

# 平面応力問題における応力境界値について\*

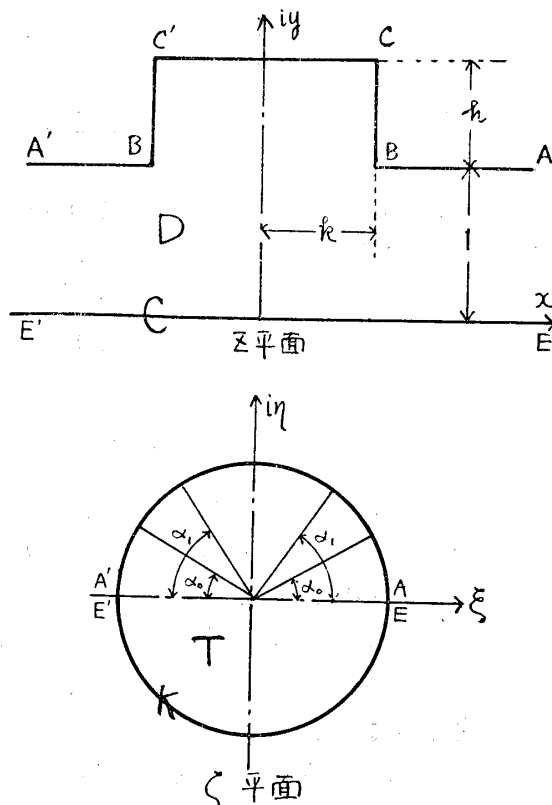
野村 恭雄

## 1. 緒言

不連続個所を有するような二次元領域においては、その不連続個所における応力集中ということが機械構造部分の強度という実際重要な問題での基礎的課題として生じてくる。

しかしその不連続個所を有する平面領域においても、円孔<sup>1)</sup>、楕円孔<sup>2)</sup>、隅を丸めた四角孔<sup>3)</sup>あるいは半円切欠き<sup>4)</sup>または出張り<sup>5)</sup>、深いU字型切欠き<sup>6)</sup>、ノイバー型切欠き<sup>7)</sup>、段付<sup>8)</sup>をもつ平板などについては、その与えられた領域が比較的簡単であるため、既知の直交曲線坐標もしくは通常数項程度よりなる簡単な写像関数を用いて取扱うことのできる領域の問題であった。しかして実際に必要とされる例えば第1図のような直線や線分からなる領域の角ないしは隅の部の応力集中については、その写像関数の収斂が極めて悪く数値的に計算することは困難で、たとえその写像関数が理論的に求まったとしても<sup>9)</sup>、その数値解析は殆ど不可能であった。そこで筆者はかかる不連続個所をもつ領域を Schwarz-Christoffel の等角写像を用いてこれを単位円に写像することにより、そしてその計算操作においては卓上計算機で器械的に計算できるような方法を提唱<sup>10)</sup>し、このような収斂のわるい級数展開による解法を比較的容易に、ただ労力をかけることによって解く方法を発見し、かつその角とか隅の鋭い切欠き部の応力集中緩和の方法として、それらに丸味をつける方法を併せ用いた。

そうしてこうして求めた写像関数を用いて、二次元弾性状態の応力集中を理論的に計算すればかかる領域を有する平面応力問題は完全に解決したこととなる。このような二次元問題は古くから Airy の応力関数<sup>11)</sup>、Goursat<sup>12)</sup> もしくは Muskhelishvile<sup>13)</sup> の複素応力関数、横田<sup>14)</sup> の複素応力関数などを用いて取扱われてきた。ここでは第1図に示すような領域を単位円に等角に写像する写像関数は求められたとし<sup>10)</sup>、その写像関数から写像面の単位円内の領域について境界値問題を解く Goursat の複素応力関数をさらに改良された菊川博士のいわゆる Goursat-Kikukawa の複素応力関数<sup>15)</sup>を用いて平面応力境界値問題を解くこととする。



第 1 図

\* 昭和34年4月、機械学会総会講演会および昭和34年9月応用力学連合講演会において、その一部として発表。

## 2. Goursat-Kikukawa の複素応力関数と基礎公式

$xy$  平面の領域  $D$  内の平面歪問題を考え、体積力は作用していないとすると、 $xy$  平面の垂直変位成分  $w$ ,  $xy$  平面に働く応力成分  $\widehat{xz}$ ,  $\widehat{yz}$ ,  $\widehat{zz}$  は

$$\left. \begin{aligned} w=0, \widehat{xz}=\widehat{yz}=0 \\ \widehat{zz}=\lambda/2(\lambda+\mu)\cdot(\widehat{xx}+\widehat{yy})=\nu(\widehat{xx}+\widehat{yy}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし  $\lambda, \mu$ : Lamé の定数  $\nu=\lambda/2(\lambda+\mu)$ : Poisson 比

$xy$  平面内の変位成分  $u, v$  応力成分  $\widehat{xx}, \widehat{yy}, \widehat{xy}$  は  $x, y$  のみの関数となつて、満すべき釣合条件式および応力歪関係式は

$$\partial\widehat{xx}/\partial x+\partial\widehat{xy}/\partial y=0, \partial\widehat{xy}/\partial x+\partial\widehat{yy}/\partial y=0 \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{xx}=\lambda e+2\mu\partial u/\partial x, \widehat{yy}=\lambda e+2\mu\partial v/\partial y, \widehat{xy}=\mu(\partial v/\partial x+\partial u/\partial y) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ただし  $e=\partial u/\partial x+\partial v/\partial y$ : 膨脹

故に(3)と(2)から  $u, v$  の満すべき必要かつ十分なる条件として

$$\left. \begin{aligned} \partial/\partial x(\lambda+2\mu)e=\partial/\partial y\cdot 2\mu\omega, \partial/\partial y(\lambda+2\mu)e=-\partial/\partial x\cdot 2\mu\omega \\ \text{ただし } 2\omega=\partial v/\partial x-\partial u/\partial y, \omega: \text{回転} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(4)式は明らかに Cauchy-Riemann の方程式であるから、 $(\lambda+2\mu)e+i2\mu\omega$  は領域  $D$  内で正則なる  $z=x+iy$  の解析関数となる。すなわち

$$(\lambda+2\mu)e+i2\mu\omega=4(1-\nu)\varphi'(z)=2(\lambda+2\mu)/(\lambda+\mu)\cdot\varphi'(z) \quad (5)$$

となり、 $\varphi'(z)$  は領域  $D$  内で正則である。したがって

$$\left. \begin{aligned} e=\partial u/\partial x+\partial v/\partial y=2/(\lambda+\mu)\cdot R\cdot\varphi'(z) \\ 2\omega=\partial v/\partial x-\partial u/\partial y=2(\lambda+2\mu)/\mu(\lambda+\mu)\cdot I_m\cdot\varphi'(z) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

故に(6)式から

$$\left. \begin{aligned} \Delta u=-2/\mu\cdot\partial/\partial x\cdot R\cdot\varphi'(z), \Delta v=-2/\mu\cdot\frac{\partial}{\partial x}\cdot I_m\cdot\varphi'(z) \\ \text{ただし } \Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$u=-1/\mu\cdot xR\cdot\varphi'(z)$ ,  $v=-1/\mu\cdot xI_m\cdot\varphi'(z)$  は明らかにこの一つの特解であるから一般解はこれに任意の調和関数を加えたものになる。したがって領域  $D$  内で正則なる任意の解析関数を  $\psi_1(z)$ ,  $\psi_2(z)$  とすると、 $\psi_1'(z)$ ,  $\psi_2'(z)$  も正則となり

$$u=-1/\mu\cdot xR\cdot\varphi'(z)+1/\mu\cdot R\cdot\psi_1(z), v=-1/\mu\cdot xI_m\cdot\varphi'(z)+1/\mu\cdot I_m\cdot\psi_2(z) \quad (8)$$

故に(8)式を(6)式に入れて

$$1+2\mu/(\lambda+\mu)=\lambda+3\mu/(\lambda+\mu)=3-4\nu=\kappa>1 \quad (9)$$

となるから

$$R\cdot\psi_1'(z)+R\cdot\psi_2'(z)=\kappa R\cdot\varphi'(z), I_m\cdot\psi_1'(z)+I_m\cdot\psi_2'(z)=\kappa I_m\cdot\varphi'(z) \quad (10)$$

故に

$$\psi_1'(z)+\psi_2'(z)=\kappa\varphi'(z) \quad (11)$$

故に  $\psi_1(z)+\psi_2(z)=\kappa\varphi(z)$ , また  $\psi_1(z)-\psi_2(z)=\psi(z)$  とおくと、これらもまた領域  $D$  内で正則なる解析関数となり、

$$\overline{\varphi'(z)}=R\cdot\varphi'(z)-iI_m\cdot\varphi'(z), \overline{\psi(z)}=R\cdot\psi(z)-iI_m\cdot\psi(z) \quad (12)$$

のような共扼な複素関数を — をつけて表わすと、(8)式から  $u+iv$  をつくれば

$$u+iv=1/2\mu[\kappa\varphi(z)-2x\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}] \quad (13)$$

次に(3)式から

$$\widehat{xx} + \widehat{yy} = 2(\lambda + \mu)e \quad (14)$$

これに(6)式を代入すると

$$\widehat{xx} + \widehat{yy} = 4R \cdot \varphi'(z) = 2\{\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\} \quad (15)$$

また(3)式から

$$\widehat{xx} - \widehat{yy} + 2i\widehat{xy} = (\partial/\partial x + i\partial/\partial y)2\mu(u + iv) \quad (16)$$

これに(13)式を代入すると

$$\widehat{xx} - \widehat{yy} + 2i\widehat{xy} = -2\{2x \cdot \overline{\varphi''(z)} + \overline{\varphi'(z)} + \psi'(z)\} \quad (17)$$

したがって(14)式と(17)式から

$$\left. \begin{aligned} \widehat{xx} + i\widehat{xy} &= \varphi'(z) - 2x\overline{\varphi''(z)} - \psi'(z) \\ \widehat{yy} - i\widehat{xy} &= \varphi'(z) + 2\overline{\varphi'(z)} + 2x\overline{\varphi''(z)} + \psi'(z) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

故に応力成分は

$$\left. \begin{aligned} \widehat{xx} &= R \cdot \{\varphi'(z) - 2x\overline{\varphi''(z)} - \psi'(z)\}, \quad \widehat{yy} = R \cdot \{3\varphi'(z) + 2x \cdot \overline{\varphi''(z)} + \psi'(z)\} \\ \widehat{xy} &= I_m \{\varphi'(z) + 2x\overline{\varphi''(z)} + \psi'(z)\} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

すなわち領域  $D$  内で釣合条件式(2), 応力歪関係式(3)を満足するような変位成分  $u, v$ , 応力成分  $\widehat{xx}, \widehat{yy}, \widehat{xy}$  は応力成分の一価連続と変位成分の二次微係数までの存在と連続とを仮定すると, 常に領域  $D$  内で一価正則なる二つの解析関数  $\varphi(z), \psi(z)$  によって, (14)式および(19)式で表わされることになる。

このように一般に複素応力関数  $\varphi(z), \psi(z)$  が与えられたとき, これに対応する変位成分, 応力成分は直ちに計算できるわけであり, この解析関数のことを Goursat-Kikukawa の複素応力関数と称する。

例えば応力成分  $\widehat{xx}, \widehat{yy}, \widehat{xy}$  が与えられたとすると, (5)式および(19)式から

$$R \cdot \varphi'(z) = \frac{1}{4}(\widehat{xx} + \widehat{yy}), \quad \psi'(z) = \overline{\varphi'(z)} - 2x\overline{\varphi''(z)} - (\widehat{xx} - i\widehat{xy}) \quad (20)$$

したがって応力成分  $\widehat{xx}, \widehat{yy}, \widehat{xy}$  が一様で  $\widehat{xx} = \widehat{xx}_0, \widehat{yy} = \widehat{yy}_0, \widehat{xy} = \widehat{xy}_0$  で  $\widehat{xx}_0, \widehat{yy}_0, \widehat{xy}_0$  が実定数のときは(20)式から

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(z) &= \frac{1}{4}(\widehat{xx}_0 + \widehat{yy}_0) \\ \psi'(z) &= \frac{1}{4}(\overline{\widehat{xx}_0 + \widehat{yy}_0}) - (\widehat{xx}_0 - i\widehat{xy}_0) = -\frac{3}{4}\widehat{xx}_0 + \frac{1}{4}\widehat{yy}_0 + i\widehat{xy}_0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

とくに

$$\widehat{xx} = 1, \widehat{yy} = 0, \widehat{xy} = 0 \text{ のときは} \quad \varphi'(z) = \frac{1}{4}, \psi'(z) = -\frac{3}{4} \quad (22)$$

$$\widehat{xx} = 0, \widehat{yy} = 1, \widehat{xy} = 0 \text{ のときは} \quad \varphi'(z) = \frac{1}{4}, \psi'(z) = \frac{1}{4} \quad (23)$$

$$\widehat{xx} = 0, \widehat{yy} = 0, \widehat{xy} = 0 \text{ のときは} \quad \varphi'(z) = 0, \psi'(z) = i \quad (24)$$

また一様なる曲げ応力のときは

$$\widehat{xx} = y, \widehat{yy} = 0, \widehat{xy} = 0 \text{ のときは} \quad \varphi'(z) = -\frac{1}{4}iz, \psi'(z) = \frac{3}{4}iz \quad (25)$$

$$\widehat{yy} = x, \widehat{xx} = 0, \widehat{xy} = 0 \text{ のときは} \quad \varphi'(z) = \frac{1}{4}z, \psi'(z) = -\frac{1}{4}z \quad (26)$$

### 3. 写像面における基礎公式

平面歪状態にある二次元弾性体の  $z$  平面の領域  $D$  を

$$z=z(\zeta) \quad (27)$$

なる写像関数によって  $\zeta$  平面の原点を中心とする単位円  $K$  内の領域  $T$  に等角に写像すると

$$2x=2R \cdot z(\zeta)=z(\zeta)+\overline{z(\zeta)} \quad (28)$$

であるから、上に求めた式は  $\zeta$  を独立変数として次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u+iv &= 1/2\mu \{ \kappa\varphi\{z(\zeta)\} - \overline{\{z(\zeta)+z(\zeta)\}\varphi'\{z(\zeta)\}} - \psi\{z(\zeta)\} \} \\ \widehat{xx} + \widehat{yy} &= 4R \cdot \varphi'\{z(\zeta)\} = 2[\varphi'\{z(\zeta)\} + \overline{\varphi'\{z(\zeta)\}}] \\ \widehat{xx} - \widehat{yy} + 2i\widehat{xy} &= -2[\{z(\zeta)+\overline{z(\zeta)}\}\overline{\varphi''\{z(\zeta)\}} + \overline{\varphi'\{z(\zeta)\}} + \psi'\{z(\zeta)\}] \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

いま

$$\zeta = e^{\nu+i\tau} \quad (30)$$

なる  $\nu, \tau$  を考えると、 $\zeta$  平面において  $\nu = \text{定数}$ ,  $\tau = \text{定数}$  は定数の値を変化させてゆくとき、原点を中心とする同心円群および半径群を表わすから写像の等角性より  $\zeta$  平面では互に直交する二つの曲線群を表わし、 $(\nu, \tau)$  は直交曲線坐標としてとることができる。このような直交曲線坐標系をとることとすると  $\nu=0$  は  $\zeta$  平面の単位円  $K$  となるから  $z$  平面では境界曲線  $C$  となるわけである。

したがって応力境界値問題においては、応力をこの  $\nu, \tau$  坐標系に関する応力成分  $\widehat{\nu\nu}$ ,  $\widehat{\tau\tau}$ ,  $\widehat{\tau\nu}$  で表わしておく、 $\nu=0$  における  $\widehat{\nu\nu}$ ,  $\widehat{\tau\nu}$  はそのまま境界応力の法線および切線成分となる。

さて考える点における曲線  $\nu = \text{定数}$  の  $\nu$  の増す方向の  $x$  軸よりなす角を  $\gamma$  とすると

$$\widehat{\nu\nu} + \widehat{\tau\tau} = \widehat{xx} + \widehat{yy}, \quad \widehat{\nu\nu} - \widehat{\tau\tau} + 2i\widehat{\tau\nu} = (\widehat{xx} - \widehat{yy} + 2i\widehat{xy})e^{-2i\tau} \quad (31)$$

しかるに

$$\gamma - \tau = \arg z'(\zeta) \quad \therefore \gamma = \arg [z'(\zeta) \cdot \zeta] \quad (32)$$

$$e^{-2i\tau} = \overline{z'(\zeta)} \cdot \zeta / z'(\zeta) \cdot \zeta \quad (33)$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\nu\nu} + \widehat{\tau\tau} &= 4R \cdot \varphi'\{z(\zeta)\} = 2[\varphi'\{z(\zeta)\} + \overline{\varphi'\{z(\zeta)\}}] \\ \widehat{\nu\nu} - \widehat{\tau\tau} + 2i\widehat{\tau\nu} &= -2[\{z(\zeta)+\overline{z(\zeta)}\}\overline{\varphi''\{z(\zeta)\}} + \overline{\varphi'\{z(\zeta)\}} + \psi'\{z(\zeta)\}] \\ &\quad \times \overline{z'(\zeta)} \cdot \zeta / z'(\zeta) \cdot \zeta \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

また上の二式から

$$\begin{aligned} \widehat{\nu\nu} + i\widehat{\tau\nu} &= 1/z'(\zeta) \cdot [\varphi'\{z(\zeta)\}z'(\zeta) + \overline{\{z(\zeta)+z(\zeta)\}\varphi''\{z(\zeta)\}}z'(\zeta)(-\zeta/\zeta) \\ &\quad + \{z'(\zeta)+\overline{z'(\zeta)}(-\zeta/\zeta)\}\overline{\varphi'\{z(\zeta)\}} + (-\zeta/\zeta)\psi'\{z(\zeta)\}z'(\zeta)] \end{aligned} \quad (35)$$

(35)式を簡単にするために、写像面における複素応力関数として

$$\left. \begin{aligned} \varphi\{z(\zeta)\} &= f(\zeta), \quad \psi\{z(\zeta)\} = g(\zeta) \\ \varphi'\{z(\zeta)\}z'(\zeta) &= \frac{d}{d\zeta}f(\zeta) = F(\zeta), \quad \psi'\{z(\zeta)\}z'(\zeta) = \frac{d}{d\zeta}g(\zeta) = G(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

とすると

$$\left. \begin{aligned} \varphi'\{z(\zeta)\} &= F(\zeta)/z'(\zeta), \quad \psi'\{z(\zeta)\} = G(\zeta)/z'(\zeta) \\ \varphi''\{z(\zeta)\} &= \frac{1}{z'(\zeta)} \frac{d}{d\zeta} \frac{F(\zeta)}{z'(\zeta)} = \frac{F'(\zeta)}{\{z'(\zeta)\}^2} - \frac{z''(\zeta)F(\zeta)}{\{z'(\zeta)\}^3} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

したがって(29), (34)式は

$$\left. \begin{aligned} u+iv &= \frac{1}{2\mu} \left[ \kappa f(\zeta) - \left\{ \frac{z(\zeta)+\bar{z}(\zeta)}{z'(\zeta)} \right\} \bar{F}(\zeta) - g(\zeta) \right] \\ \widehat{\nu\nu} + \widehat{\tau\tau} &= 4R \cdot \frac{F(\zeta)}{z'(\zeta)} = 2 \left[ \frac{F(\zeta)}{z'(\zeta)} + \frac{\bar{F}(\zeta)}{z'(\zeta)} \right] \\ \widehat{\nu\nu} + i\widehat{\tau\nu} &= \frac{1}{z'(\zeta)} \left[ F(\zeta) + \left\{ \frac{z(\zeta)+\bar{z}(\zeta)}{z'(\zeta)} \right\} \frac{d}{d\xi} \frac{F(\zeta)}{z'(\zeta)} \left( -\frac{\bar{\zeta}}{\zeta} \right) + \left\{ z'(\zeta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \overline{z'(\zeta)} \left( -\frac{\bar{\zeta}}{\zeta} \right) \right\} \frac{\bar{F}(\zeta)}{z'(\zeta)} + \left( -\frac{\bar{\zeta}}{\zeta} \right) G(\zeta) \right] \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

いま一般に  $f(\zeta)$  が  $\zeta$  のある領域  $T_1$  で定義された複素関数であるとき,  $\overline{f(\zeta)}$  を  $\zeta$  の複素関数と考へて  $\bar{f}(\zeta)$  と記すこととする。すなわち

$$\overline{f(\zeta)} = \bar{f}(\zeta) \quad (39)$$

しかるとき  $\bar{f}(\zeta)$  は明らかに領域  $T_1$  と実軸に対し対称な領域  $\bar{T}_1$  で定義され,  $f(\zeta)$  がある領域  $T_2$  で正則ならば  $\bar{f}(\zeta)$  は  $T_2$  と実軸で対称な領域  $\bar{T}_2$  で正則となる。

また  $T_2$  が  $\zeta=0$  を中心とする円内もしくは円環領域を含み,  $f(\zeta), \bar{f}(\zeta)$  が  $\zeta=0$  を中心とする Taylor もしくは Laurent 展開できるときは, その係数は互に共軛となる。

このように  $\bar{f}(\zeta)$  を定義すると

$$\overline{f(\zeta)} = \bar{f}(\zeta) \quad (40)$$

であるから, とくに  $\zeta=r$  なる円上で点  $\zeta=re^{i\tau}$  で  $f(\zeta)$  が定義されているならば,

$$\bar{\zeta} = re^{-i\tau} = r^2/re^{i\tau} = r^2/\zeta \quad (41)$$

$$\therefore [\bar{f}(\zeta)]_{|\zeta|=r} = [f(\bar{\zeta})]_{|\zeta|=r} = \left[ \bar{f}\left(\frac{r^2}{\zeta}\right) \right]_{|\zeta|=r} \quad (42)$$

またこの点で  $f(\zeta)$  が正則ならば

$$\left[ \bar{f}'(\zeta) \left( -\frac{\bar{\zeta}}{\zeta} \right) \right]_{|\zeta|=r} = \left[ \bar{f}'(\bar{\zeta}) \cdot \left( -\frac{\bar{\zeta}}{\zeta} \right) \right]_{|\zeta|=r} = \left[ \bar{f}'\left(\frac{r^2}{\zeta}\right) \cdot \left( -\frac{-r^2}{\zeta^2} \right) \right]_{|\zeta|=r} = \left[ \frac{d}{d\zeta} \bar{f}\left(\frac{r^2}{\zeta}\right) \right]_{|\zeta|=r} \quad (43)$$

ただし  $\zeta$  についての微分に際しては  $r$  は定数,  $\zeta$  は  $r$  に無関係な独立変数と考へて微分し, しかる後に  $|\zeta|=r$  の値を代入するものとする。

したがって(38)式の最後の式は(42), (43)両式を用いて半径  $r < 1$  の円  $|\zeta|=r$  上において

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\nu\nu} + i\widehat{\tau\nu} &= \left[ \frac{1}{z'(\zeta)} \left\{ F(\zeta) + \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{z(\zeta)+\bar{z}(\frac{r^2}{\zeta})}{z'(\frac{r^2}{\zeta})} \bar{F}(\frac{r^2}{\zeta}) \right) + \left( \frac{-r^2}{\zeta^2} \right) G(\frac{r^2}{\zeta}) \right\} \right]_{|\zeta|=r < 1} \\ &= \left[ \frac{1}{z'(\zeta)} \frac{d}{d\zeta} \left\{ f(\zeta) + \frac{z(\zeta)+\bar{z}(\frac{r^2}{\zeta})}{z'(\frac{r^2}{\zeta})} \bar{F}(\frac{r^2}{\zeta}) + g(\frac{r^2}{\zeta}) \right\} \right]_{|\zeta|=r < 1} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

となる。

領域  $D$  が第1図のような一つの閉曲線領域の外部の無限遠点を含む単連結領域の場合には写像関数(7)式は無限遠点の対応点例えば  $\zeta = \pm 1$  で極をもち, さらに角の点においても特異点をもち写像面における複素応力関数も領域  $T$  内で一価正則とは限らない。しかし後でのべるように, 無限遠点などの特異点において, 与えられた条件を満すような特異性をもつ複素応力

関数をあらかじめ作っておいてこれを引き去ることによって写像面における複素応力関数が一価正則となるようにすることができる。したがって今後とも領域  $T$  内で一価正則であるとの観点に立って理論をおしすすめることとする。

#### 4. 応力境界値問題の基礎方程式

$z$  平面の領域  $D$  を  $\zeta$  平面の原点を中心とする単位円  $K$  内の領域  $T$  に一対一等角に写像すると、問題は与えられた境界条件を満し、領域  $T$  内で一価正則なる写像面における複素応力関数を求めることになる。

いま境界上で境界応力の法線成分、切線成分が直交曲線坐標  $\tau$  の関数  $\widehat{\nu\nu}(\tau)$ ,  $\widehat{\tau\nu}(\tau)$  として与えられた応力境界値問題を考える。

前述のように単位円内の領域  $T$  では写像関数  $z(\zeta)$ , 写像面の複素応力関数  $F(\zeta)$ ,  $G(\zeta)$  は正則であり、かつ  $z'(\zeta) \neq 0$  であるが、単位円  $K$  上ではそうとは限らない。しかし簡単のため（そして円周上に特異点のあるときは、前述のようにその特異性をもつ関数をあらかじめ作っておいて、これを引き去ることによって正則性をもたせて）単位円  $K$  上でも  $z(\zeta)$ ,  $F(\zeta)$ ,  $G(\zeta)$  が正則でかつ  $z'(\zeta) \neq 0$  であるとする。

そうすると(44)式は  $|\zeta|=r=1$  でも成立するから境界条件は、

$$\widehat{\nu\nu}(\tau) + i\widehat{\tau\nu}(\tau) = \left[ \frac{1}{z'(\zeta)} \left\{ F(\zeta) + \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{z(\zeta) + \bar{z}(\frac{1}{\zeta})}{z'(\frac{1}{\zeta})} \bar{F}(\frac{1}{\zeta}) \right) + \frac{-1}{\zeta^2} \bar{G}(\frac{1}{\zeta}) \right\} \right]_{\zeta=e^{i\tau}} \quad (45)$$

あるいは

$$\{\widehat{\nu\nu}(\tau) + i\widehat{\tau\nu}(\tau)\} z'(e^{i\tau}) = \left[ F(\zeta) + \frac{d}{d\zeta} \left\{ \frac{z(\zeta) + \bar{z}(\frac{1}{\zeta})}{z'(\frac{1}{\zeta})} \bar{F}(\frac{1}{\zeta}) \right\} + \frac{-1}{\zeta^2} \bar{G}(\frac{1}{\zeta}) \right]_{\zeta=e^{i\tau}} \quad (46)$$

したがって問題は(46)式を満足する  $F(\zeta)$ ,  $G(\zeta)$  を求めることになる。

このような  $F(\zeta)$ ,  $G(\zeta)$  は Taylor 級数に展開できるからそれらの係数を(46)式が満足するように求むればよいことになる。すなわち

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \zeta^k, \quad G(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k \zeta^k \quad (47)$$

とおくと、 $F(\zeta)$ ,  $G(\zeta)$  は仮定によって単位円  $K$  上でも正則であるからこれらの Taylor 級数の収斂円は単位円  $K$  を含んでいる。このとき  $\bar{F}(1/\zeta)$ ,  $\bar{G}(1/\zeta)$  はそれぞれ(47)式の Taylor 級数の収斂円の半径の逆数を半径とする単位円  $K$  内の同心円の外部で正則で絶対かつ広義一様に収斂する次の Laurent 級数に展開される。すなわち

$$\bar{F}(1/\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_k \zeta^{-k}, \quad \bar{G}(1/\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{G}_k \zeta^{-k} \quad (48)$$

また仮定によって単位円  $K$  すなわち  $|\zeta|=1$  およびその内部で  $z(\zeta)$ ,  $z'(\zeta)$  が正則で  $z'(\zeta) \neq 0$  としたから、単位円  $K$  およびその外部で  $\bar{z}(1/\zeta)$ ,  $\bar{z}'(1/\zeta)$  が正則で  $\bar{z}'(1/\zeta) \neq 0$  となる。したがって

$$\{z(\zeta) + \bar{z}(1/\zeta)\} / \bar{z}'(1/\zeta) = Z(\zeta) \quad (49)$$

とおいた  $Z(\zeta)$  は単位円  $K$  上で正則となりやはり単位円  $K$  を含む同心円環領域内で絶対かつ広義一様に収斂する次の Laurent 級数に展開できる。

$$Z(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z_k \zeta^k \quad \left. \vphantom{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z_k \zeta^k} \right\} \quad (50)$$

$$\text{ここで } Z_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z(e^{i\tau}) e^{-ik\tau} d\tau$$

(47), (48), (50)式の Taylor および Laurent 級数を(46)式に代入すると

$$\begin{aligned} & F(\zeta) + \frac{d}{d\zeta} \left\{ \frac{z(\zeta) + \bar{z}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\bar{z}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \bar{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right\} + \frac{-1}{\zeta^2} \bar{G}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} F_k \zeta^k + \frac{d}{d\zeta} \left[ \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z_k \zeta^k \right\} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_k \zeta^{-k} \right\} \right] + \frac{-1}{\zeta^2} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{G}_k \zeta^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} F_k \zeta^k + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ (k+1) \sum_{h=0}^{\infty} Z_{h+k+1} \bar{F}_h \right\} \zeta^k + \sum_{k=-2}^{\infty} -\bar{G}_{-k-2} \zeta^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ F_k + (k+1) \sum_{h=0}^{\infty} Z_{h+k+1} \bar{F}_h \right\} \zeta^k + \sum_{k=-2}^{\infty} \left\{ -\bar{G}_{-k-2} + (k+1) \sum_{h=0}^{\infty} Z_{h+k+1} \bar{F}_h \right\} \zeta^k \quad (51) \end{aligned}$$

(46)式から上式は単位円  $K$  上で  $\{\nu\nu(\tau) + i\tau\nu(\tau)\} z'(e^{i\tau})$  に等しいから

$$H_k = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\nu\nu(\tau) + i\tau\nu(\tau)\} z'(e^{i\tau}) e^{-ik\tau} d\tau, \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (52)$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} H_k &= F_k + (k+1) \sum_{h=0}^{\infty} Z_{h+k+1} \bar{F}_h \quad (k=0, 1, 2, \dots) \\ H_{-1} &= 0 \\ H_k &= -\bar{G}_{-k-2} + (k+1) \sum_{h=0}^{\infty} Z_{h+k+1} \bar{F}_h, \quad (k=-2, -3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

となる。しかしてこのとき Laurent 級数

$$H(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_k \zeta^k \quad (54)$$

を考えるとその収斂域は単位円  $K$  を含み  $H(\zeta)$  は単位円  $K$  上で正則となる。したがっていま  $Z(\zeta)$ ,  $H(\zeta)$  が単位円  $K$  上で正則なる写像関数, 境界応力が与えられた場合に  $F(\zeta)$ ,  $G(\zeta)$  は単位円内  $T$  のみならず円周上  $K$  までも正則であるから境界条件(46)式が満足するには

$$H_{-1} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\nu\nu(\tau) + i\tau\nu(\tau)\} z'(e^{-i\tau}) e^{-i\tau} d\tau = 0 \quad (55)$$

でかつ

$$\left. \begin{aligned} H_k &= F_k + (k+1) \sum_{h=0}^{\infty} Z_{h+k+1} \bar{F}_h, \quad (k=0, 1, 2, \dots) \\ G_k &= -\bar{H}_{-k-2} - (k+1) \sum_{h=0}^{\infty} Z_{h-k-1} F_h, \quad (k=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

が満足しなければならない。すなわちこれが応力境界値問題の基礎方程式である。

## 5. 異常点の処理

以上においては複素応力関数  $F(\zeta)$ ,  $G(\zeta)$  が単位円内  $T$  および  $K$  上で正則なる場合について考えてきた。しかし我々の考えているような境界曲線が無限遠点に到るような領域では要求される無限遠点の近くでの応力状態によって単位円  $K$  上のその対応点では正則性が満たされないことになる。このような複素応力関数  $F(\zeta)$ ,  $G(\zeta)$  もしくは境界応力関数  $H(\zeta)$  が正則

性を満たさない点を異常点とよんでいるが、領域内では複素応力関数としての特異点はこの異常点となるが、境界上では必ずしもそうとは限らない。

このような異常点のある場合には、それぞれの異常点に対し、その点に異常性をもち、その附近で所要の応力場を生ずるがそれ以外では正則性を満たすところの簡単な複素応力関数（これを異常応力関数とよぶ）を考えて、あらかじめこれらを引き去った応力場について前節でのべたような応力境界値問題の正常解を求めればよい。

しかしてこの異常応力関数は考える点以外の境界上では正則性を満たすことは必要であるが、境界条件を満たす必要はないから比較的簡単に求まり、その点の近く以外の領域の形状には無関係であることから各種の異常点に対してあらかじめ求めておくことができる。

このような異常点のある場合の応力境界値問題を解くには、まず異常点に対応して適当なる異常複素応力関数  $F_m(\zeta)$ ,  $G_m(\zeta)$  ( $m=1, 2, \dots, n$ ) を求めると、これに対応する  $\zeta=\sigma$  点における境界応力関数  $H_m(\sigma)$  は

$$H_m(\sigma) = \left[ F_m(\zeta) + \frac{d}{d\zeta} \left\{ Z(\zeta) \bar{F}_m \left( \frac{1}{\zeta} \right) \right\} + \frac{-1}{\zeta^2} \bar{G}_m \left( \frac{1}{\zeta} \right) \right]_{\zeta=\sigma} \quad (57)$$

となるから、この式から境界応力関数  $H_m(\sigma)$  は直ちに求まる。

また与えられた境界応力を  $\widehat{\nu\nu}_0(\tau)$ ,  $\widehat{\tau\nu}_0(\tau)$  とするとこれに対応する境界応力関数  $H_0(\sigma)$  は

$$H_0(\sigma) = \{ \widehat{\nu\nu}_0(\tau) + i \widehat{\tau\nu}_0(\tau) \} z'(\sigma) \quad (58)$$

となる。したがってこれから  $H_m(\sigma)$  をさしひくと

$$H(\sigma) = H_0(\sigma) - \sum_{m=1}^n H_m(\sigma) \quad (59)$$

となり、この式は異常点を除いた応力場に対する境界応力関数となって正則性を満たしているわけである。しかし異常点が境界上にあるときは単位円  $K$  上のその対応点自身では  $H_m(\sigma)$  の値はわからず(58)式の  $H_0(\sigma)$  も無限大となる。しかし  $H_0(\sigma)$  から  $H_m(\sigma)$  をさしひくとき、これらの異常性は明らかに打ち消されるべきものであるから、実際の計算に当ってはこれらの点自身の値は計算しなくてもよいことになる。

(59)式のかかる正則性を満たす  $H(\sigma)$  に対しては前にのべた方法で正常解  $F(\zeta)$ ,  $G(\zeta)$  が求まり、これに対する所要の点の応力成分  $\widehat{\nu\nu}$ ,  $\widehat{\tau\tau}$ ,  $\widehat{\tau\nu}$  が計算できる。

その場合には、これらに異常複素応力関数  $F_m(\zeta)$ ,  $G_m(\zeta)$  およびこれに対応する所要の点の応力成分  $\widehat{\nu\nu}_m$ ,  $\widehat{\tau\tau}_m$ ,  $\widehat{\tau\nu}_m$  を加えたところの

$$\left. \begin{aligned} F_0(\zeta) &= F(\zeta) + \sum_{m=1}^n F_m(\zeta), \quad G_0(\zeta) = G(\zeta) + \sum_{m=1}^n G_m(\zeta) \\ \widehat{\nu\nu}_0 &= \widehat{\nu\nu} + \sum_{m=1}^n \widehat{\nu\nu}_m, \quad \widehat{\tau\tau}_0 = \widehat{\tau\tau} + \sum_{m=1}^n \widehat{\tau\tau}_m, \quad \widehat{\tau\nu}_0 = \widehat{\tau\nu} + \sum_{m=1}^n \widehat{\tau\nu}_m \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

がもとの異常点のある場合の応力境界値問題に対する複素応力関数および所要の点の応力成分を与えるわけである。

## 6. 境界値問題の解法

応力境界値問題の基礎方程式(60)式を解く方法を考える。この場合我々の求めたいのは境界上の縁応力  $\widehat{\tau\tau}$  のみであるから  $F(\zeta)$  のみ必要となり、 $Z_k$  も  $k$  の正の部分のみを求むればよい



ことになる。

(1)  $Z_k$  の計算

いま  $z(\zeta)$ ,  $\bar{z}(\zeta)$  なる写像関数が次のような Taylor 級数で与えられているとする。

$$z(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k \zeta^k, \quad z'(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} k z_k \zeta^{k-1} \quad (61)$$

そうすると前にのべたことから

$$\left. \begin{aligned} \bar{z}(1/\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \bar{z}_k \zeta^{-k}, \quad \bar{z}'(1/\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} k \bar{z}_k \zeta^{-(k-1)} \\ 1/\bar{z}'(1/\zeta) &= 1/\bar{z}_1 - (2\bar{z}_2/\bar{z}_1^2) 1/\zeta + (4\bar{z}_2^2/\bar{z}_1^3 - 3\bar{z}_3/\bar{z}_1^2) 1/\zeta^2 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \bar{z}_k^* \zeta^{-k} \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

したがって  $Z(\zeta)$  は

$$\begin{aligned} Z(\zeta) &= \{z(\zeta) + \bar{z}(1/\zeta)\} / \bar{z}'(1/\zeta) = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} z_k \zeta^k + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{z}_k \zeta^{-k} \right\} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{z}_k^* \zeta^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} z_{h+k} \bar{z}_h^* \right\} \zeta^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{h=k}^{\infty} z_{h-k} \bar{z}_h^* + \sum_{h=0}^{\infty} \bar{z}_{k-h} \bar{z}_h^* \right\} \zeta^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} Z_{-k} \zeta^{-k} \end{aligned} \quad (63)$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} Z_k &= \sum_{h=0}^{\infty} z_{h+k} \bar{z}_h^*, \quad (k=1, 2, \dots) \\ Z_{-k} &= \sum_{h=k}^{\infty} z_{h-k} \bar{z}_h^* + \sum_{h=0}^{\infty} \bar{z}_{k-h} \bar{z}_h^*, \quad (k=0, 1, 2, \dots) \\ \bar{z}_0^* &= 1/\bar{z}_1, \quad \bar{z}_1^* = -2\bar{z}_2/\bar{z}_1^2, \quad \bar{z}_2^* = 4\bar{z}_2^2/\bar{z}_1^3 - 3\bar{z}_3/\bar{z}_1^2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

で  $Z_k$  が与えられる。

しかし一般には写像関数は無限級数であるから実際の計算には有限項で打切って行わねばならぬから、はじめから写像関数を有限項で打切って考えると、次に示す  $Z_k$  の  $k$  の正の部分も有限項となり、以下の計算式によって  $z_k$  から  $\bar{z}_k^*$  を求めず直接  $Z_k$  を計算できる。

すなわち

$$\begin{aligned} z(\zeta) + \bar{z}(1/\zeta) &= \dots + z_n \zeta^n + z_{n-1} \zeta^{n-1} + \dots + z_2 \zeta^2 + z_1 \zeta + (z_0 + \bar{z}_0) + \bar{z}_1 \zeta^{-1} + \dots \\ &= Z(\zeta) \bar{z}'(1/\zeta) \\ &= \{ \dots + Z_n \zeta^n + Z_{n-1} \zeta^{n-1} + \dots + Z_2 \zeta^2 + Z_1 \zeta + Z_0 + Z_{-1} \zeta^{-1} + \dots \} \\ &\quad \times \{ \bar{z}_1 + 2\bar{z}_2 \zeta^{-1} + 3\bar{z}_3 \zeta^{-2} + \dots + (n+1) \bar{z}_{n+1} \zeta^{-n} + (n+2) \bar{z}_{n+2} \zeta^{-(n+1)} + \dots \} \end{aligned} \quad (65)$$

であるから両辺の同次の項を比較すると

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \bar{z}_1 \\ \bar{z}_0 + z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & 2\bar{z}_2 & 3\bar{z}_3 & 4\bar{z}_4 & \dots & (n+1)\bar{z}_{n+1} & (n+2)\bar{z}_{n+2} & \dots \\ & \bar{z}_1 & 2\bar{z}_2 & 3\bar{z}_3 & \dots & n\bar{z}_n & (n+1)\bar{z}_{n+1} & \dots \\ & & \bar{z}_1 & 2\bar{z}_2 & \dots & & & \dots \\ & & & \bar{z}_1 & \dots & & & \dots \\ & & & & \vdots & & & \dots \\ & & & & & \bar{z}_1 & 2\bar{z}_2 & \dots \\ & & & & & & \bar{z}_1 & \dots \\ & & & & & & & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ Z_{-1} \\ Z_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_{-1} \\ Z_n \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (66)$$

となり、 $z(\zeta)$  を  $z_n \zeta^n$  で打切ると次の式がえられ、 $Z_n, Z_{n-1}, \dots$  の順に逐次計算してゆくことができる。

$$\begin{pmatrix} Z_n \\ Z_{n-1} \\ \vdots \\ Z_2 \\ Z_1 \\ Z_0 \\ Z_{-1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{1}{z_1} \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_2 \\ z_1 \\ z_0 + \bar{z}_0 \\ \bar{z}_{-1} \\ \vdots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2\bar{z}_2 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 2\bar{z}_2 0 \\ 3\bar{z}_3 2\bar{z}_2 0 \\ \dots \\ 3\bar{z}_3 2\bar{z}_2 0 \\ 4\bar{z}_4 3\bar{z}_3 2\bar{z}_2 0 \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_n \\ Z_{n-1} \\ \vdots \\ Z_2 \\ Z_1 \\ Z_0 \\ Z_{-1} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (67)$$

この数値計算は第2図に示すように行えばよい。この場合  $\bar{z}_1=1$  とするようにすると計算は非常に楽になる。しかしてこの方法は一般の割り算の方法であって級数同志の割り算はこのように器械的に容易に行える。

(2)  $H_k$  の計算

$H_k$  は前にのべたように、与えられた境界応力  $\widehat{\nu\nu}(\tau), \widehat{\tau\nu}(\tau)$  と写像関数の微係数  $z'(e^{i\tau})$  とから

$$\left. \begin{aligned} H_k &= 1/2\pi \int_0^{2\pi} H(e^{i\tau}) e^{-ik\tau} d\tau, \\ &\quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \right\} (68)$$

$$H(e^{i\tau}) = \{ \widehat{\nu\nu}(\tau) + i\widehat{\tau\nu}(\tau) \} z'(e^{i\tau})$$

によって求められるが実際に  $\widehat{\nu\nu}(\tau), \widehat{\tau\nu}(\tau)$  が数値的に与えられた場合には次の方法によって数値計算を行う。すなわち単位円  $K$  上に  $2m$  個の等間隔な分点  $\sigma = e^{i\tau_j}, \tau_j = \pi/m \cdot j$  ( $j=0, 1, 2, \dots, 2m-1$ ) をとり、これからこれらの点で、

$$H(e^{i\tau_j}) = \{ \widehat{\nu\nu}(\tau_j) + i\widehat{\tau\nu}(\tau_j) \} z'(e^{i\tau_j}) \quad (69)$$

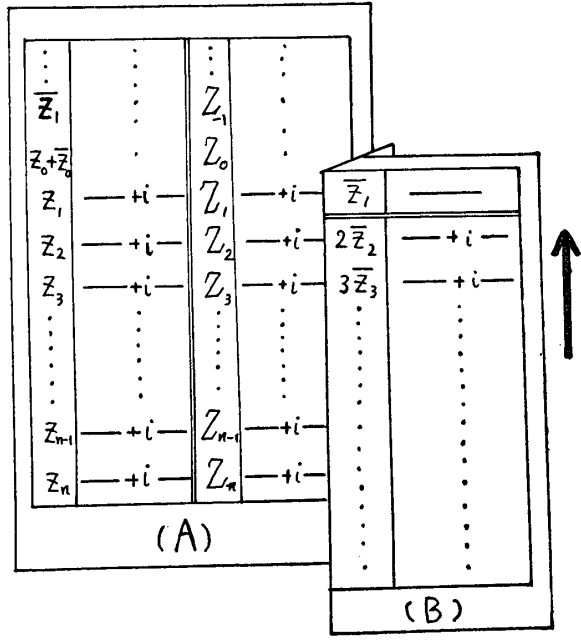
を計算し、これから

$$\left. \begin{aligned} H_k &= J_k^m / 2m \cdot \sum_{j=0}^{2m-1} H(e^{i\tau_j}) e^{-ik\tau_j}, \quad \tau_j = \pi/m \cdot j, \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m) \\ &\quad \left. \begin{aligned} \text{ここに } J_k^m &= 1/2, \quad k = \pm m \\ &= 1, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(m-1) \end{aligned} \right\} (70)$$

として求むれば  $2m$  個の分点で  $H(e^{i\tau})$  の与えられた値と一致する級数の常数  $H_k$  がえられる。

しかして、いま我々が問題としているような無限遠で引張り応力をうけるような場合には、異常点の処理のところで述べたように異常応力関数  $F_m(\zeta), G_m(\zeta)$  を考えて、これに対応する境界応力関数  $H_m(\sigma)$  が

$$H_m(\sigma) = \left[ F_m(\zeta) + \frac{d}{d\zeta} \left\{ Z(\zeta) \bar{F}_m\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right\} + \frac{-1}{\zeta^2} \bar{G}_m\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right]_{\zeta=\sigma} \quad (71)$$



第3図  $Z_k$  の計算

となるから、この式を計算することによって直ちに  $H_m(\sigma)$  が求まる。そうして境界上には外に何らの力が作用していないとすれば、我々の求める境界応力関数  $H(\sigma)$  は

$$H(\sigma) = -\sum_{m=1}^n H_m(\sigma) = -\sum_{m=1}^n \left[ F_m(\zeta) + \frac{d}{d\zeta} \left\{ Z(\zeta) \bar{F}_m \left( \frac{1}{\zeta} \right) \right\} + \frac{-1}{\zeta^2} \bar{G}_m \left( \frac{1}{\zeta} \right) \right]_{\zeta=\sigma} \quad (72)$$

となって表わされ、 $H_k$  は直ちに求まることになる。

### (3) $F_k$ の計算

上述の方法で  $Z_k, H_k$  が求められたとすると、(53)式を行列の形で表わすと、

$$\begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & \cdots \\ 2Z_2 & 2Z_3 & 2Z_4 & \cdots \\ 3Z_3 & 3Z_4 & \cdots \\ 4Z_4 & \cdots \\ \vdots & \cdots \\ \vdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{F}_0 \\ \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (73)$$

となり実部と虚部に分けると

$$\begin{pmatrix} H_0' \\ H_0'' \\ H_1' \\ H_1'' \\ H_2' \\ H_2'' \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0' \\ F_0'' \\ F_1' \\ F_1'' \\ F_2' \\ F_2'' \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_1' & Z_1'' & Z_2' & Z_2'' & Z_3' & Z_3'' \cdots \\ Z_1'' & -Z_1' & Z_2'' & -Z_2' & Z_3'' & -Z_3' \cdots \\ 2Z_2' & 2Z_2'' & 2Z_3' & 2Z_3'' \cdots \\ 2Z_2'' & -2Z_2' & 2Z_3'' & -2Z_3' \cdots \\ 3Z_3' & 3Z_3'' \cdots \\ 3Z_3'' & -3Z_3' \cdots \\ \vdots & \vdots \cdots \\ \vdots & \vdots \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0' \\ F_0'' \\ F_1' \\ F_1'' \\ F_2' \\ F_2'' \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (74)$$

ただし  $H_k = H_k' + iH_k''$ ,  $F_k = F_k' + iF_k''$ ,  $Z_k = Z_k' + iZ_k''$

$H_k', H_k'', F_k', F_k'', Z_k', Z_k''$ : 実数, ( $k=0, 1, 2, \dots$ )

いま領域の形状、境界応力がともに虚軸に対して対称なときは(74)式は

$$\begin{pmatrix} H_0' \\ H_0'' \\ H_2' \\ H_3'' \\ H_4' \\ H_5'' \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0' \\ F_1'' \\ F_2' \\ F_3'' \\ F_4' \\ F_5'' \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_1' & Z_2'' & Z_3' & Z_4'' & Z_5' & Z_6'' \cdots \\ 2Z_2'' & -2Z_3' & 2Z_4'' & -2Z_5' & 2Z_6'' \cdots \\ 3Z_3' & 3Z_4'' & 3Z_5' & 3Z_6'' \cdots \\ 4Z_4'' & -4Z_5' & 4Z_6'' & -4Z_7' \cdots \\ 5Z_5' & 5Z_6'' & 5Z_7' \cdots \\ 6Z_6'' & -6Z_7' & 6Z_8'' \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_0' \\ F_1'' \\ F_2' \\ F_3'' \\ F_4' \\ F_5'' \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (74)'$$

実軸に対し対称なときは

$$\begin{pmatrix} H_0' \\ H_1' \\ H_2' \\ H_3' \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0' \\ F_1' \\ F_2' \\ F_3' \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_1' & Z_2' & Z_3' & Z_4' \cdots \\ 2Z_2' & 2Z_3' & 2Z_4' & 2Z_5' \cdots \\ 3Z_3' & 3Z_4' & 3Z_5' \cdots \\ 4Z_4' & 4Z_5' \cdots \\ \vdots & \vdots \cdots \\ \vdots & \vdots \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_0' \\ F_1' \\ F_2' \\ F_3' \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (74)''$$

実軸および虚軸に対し対称なときは

$$\begin{pmatrix} H_0' \\ H_2' \\ H_4' \\ H_6' \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0' \\ F_2' \\ F_4' \\ F_6' \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_1' & Z_3' & Z_5' & Z_7' & \cdots \\ 3Z_3' & 3Z_5' & 3Z_7' & \cdots & \\ 5Z_5' & 5Z_7' & \cdots & & \\ 7Z_7' & \cdots & & & \\ \vdots & \cdots & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_0' \\ F_2' \\ F_4' \\ F_6' \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (74)'''$$

となる。

これを数値計算して  $\sum_{k=0}^{\infty} |F_k|^2$  が収斂する解がえられるならば

$$F = \{F_0', F_0'', F_1', F_1'', F_2', F_2'', \dots\}, F_k = F_k' + iF_k'' \quad (75)$$

から計算したところの  $F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \zeta^k$  は所要の  $F(\zeta)$  を与え、さらに  $G(\zeta)$  が必要ならば (53) 式の終りの式から同様に  $G_k$  を計算すれば  $G(\zeta)$  が求まる。

無限元連立一次方程式を解くには、有限元で打切って普通の連立一次方程式の数値計算法によるか、または逐次近似法によるのが普通であるが、いまの場合はしばしば元数が多くなり、前者はかなりの労力を要する。しかしここで取扱う級数においては、実際上は  $Z_k (k=1, 2, 3, \dots)$  のうち絶対値の大きいのは最初の二、三項であるから、これを除いて逐次近似を行う方が簡単であり、かつ収斂も早くて有効である。

いま (74) 式を簡単に

$$H = F + Z_* F = (E + Z_*) F, E: \text{無限次の単位行列} \quad (76)$$

とかき、 $Z_0$  を  $(E + Z_0)$  の逆行列  $A$  が容易に求まる  $Z_*$  の近似正方行列として  $\Delta Z$  をその残差とする。すなわち

$$Z_* = Z_0 + \Delta Z, (E + Z_0)^{-1} = A \quad (77)$$

通常  $Z_0$  は  $Z_*$  の最初の二、三行、二、三列をとった正方行列にとる。そうすると通常の近似法では

$$F = (E + Z_*)^{-1} H = (E - Z_* + Z_*^2 - Z_*^3 + \dots) H \quad (78)$$

となるのに対し

$$H = (E + Z_*) F = \{(E + Z_0) + \Delta Z\} F, AH = (E + A \cdot \Delta Z) F \quad (79)$$

$$F = (E + A \cdot \Delta Z) AH = \{E - A \cdot \Delta Z + (A \cdot \Delta Z)^2 - (A \cdot \Delta Z)^3 + \dots\} AH \quad (80)$$

なる (80) 式を用いる。あるいは  $F^{(r)}$  を  $F$  の第  $r$  近似値とすると

$$F^{(0)} = AH, F^{(r)} = A \{H - \Delta Z \cdot F^{(r-1)}\} \quad (81)$$

もしくは

$$F^{*(r)} = H - \Delta Z \cdot F^{(r-1)}, F^{-1} = 0, F^{(r)} = AF^{*(r)} \quad (82)$$

のような漸化式をもって逐次計算をすればよい。

$A \cdot \Delta Z$  の元素の絶対値は  $\Delta Z$  のそれと同じ order であるから  $Z_0$  を適当にえらぶことによって必要なだけ小さくなる。しかしこれには一般に正方行列  $Z_0$  の次数を増さねばならぬから  $A$  を求め、また毎回演算を行うための労力が増すことになる。いまの場合実際の計算では  $Z_0$  をせいぜい 2 次すなわち  $Z_*$  の最初の 2 行 2 列にとって十分であるから、通常 3~4 回の逐次計算で十分である。

(74) 式に対し  $Z_*$  の第 2 行 2 列をとった 2 次の行列を  $Z_0$  とするときの漸化式 (82) 式は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} F_0'^* \\ F_1'^* \\ F_2' \\ F_3' \\ F_4' \\ F_5' \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_0' \\ H_1' \\ H_2' \\ H_3' \\ H_4' \\ H_5' \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & Z_3' & Z_4' & Z_5' & Z_6' & \dots \\ 0 & 0 & 2Z_4' & -2Z_5' & 2Z_6' & -2Z_7' & \dots \\ 3Z_3' & 3Z_4' & 3Z_5' & 3Z_6' & 3Z_7' & \dots & \dots \\ 4Z_4' & -4Z_5' & 4Z_6' & -4Z_7' & 4Z_8' & \dots & \dots \\ 5Z_5' & 5Z_6' & 5Z_7' & 5Z_8' & \dots & \dots & \dots \\ 6Z_6' & -6Z_7' & 6Z_8' & -6Z_9' & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_0' \\ F_1' \\ F_2' \\ F_3' \\ F_4' \\ F_5' \\ \vdots \end{pmatrix}^{(r-1)} \quad (83)$$

$$\begin{pmatrix} F_0' \\ F_1' \end{pmatrix}^{(r)} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_0'^* \\ F_1'^* \end{pmatrix}^{(r)}$$

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{1+(-2Z_3)}{|A|}, \quad A_{12} = \frac{-Z_2}{|A|}, \quad A_{21} = \frac{-2Z_2}{|A|}, \quad A_{22} = \frac{1+Z_1}{|A|} \\ |A| &= (1+Z_1)(1-2Z_3) - 2Z_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

このとき  $F_k^{(r)}$  ( $k=2, 3, \dots$ ) を求めるには  $F_h^{(r)}$  ( $h=0, 1, 2, \dots, (k-1)$ ) を用いる。

(83), (84)式の計算に当っては(83)式の右辺の第  $k$  行ははじめこれらの式の  $1/k$  を計算して後  $k$  倍して  $F_k^{(r)}$  を求める方が計算技術上便利である。その計算方式を第3図に示す。(74', (74''), (74''')式についても同様に行える。

### 7. 縁応力および曲率半径

このようにして境界条件式(46)式における各複素関数  $Z(\zeta)$ ,  $H(\zeta)$ ,  $F(\zeta)$  (および必要あれば  $G(\zeta)$  も) が求まると, ここで問題としているような自由境界における縁応力  $\widehat{\tau\tau}$  は  $\widehat{\nu\nu}=0$  であるから(88)式の上の式から

$$\widehat{\tau\tau} = 4R \cdot \{F(\zeta)/z'(\zeta)\} \quad (85)$$

で与えられる。

ところが前にものべたように無限遠点などの特異点を有するようときには上の  $F(\zeta)$  はそのまま単位円  $K$  上での正則性が満足さ

れてなく, 異常応力関数をさしひいてその正則性を満足しているのであるから, その異常応力関数をこの  $F(\zeta)$  に加えてやらねばならぬ。すなわち

$$\widehat{\tau\tau} = 4R \cdot \{F(\zeta) + \sum_{m=1}^n F_m(\zeta)\}/z'(\zeta) \quad (86)$$

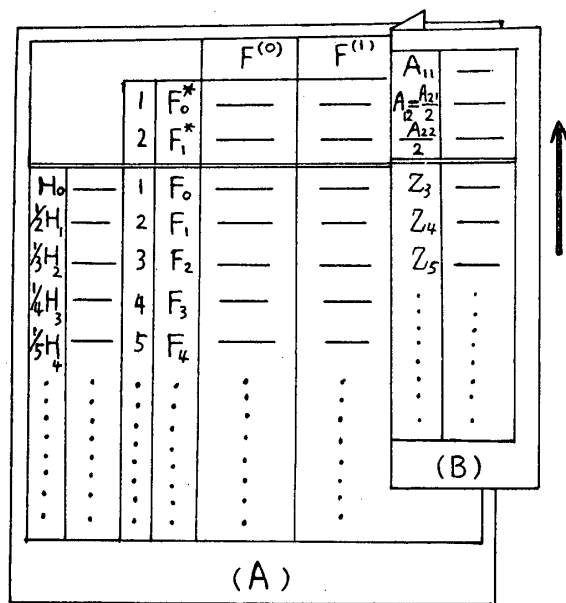
として計算する。これが我々の求める自由境界における縁応力である。

したがって応力集中係数を  $\alpha_s$  とすると

$$\alpha_s = \widehat{\tau\tau}_{max}/\widehat{\tau\tau}_{\infty} \quad (87)$$

となる。

次に単位円  $K$  上の点  $\sigma=e^{i\theta}$  に対応する写像曲線上の考える点  $z=z(\sigma)$  において領域の外側に向う法線を  $n$ ,  $x$  軸より  $n$  に到る角を  $\gamma$  とすると(82)式から



第3図  $F_k$  の計算

$$\gamma = \arg z'(\sigma) + \tau = I_m \log z'(\sigma) + \tau = \log \left\{ \frac{z'(\sigma)}{z'(\sigma)} \cdot \sigma \right\} \quad (88)$$

また写像曲線上の一定点より曲線に沿って考える点までの領域を左にみる向きを正として測った距離を  $s$  とすると曲率  $1/\rho$  は

$$1/\rho = d\gamma/ds = d\gamma/d\tau \cdot d\tau/ds \quad (89)$$

と定義されるから曲率  $1/\rho$ , 曲率半径  $\rho$  は領域が凸のときに正, 凹のときに負となる。しかして

$$\begin{aligned} d\gamma/d\tau &= d/d\tau \{ I_m \log z'(\sigma) + \tau \} = 1 + I_m \cdot \{ d/d\tau \log z'(e^{i\tau}) \} \\ &= 1 + I_m \cdot \{ i e^{i\tau} \cdot z''(e^{i\tau}) / z'(e^{i\tau}) \} \\ &= 1 + R \cdot \{ \sigma \cdot z''(\sigma) / z'(\sigma) \} \end{aligned} \quad (90)$$

また  $d\tau/ds = 1/|z'(\sigma)|$  であるから

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{|z'(\sigma)|} \left[ 1 + R \cdot \left\{ \sigma \frac{z''(\sigma)}{z'(\sigma)} \right\} \right] \quad (91)$$

となる。

### 8. 級数収斂に関する処理

我々がいま考えているような第1図に示すように境界曲線が無限遠点や凸角, 凹角をもつ領域の場合には, 写像関数はそれらに対応する単位円  $K$  上の点  $\zeta = \sigma_{\infty k}$  ( $k=1, 2, \dots, l$ ) で特異点をもつ。すなわちこのことを考慮すると(27)式は次のように書き表わされる。

$$z(\zeta) = \sum_{k=1}^l z_{\infty k} S_k(\sigma_{\infty k} - \zeta) + z_*(\zeta) \quad (92)$$

$S_k(\sigma_{\infty k} - \zeta)$ :  $\zeta = \sigma_{\infty k}$  で特異をもち, この点を除いて単位円  $T$  内で正則,  $T$  と  $K$  上で連続なる解析関数

$z_*(\zeta)$ : 単位円  $T$  内で正則,  $T$  と  $K$  上で連続なる解析関数

$$\therefore z'(\zeta) = \sum_{k=1}^l -z_{\infty k} S_k'(\sigma_{\infty k} - \zeta) + z_*'(\zeta) \quad (93)$$

となって  $\zeta = \sigma_{\infty k}$  で無限大となる。故にこれらの原点周りの Taylor 級数(61)式は単位円  $K$  上のこれらの点では明らかに発散し, その係数列も  $0$  に収斂しない。そうしてこの  $z(\zeta)$ ,  $z'(\zeta)$  から計算した  $Z(\zeta)$ ,  $F(\zeta)$  も当然その収斂はよくないことが予想せられ, したがって理論的には前述のように解けても級数を有限項で打切る実際上の数値計算は不可能となる。

そこでいま単位円  $T$  内で正則で  $0$  点をもたない関数を  $S(\zeta)$  としこの  $S(\zeta)$  または  $\bar{S}\left(\frac{r^2}{\zeta}\right)$  をこれら級数を求めるときに乗除して考える。たとえば  $Z(\zeta)$  を求める計算においては(63)式の分母分子に共に  $\bar{S}\left(\frac{r^2}{\zeta}\right)$  をかけ, そうしてあとはそこでのべた通りの計算を行えばよい。しかして  $S(\zeta)$  としては(92)式の  $S_k'(\sigma_{\infty k} - \zeta)$  の形に応じて適当にえらばねばならない。すなわち  $S_k'(\sigma_{\infty k} - \zeta)$  が極であって,  $S_k'(\sigma_{\infty k} - \zeta)^{-n_k}$ ,  $n_k=1, 2$  もしくは  $3$  ( $k=1, 2, \dots, l$ ) とすると  $S(\zeta)$  としてこれらの点に同次の  $0$  をもつところの

$$S(\zeta) = \prod_{k=1}^l (\sigma_{\infty k} - \zeta)^{n_k} \quad (94)$$

を用いればよい。

こうすることによって  $S_k(\sigma_{\infty k} - \zeta)$ ,  $S_k'(\sigma_{\infty k} - \zeta)$  が  $\zeta = \sigma_{\infty k}$  で無限大となることを打消して係数列は速やかに  $0$  に収斂し, 有限項打ち切りの計算が可能となる。

また縁応力を求める(86)式においても分母の  $z'(\zeta)$  はもちろん分子の  $F(\zeta)$  も上にのべたこ

とから当然収斂はよくない。したがってこのままでは有限項打ち切りによる計算はその打切る項の如何によって大きい変動を生じ、その結果は到底満足のゆくものではない。

そこでこの場合も上の  $Z(\zeta)$  で行ったと同じようにそれらの特異点を考慮した項(94)式を(86)式の分母分子にかけて、その特異点によって起るかかる現象をなくすることにする。すなわち

$$\widehat{\tau\tau} = 4R \cdot \frac{\{F(\zeta) + \sum_{m=1}^n F_m(\zeta)\} S(\zeta)}{z'(\zeta) S(\zeta)} \quad (95)$$

$$S(\zeta) = \prod_{k=1}^l (\sigma_{\infty k} - \zeta)^{n_k}, \quad \sigma_{\infty k}: \zeta = \sigma_{\infty k} \text{ で特異点をもつ}$$

とする。

こうすることによって  $F(\zeta) + \sum_{m=1}^n F_m(\zeta)$  および  $z'(\zeta)$  の収斂は  $Z(\zeta)$  の場合と同様当然よくなり、有限項打ち切りによる計算が可能となってくる。

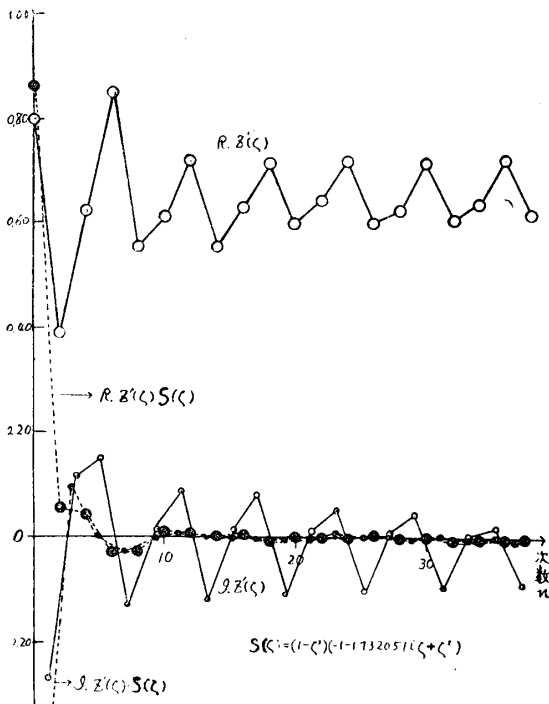
その例として片側に矩形出張りをもつ帯板の場合の  $F(\zeta)$ ,  $z'(\zeta)$  および  $F(\zeta) \cdot S(\zeta)$ ,  $z'(\zeta) \cdot S(\zeta)$  を第4, 5図に示す。(a) の場合は矩形出張りであり、(b) の場合は隅を丸めた矩形出張りの場合で何れも無限遠点を  $\zeta = \pm 1$ , 上の角の点  $\zeta = \zeta_1 = e^{i60^\circ}$ ,  $\zeta = \zeta_1' = e^{i120^\circ}$  にとってある。何れの場合も無限遠点と上の凸角の点について考慮を払えば、凹角の点については丸味をつければもちろんそうであるが、たとえ鋭い切欠きの場合でもそのような考慮は必要ないことを示している。

これは写像関数を求めるときの基礎式<sup>16)</sup>

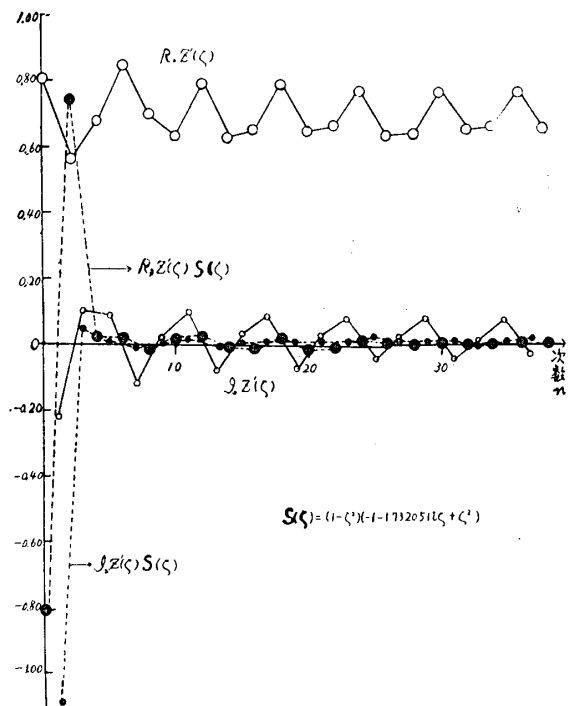
$$z'(\zeta) = \frac{C}{1-\zeta^2} \left\{ \frac{(\zeta-\zeta_0)(\zeta-\zeta_0')}{(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_1')} \right\}^{1/2}$$

$\zeta_0, \zeta_0'$ : 下の凹角の点に対応

$\zeta_1, \zeta_1'$ : 上の凸角の点に対応

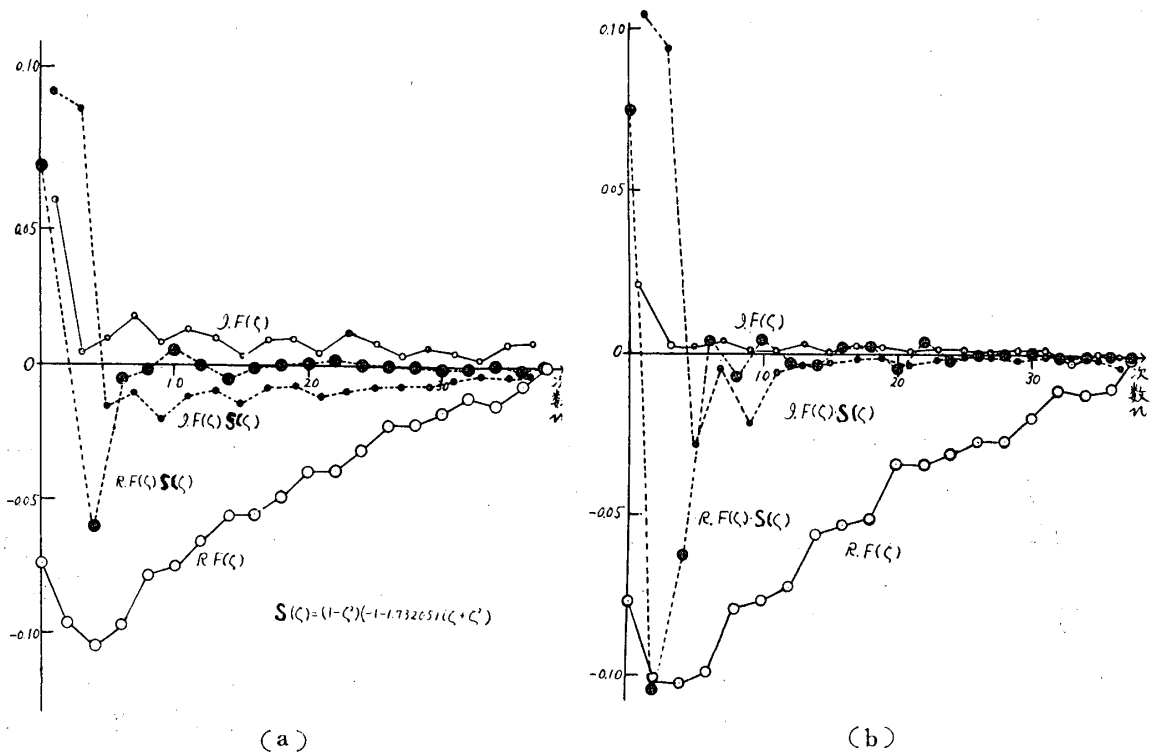


(a)



(b)

第 4 図



第 5 図

において  $\zeta = \pm 1$  および  $\zeta = \zeta_1, \zeta_1'$  が分母にあることからこれらの点においては  $z'(\zeta)$  が無限大となることからわかることである。すなわちこの場合には

$$S(\zeta) = (1-\zeta^2)(\zeta - e^{i60^\circ})(\zeta - e^{i120^\circ}) \\ = (1-\zeta^2)(-1 - 1.732051i\zeta + \zeta^2)$$

となり、この  $S(\zeta)$  が(9)式の分母分子にかけてある。

このような方法をとれば、いままで級数の収敛のわるいためかかる図形の数値計算が行いえなかったのであるがそのような場合でも数値計算は可能となるわけである。

### 9. 例 題

(1) 片側に矩形出張りをもつ帯板 (第 1 図)

この場合の写像関数<sup>17)</sup>は

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{C}{1-\zeta^2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n = \frac{C}{1-\zeta^2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n = C \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n \quad (96)$$

ここで  $a = \frac{1}{n}(\cos n\alpha_1 - \cos n\alpha_0), n: \text{偶数}$   
 $= \frac{i}{n}(\sin n\alpha_0 - \sin n\alpha_1), n: \text{奇数}$   
 $b_0 \equiv 1, b_n: a_1 a_2 \dots a_n \text{ の関数}$   
 $c_0 \equiv 1, c_n = \sum_{n=0,2,4}^{\infty} b_n, n: \text{偶数}; c_n = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} b_n, n: \text{奇数}$

したがって



$$z = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} \zeta^{n+1} = C \sum_{n=0}^{\infty} d_n \zeta^{n+1} \quad (97)$$

ここで  $C = 2 / \sum_{n=0}^{\infty} b \cdot \Pi$

$$\text{故に} \quad k = R \cdot \frac{2}{\sum_{n=0}^{\infty} b \cdot \pi} d_n e^{i(n+1)\alpha_0}, \quad 1+h = I_m \frac{2}{\sum_{n=0}^{\infty} b \cdot \pi} d e^{i(n+1)\alpha_1} \quad (98)$$

したがって

$$Z(\zeta) = \frac{z(\zeta) + \bar{z}(\frac{1}{\zeta})}{\bar{z}'(\frac{1}{\zeta})} = \frac{z(\zeta)(1-\zeta^{-2}) + \bar{z}(1/\zeta)(1-\zeta^{-2})}{\bar{z}'(1/\zeta)(1-\zeta^{-2})} = \sum_{n=0}^{\infty} Z_k \zeta^k \quad (99)$$

次に異常応力関数を考える。まず虚軸の左側の無限遠点に対応する  $\zeta = -1$  の附近で異常性を有する部分のみをとると(96)式から

$$z'(\zeta) = \frac{C}{2} \left\{ 1/(1+\zeta) + 1/(1-\zeta) \right\} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n \quad (100)$$

$$\therefore z'(\zeta) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+\zeta} \quad (101)$$

しかして

$$F(\zeta) = \varphi'\{z(\zeta)\} z'(\zeta), \quad G(\zeta) = \psi'\{z(\zeta)\} z'(\zeta)$$

であって無限遠で引張りのみをうけるときは  $\widehat{xx}=1, \widehat{yy}=0, \widehat{xy}=0$  であるから、このときの  $\varphi'\{z(\zeta)\}, \psi'\{z(\zeta)\}$  は(92)式から

$$\varphi'\{z(\zeta)\} = 1/4, \quad \psi'\{z(\zeta)\} = -3/4$$

したがって

$$F(\zeta) = 1/\pi \cdot 1/1+\zeta, \quad G(\zeta) = -3/\pi \cdot \frac{1}{1+\zeta} \quad (102)$$

同様に実軸の右側の無限遠点に対応する  $\zeta = 1$  の附近で異常性を有する部分のみをとると(100)式から

$$F(\zeta) = 1/\pi \cdot 1/1-\zeta, \quad G(\zeta) = -3/\pi \cdot 1/1-\zeta \quad (103)$$

故に両者あわせて異常応力関数として

$$F_{\infty}(\zeta) = 1/2\pi \cdot 1/1-\zeta^2, \quad G_{\infty}(\zeta) = -3/2\pi \cdot 1/1-\zeta^2 \quad (104)$$

したがってこれらに対する境界応力関数  $H_{\infty}(\sigma)$  は(74)式から

$$\begin{aligned} H_{\infty}(\sigma) &= \left[ F_{\infty}(\zeta) + \frac{d}{d\zeta} \{ Z(\zeta) \bar{F}_{\infty}(1/\zeta) \} + \frac{-1}{\zeta^2} \bar{G}_{\infty}(\frac{1}{\zeta}) \right]_{\zeta=\sigma} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{1-\zeta^2} + \frac{d}{d\zeta} \left\{ Z(\zeta) \frac{1}{1-\zeta^{-2}} \right\} + \frac{-1}{\zeta^2} \frac{-3}{1-\zeta^{-2}} \right]_{\zeta=\sigma} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{-2}{1-\zeta^2} + \frac{d}{d\zeta} \left\{ Z(\zeta) \frac{1}{1-\zeta^{-2}} \right\} \right]_{\zeta=\sigma} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{d}{d\zeta} \left( \left\{ Z(\zeta) - (1-\zeta^{-2}) \log \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right\} \frac{1}{1-\zeta^{-2}} \right) \right]_{\zeta=\sigma} \end{aligned} \quad (105)$$

しかして他に何らの力が作用していないものとするとき求める境界応力関数  $H(\zeta)$  は

$$H(\zeta) = -H_{\infty}(\zeta) \quad (106)$$

となり  $Z(\zeta), H(\zeta)$  から  $F(\zeta)$  も直ちに計算でき縁応力  $\widehat{\tau\tau}$  が求められる。この際  $S(\zeta)$  としては  $\alpha_0 = 30^\circ, \alpha_1 = 60^\circ$  であるから

$$S(\zeta) = (1 - \zeta^2)(\zeta - e^{i60^\circ})(\zeta - e^{i120^\circ})$$

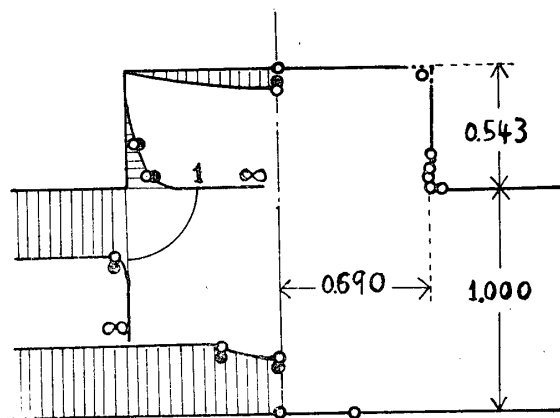
$$= (1 - \zeta^2)(-1 - 1.732051i\zeta + \zeta^2)$$

をとっている。

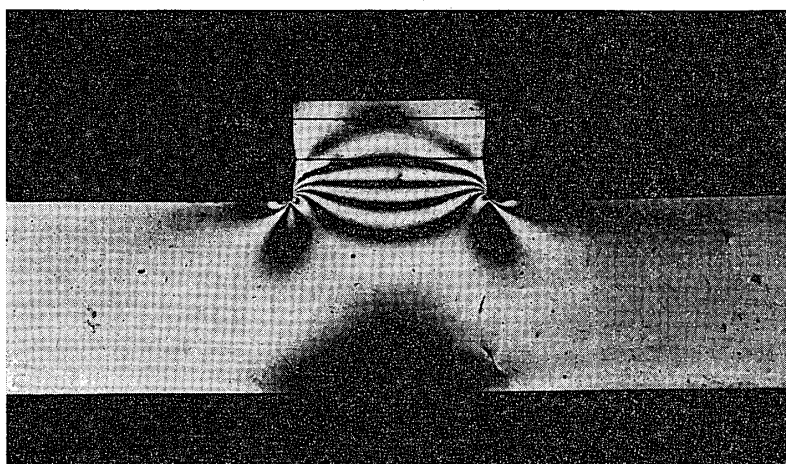
この結果各点における縁応力値をプロットしたのが第6図の左半分の白点であり黒点は光弾性実験による実験値で、また右半分の点は  $z(\zeta)$  から計算した各坐標点であり、第7図はその光弾性実験写真(等色線)である。この場合はもちろん

$$\tau_{\max} = \infty \quad \therefore \alpha_s = \infty, 1/\rho = \infty$$

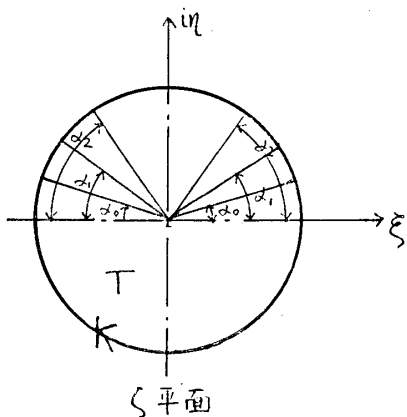
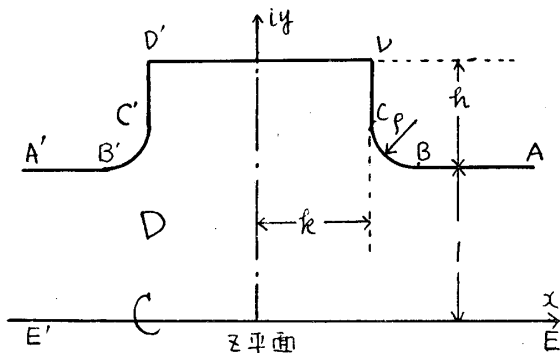
となる。



第6図



第7図



第8図

(2) 片側に隅を丸めた矩形出張りをもつ帯板 (第8図)

この場合の写像関数<sup>19)</sup>は

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{C}{1 - \zeta^2} e^{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n} = \frac{C}{1 - \zeta^2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n$$

$$= C \sum c_n \zeta^n \quad (107)$$

ここで

$$a = \frac{1}{n} \cos n\alpha_2 + \frac{1}{n^2}$$

$$\times \frac{\sin n\alpha_0 - \sin n\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0}, \quad n: \text{偶数}$$

$$= \frac{i}{n} \sin n\alpha_2 + \frac{i}{n^2}$$

$$\times \frac{\cos n\alpha_0 - \cos n\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0}, \quad n: \text{奇数}$$

$$\therefore z(\zeta) = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} \zeta^{n+1} = C \sum_{n=0}^{\infty} d_n \zeta^{n+1}$$

$$C = 2 / \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \pi$$

(108)

したがって

$$\left. \begin{aligned} k+\rho &= R \cdot \frac{2}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \pi} d_n e^{i(n+1)\alpha_0} \\ 1+\rho &= I_m \cdot \frac{2}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n \pi} d_n e^{i(n+1)\alpha_1} \\ 1+h &= I_m \cdot \frac{2}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n \pi} d_n e^{i(n+1)\alpha_2} \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

したがって  $Z(\zeta)$  は(99)式と同様に行い、また異常応力関数は前の場合と全く等しく

$$F_{\infty}(\zeta) = 1/2\pi \cdot 1/1-\zeta^2, \quad G_{\infty}(\zeta) = -3/2\pi \cdot 1/1\zeta^2 \quad (110)$$

$H_{\infty}(\zeta)$  は(105)式と同形となり、境界応力関数  $H(\sigma)$  は

$$H(\sigma) = -H_c(\sigma) \quad (111)$$

となる。そうしてこの場合の  $S(\zeta)$  は  $\alpha_0=30^\circ$ ,  $\alpha_1=45^\circ$ ,  $\alpha_2=60^\circ$  であるから、 $\alpha_0, \alpha_2$  のみ注目して前と全く同様な

$$\begin{aligned} S(\zeta) &= (1-\zeta^2)(\zeta-e^{i60^\circ})(\zeta-e^{i120^\circ}) \\ &= (1-\zeta^2)(-1-1.732051i\zeta+\zeta^2) \end{aligned}$$

となる。

この結果各点における縁応力をプロットしたのが第9図の左半分の白点であり、黒点は光弾性実験による実験値、右半分の白点は  $z(\zeta)$  から計算した各坐標点であり、第10図は光弾性実験写真(等色線)である。この場合は

$$\widehat{\tau\tau}_{max} = 3.25 \quad (\alpha=35^\circ)$$

となり

$$\alpha_s = \widehat{\tau\tau}_{max} / \widehat{x x}_{\infty} = 3.25$$

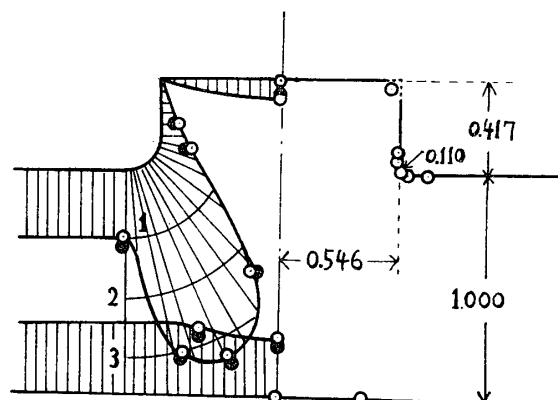
また図から求めた曲率半径  $\rho$  は

$$\rho = 0.110$$

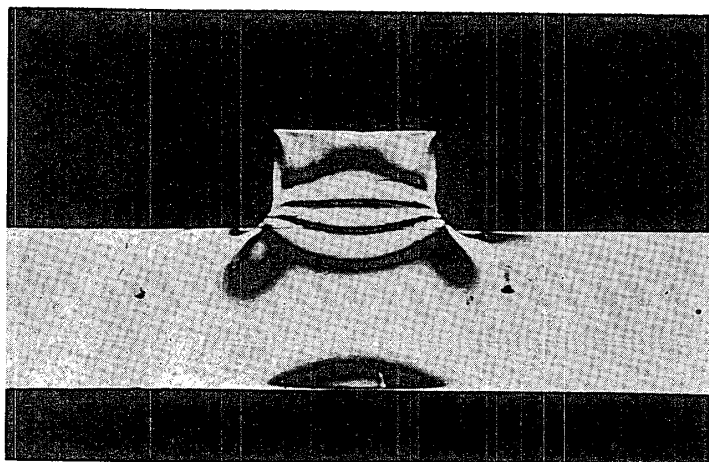
となり、 $\widehat{\tau\tau}_{max}$  の点すなわち  $\alpha=35^\circ$  における曲率半径を(91)式から計算すると

$$\rho = 0.095$$

となる。図から求めたのと計算から求めた値が少しちがうのは丸味のところが完全な円弧でなく、図から求めた値は各点の曲率半径の平均値がとってあるからである。



第9図



第10図

## 10. 結 語

以上不連続個所をもつような二次元の平面応力問題を写像関数が与えられたとして<sup>17)</sup>, その写像関数から出発して Goursat-Kikukawa の複素応力関数を用いてその応力境界値問題における基礎方程式を導き, その数値計算の方法をのべ, 片側に矩形出張りおよび隅を丸めた矩形出張りのある場合について計算を行い光弾性実験でその値を検討した。

この方法はもちろんあらゆる二次元問題に適用されるが, この例題のように発散もしくは極めて収斂のわるい場合にはその特異点を考慮した項  $S(\zeta)$  を考え, これを巧みに乗除することによって, その級数の収斂をよくし, 有限項打ち切りによる数値計算ができるようにした。しかして従来はかかる形の不連続個所を有する二次元問題においてはその級数の収斂の極めて悪いため殆ど数値解は不可能視されていたのであるが, こうすれば完全に解くことができるようになった。

最後に本研究に当っては大阪大学教授菊川真博士に終始御指導をうけ, また同太田友彌博士, 山口大学久保敏彦氏にも御指導御助言をいただいた。あわせて厚く感謝するものである。尙本研究は昭和33年度科学研究(各個研究)による研究の一部である。

## 文 献

- 1) 浅羽隆太郎, 造船協会会報, 42,(昭3), 25  
 久野重一郎, 九大工学彙報, 4, 6, 390  
 渡辺恵弘, 九大工学彙報, 6, 2, 86  
 小川貞英, 造船協会会報, 25,(大12), 213  
 沢田正雄, 造船協会会報, 66,(和25), 27  
 横田茂年, 東京大学工学部紀要, 20, 4, 101  
 鵜戸口英善, 機械学会論文集, 13, 44,(昭22), 17 および 15, 50,(昭24), 77  
 R. C. J. Howland, Phil. Trans. Roy. Soc., Lon, A229,(1930), 49  
 R. C. J. Howland & A.C. Stevenson, Phil. Trans. Roy. Soc., London, A232 (1933) 155 etc.
- 2) C. E. Inglis. Trans. Inst. Naval. Architects, (1913), Part I, 219  
 広田守道, 造船協会会報, 18,(大5)  
 石田 誠, 機械学会論文集, 21, 107,(昭30) 502, および 507  
 竹内洋一郎, 機械学会論文集, 23, 131,(昭32) 447
- 3) 太田友彌, 造船協会会報, 54,(昭9), 5  
 Joseph, J. Appl. Mech., 17, 4 ,(1950), 353  
 竹内洋一郎, 機械学会論文集, 23, 127,(昭32), 124  
 石田 誠, 第9回応力連合講演会前刷, (昭34), 33
- 4) 石橋 正, 九大工学紀要, 9, 2 ,(1940), 131  
 C. B. Ling, J. Math. & Phys., 26, 4 ,(1948), 284  
 玉手 統, 機械学会論文集, 18, 75,(昭27), 7  
 石田 誠, 機械学会論文集, 19, 83,(昭28), 5  
 渥美 光, 機械学会論文集, 20, 99,(昭29), 699
- 5) 鵜戸口英善, 機械学会論文集, 16, 55,(昭25), 44
- 6) 菊川 真, Proc. 4 J. N. C. A. M., (1954) 148
- 7) Neuber, Kerbspannungslehre, Julius Springer, Berlin, 1937
- 8) 菊川 真, (6)に同じ

- 9) 太田友彌, 半田孝男, 造船協会会報, 83,(昭23), 53  
 永井 保, 造船協会会報, 91,(昭31), 35  
 野村恭雄, 山口大学工学部学報, 8, 1, (昭32), 25
- 10) 野村恭雄, 機械学会論文集, 25, 159,(昭34), 1075  
 野村恭雄, 山口大学工学部学報, 9, 1,(昭和33), 1
- 11) G. B. Airy, (1862)
- 12) É. Goursat, Bull. de la Soc. Math. de France, 26,(1898),236
- 13) N. I. Muskhelishvili (J. R. M. Radok 英訳), Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity (Groningen Holland, 1953)
- 14) 横田成年, 機械学会誌, 18, 34,(大正4), 1
- 15) 菊川 真, J. N. C. A. M. 1,(1951) 185; 3,(1953), 5; 4,(1954), 149,

Goursat の複素関数と Goursat-Kikukawa の複素関数との差異

- ① Goursat のは如何なる坐標軸の移動に対しても不変とならないが Goursat-Kikukawa のは虚軸方向の平行移動に対しては不変である。
  - ② したがって変位, 応力が虚軸方向に週期性をもつときは Goursat-Kikukawa の複素応力関数も週期性をもつが Goursat のはもたない。
  - ③ さらに応力境界値問題についても同様に Goursat-Kikukawa の複素応力関数は週期性をもち, Goursat はもたない。
  - ④ たとえば無限板に一系列にならんだスリフトとか孔のある場合には Goursat-Kikukawa のなら簡単にとける。
- 16) 野村恭雄, 山口大学工学部学報, 9, 1,(昭33), 9,(35) 式
- 17) 同, (36), (37), (38) 式
- 18) 同, (45) 式