するときの結合共振領域の存在を図に示す。図中、縦軸は無次元荷重 $P_* = P/\{EI^s \omega(\pi/l)^4 + GK(\pi/l)^2\}$ ¹⁾を、横軸は荷重移動振動数 ω_0 を平均荷重作用時の第1固有値 Ω_1 の2倍で除した無次元振動数を表わす。ここで平均荷重作用時の運動方程式は次式である。

$$(A + A_0)\ddot{\delta} + (B + PC_0)\dot{\delta} = 0$$

(走行鉛直従動荷重による不安定領域)

荷重質量を無視した場合について、集中荷重間隔 $a/l = 1.05$ をもつ一定荷重の集中荷重列による不安定領域をFig. 1(a)に、 $a/l = 0.22$ をもつ周期性の集中荷重列による不安定領域をFig. 1(b)に示す。図中 $\Omega_2 - \Omega_1$ が差形の結合共振領域である。

(走行水平横従動荷重による不安定領域)

集中荷重間隔 $a_0/l = 0.5$, 及び $a/l = 1.05$ で一定荷重の荷重列について、荷重質量を無視した場合の不安定領域をFig. 2(a)に、荷重質量を考慮した場合($M_0/lm = 0.103453$, $J_0/\mu I_{ps} l = 0.004394$)¹⁾をFig. 2(b)に示す。図中 $\Omega_3 + \Omega_1, \Omega_4 + \Omega_1, \Omega_4 + \Omega_2, \Omega_5 + \Omega_1$ 等が結合共振領域である。

上記の安定図において、単純共振領域はBolotin法で求めた結果¹⁾と一致し、図より明らかなように、かなり広い結合共振領域が存在することがわかる。

5. 結 び

走行従動荷重を受ける梁の運動の攪乱方程式がHill方程式になることから、パラメータ平面における運動の不安定領域の決定に、特性指数を用いる方法を示した。適用例として、連行する鉛直従動荷重及び水平横従動荷重による梁の結合共振領域を含めた係数励振不安定領域を求め確認した。

本研究の数値計算は九州大学大型計算機センターのFACOM M-200及び山口大学情報処理センターのFACOM 230-28ならびにACOS-800に行った。また、本研究の一部は昭和57年度の文部省科学研究費(一般研究D)の補助を受けた。ここに記して感謝します。

参 考 文 献

- 1) 會田・小松：山口大学工学部研究報告, 32, 109~118 (1981).
Aida, T: Jour. of Sound and Vibration, 86, (1983).
會田・小松：山口大学工学部研究報告, 32, 301~307 (1982).
會田・小松：山口大学工学部研究報告, 33, 95~104 (1982).
- 2) ボローチン(近藤・中田訳)：弾性系の動的安定, コロナ社(1972) pp.115~119
- 3) Hahn, W. : Stability of Motion, Springer Verlag (1967) p. 300.
- 4) Takahashi, K : Jour. of Sound and Vibration 78, 519~529 (1981)

(昭和57年10月15日受理)