

熱輻射と熱伝導が共存するときの熱伝達

村川 勝 彌* ・ 梅木 正 二**

要 旨

工業上、高温度のもとで運転される熱交換装置では熱伝導、熱伝達、熱輻射が同時に共存する場合がきわめて多くこの場合の研究開発の必要性に迫られているが、これに関する研究は少なく、また理論的にも、実験的にも、非常に困難である。

著者らは多層円筒内を高温ガスが流れ円筒内面および、外部でも熱輻射、熱伝導、熱伝達が同時に共存する場合について、グリーン関数、固有値、固有関数と積分方程式を使用して理論解析を行なった。

次に、微分方程式や積分方程式を解くよりも、有限ハンケル変換によって解けばさらに容易であることもわかった。

1. 緒 言

高温度のもとで運転される熱交換装置においては、加熱、冷却用流体による対流熱伝達や熱伝導以外に、高温度のため大量な輻射熱量を受け、熱輻射、熱伝導、対流熱伝達が同時に共存する場合¹⁾³⁾がきわめて多いが、この場合の研究は理論的にも、実験的にも非常に困難である。産業の進展とともに高温度下で作動する熱交換装置が多くなり、熱輻射、熱伝導、対流熱伝達が同時に共存する場合の研究開発の必要性に迫られている。

著者らは、多層円筒内を高温ガスが流れ、円筒内面および外部へも熱輻射、熱伝導、熱伝達によって熱が伝わる場合、および円筒内にヒレ付円柱がある場合、ヒレ付円柱からの発熱量や熱輻射、熱伝達、熱伝導を同時に考えた場合について理論解析を行なうことにした。

2. 三重壁円筒内を高温ガスが流れる場合

三重壁を有する円筒における熱伝達の問題は、工業上各種熱交換器、セメント焼成用ロータリーキルンなどにおいて、優れた保温材の発達に伴いますます多くなってきた。しかるに、これら機器の設計に際し熱伝達の問題は実測データから推定して計算する場合が多い。次に扱う理論解に類似したものは、さきに米国の Perlmutter 及び Siegel 両氏によって発表¹⁾されたが、これは単層で熱輻射を内面のみ考慮し、電子計算機で数値計算を行なったものであるにすぎないが、本論文では実際の工業上に必要な三層について熱輻射、熱伝導、熱伝達を、内外両面共に考慮して解析する。

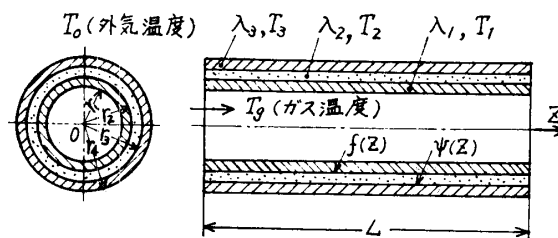


図1 三重壁円筒断面図

2, 1 無次元化

〔I〕の領域について

基礎方程式及び境界条件：

* 機械工学教室

** 宇部興産(株)

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial Z^2} = 0 \quad (1)$$

$$-\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial r} \right)_{r=r_1} = [-BT_1 - CT_1 + k]_{r=r_1} \quad (2)$$

$$[T_1]_{r=r_2} = F(Z) \quad (3)$$

$$-\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial r} \right)_{r=r_2} = -\lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial r} \right)_{r=r_2} \quad (4)$$

ただし, λ : 耐火材, 断熱材の熱伝導率

無次元化するために次のごとくおく.

$$x_1 = (r-r_1)/(r_2-r_1), \quad 0 \leq x_1 \leq 1 \quad (5)$$

$$z = Z/L, \quad 0 \leq z \leq 1 \quad (6)$$

$$\theta = T_1/T_0 \quad (7)$$

以上を(1)式に代入して整理すれば

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{1}{x_1 + \frac{r_1}{r_2-r_1}} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \left(\frac{r_2-r_1}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

同じく(2)式は

$$-\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1} \right)_{x_1=0} = [-a\theta^4 - b\theta + d]_{x_1=0} \quad (9)$$

次に(3)式において

$$f_0(z) = F(Z)/T_0 \quad \text{とすると,}$$

$$T_0(\theta)_{x_1=1} = T_0 f_0(z)$$

$$\therefore (\theta)_{x_1=1} = f_0(z) \quad (10)$$

ここで

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} [-a\theta^4 - b\theta + d] = \Phi$$

$$\therefore \log \Phi = \int \frac{d\theta}{-a\theta^4 - b\theta + d} \quad (11)$$

$$\theta = a_n \Phi + b_n \quad \text{または} \quad \Phi = A_n \theta + B_n \quad (12)$$

(ただし, a_n, b_n または A_n, B_n はルジャンドルの多項式 P_n を使って全体的に近似させる)

とすれば, (8) 式は

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{1}{x_1 + \frac{r_1}{r_2-r_1}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \left(\frac{r_2-r_1}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (13)$$

(9) 式は

$$-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)_{x_1=0} = (\Phi)_{x_1=0} \quad (14)$$

(10) 式から

$$(\Phi)_{x_1=1} = A_n f_0(z) + B_n = f(z) \quad (15)$$

ここで $\Phi = u + x_1^2 f(z)$ とおき無次元化した式は,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1}{x_1 + \frac{r_1}{r_2-r_1}} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \left(\frac{r_2-r_1}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + Q(x_1, z) = 0 \end{array} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)_{x_1=0} = (u)_{x_1=0} \end{array} \right. \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (u)_{x_1=1} = 0 \end{array} \right. \quad (18)$$

同じようにして〔II〕の領域については基礎方程式及び境界条件は,

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial Z^2} = 0 \quad (19)$$

$$(T_2)_{r=r_2} = F(Z) \quad (20)$$

$$(T_2)_{r=r_3} = \Psi(Z) \quad (21)$$

無次元化するため次のようにおく.

$$x_2 = (r-r_2) / (r_3-r_2), \quad 0 \leq x_2 \leq 1 \quad (22)$$

$$z = Z / L, \quad 0 \leq z \leq 1 \quad (23)$$

$$\theta = T_2 / T_0 \quad (24)$$

以上を(19)式に代入して整理すれば,

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \frac{1}{x_2 + \frac{r_1}{r_3-r_2}} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \left(\frac{r_3-r_2}{L}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad (25)$$

次に(20)式にて

$$f_0(z) = F(Z) / T_0 \quad \text{とすると,}$$

$$(\theta)_{x_2=0} = f_0(z) \quad (26)$$

(21) 式にて

$$\psi_0(z) = \Psi(Z) / T_0 \quad \text{とすると,}$$

$$(\theta)_{x_2=1} = \psi_0(z) \quad (27)$$

$$\theta = u + [\psi_0(z) - f_0(z)] \cdot x_2 + f_0(z) \quad (28)$$

とおくと, (25)式は, 無次元化して次式となる.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{1}{x_2 + \frac{r_1}{r_3-r_2}} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \left(\frac{r_3-r_2}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + Q(x_2, z) = 0 \end{array} \right. \quad (29)$$

$$(u)_{x_2=0} = 0 \quad (30)$$

$$(u)_{x_2=1} = 0 \quad (31)$$

次に〔Ⅲ〕の領域については

基礎方程式及び境界条件は,

$$\frac{\partial^2 T_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_3}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_3}{\partial Z^2} = 0 \quad (32)$$

$$-\lambda_3 \left(\frac{\partial T_3}{\partial r} \right)_{r=r_4} = [AT_3^4 + DT_3 - E]_{r=r_4} \quad (33)$$

$$(T_3)_{r=r_3} = \Psi(Z) \quad (34)$$

無次元化するために次のようにおく.

$$x_3 = (r-r_3) / (r_4-r_3), \quad 0 \leq x_3 \leq 1 \quad (35)$$

$$z = Z / L, \quad 0 \leq z \leq 1 \quad (36)$$

$$\theta = T_3 / T_0 \quad (37)$$

以上を(32)式に代入して整理すると,

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} + \frac{1}{x_3 + \frac{r_3}{r_4-r_3}} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} + \left(\frac{r_4-r_3}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad (38)$$

(33)式から

$$-\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_3} \right)_{x_3=1} = [-a\theta^4 - d\theta + e]_{x_3=1} \quad (39)$$

次に(34)式において

$$\psi_0(z) = \Psi(Z) / T_0 \quad \text{とすると,}$$

$$T_0(\theta)_{x_3=0} = T_0\psi_0(z)$$

$$\therefore (\theta)_{x_3=0} = \psi_0(z) \quad (40)$$

(39)式において

$$\frac{\partial \theta}{\partial \theta} \cdot [-a\theta^4 - d\theta + e] = \theta$$

$$\therefore \log_e \Phi = \int \frac{d\theta}{-a\theta^4 - d\theta + e} \quad (41)$$

$$\Phi = A'_n \theta + B'_n \quad \text{又は} \quad \theta = a'_n \Phi + b'_n \quad (42)$$

とすれば, (38)式は

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} + \frac{1}{x_3 + \frac{r_3}{r_4 - r_3}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \left(\frac{r_4 - r_3}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (43)$$

(39)式は

$$-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_{x_3=1} = (\Phi)_{x_3=1} \quad (44)$$

(40)式から

$$(\Phi)_{x_3=0} = A'_n \psi_0(z) + B'_n = \psi(z) \quad (45)$$

ここで $\Phi = u + (1-x_3)^2 \cdot \psi(z)$ とおけば

$$(u)_{x_3=0} = 0, \quad -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_{x_3=1} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \right)_{x_3=1}, \quad (\Phi)_{x_3=1} = (u)_{x_3=1}$$

(44)式から

$$-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_{x_3=1} = (u)_{x_3=1}$$

以上より無次元化した式は,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{1}{x_3 + \frac{r_3}{r_4 - r_3}} \frac{\partial u}{\partial x_3} + \left(\frac{r_4 - r_3}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + Q(x_3, z) = 0 & (46) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \right)_{x_3=1} = (u)_{x_3=1} & (47) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (u)_{x_3=0} = 0 & (48) \end{cases}$$

2. 2 グリーン関数による u の解法

[I] の領域

(29), (30), (31)式において

$$u = w \left(x + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (49)$$

とおき, 基準型にすると,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{1}{4 \left(x_1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right)^2} w + \left(\frac{r_2 - r_1}{L} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 & (50) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)_{x_1=0} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_2}{r_1} \right) (w)_{x_1=0} & (51) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (w)_{x_1=1} = 0 & (52) \end{cases}$$

変数分離して,

$$w = y(x, \xi; \lambda) \cdot Z(z, \eta; \lambda)$$

とおけば,

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx_1^2} + \frac{1}{4 \left(x_1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right)^2} y + \lambda y = 0 & (53) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\left(\frac{dy}{dx_1} \right)_{x_1=0} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_2}{r_1} \right) \cdot (y)_{x_1=0} & (54) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y)_{x_1=1} = 0 & (55) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z \text{ に関しては,} \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} - \lambda \left(\frac{L}{r_2 - r_1} \right)^2 Z = 0 & (56) \end{cases}$$

基本解は,

$$u_1(x_1) = \left(x_1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot J_0 \left\{ \sqrt{\lambda} \left(x_1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right) \right\} \quad (57)$$

$$u_2(x_1) = \left(x_1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot Y_0 \left\{ \sqrt{\lambda} \left(x_1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right) \right\} \quad (58)$$

$$Z(z) = A \cos h\sqrt{\lambda} z + B \sinh\sqrt{\lambda} z \quad (59)$$

境界条件から、グリーン関数は、

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, \xi_1; \lambda_1) &= \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2(b-a)} \left[u_1(x_1) \{u_1(\xi_1) - au_2(\xi_1)\} + u_2(x_1) \{abu_2(\xi_1) - bu_1(\xi_1)\} \right] \\ &\quad \dots\dots\dots [0 \leqq x_1 \leqq \xi_1] \\ &= \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2(b-a)} \left[u_1(x_1) \{u_1(\xi_1) - bu_2(\xi_1)\} + u_2(x_1) \{abu_2(\xi_1) - au_1(\xi_1)\} \right] \\ &\quad \dots\dots\dots [\xi_1 \leqq x_1 \leqq 1] \end{aligned} \quad (60)$$

ただし、

$$\begin{aligned} a &= \frac{J_0 \{ \sqrt{\lambda} r_2 / (r_2 - r_1) \}}{Y_0 \{ \sqrt{\lambda} r_2 / (r_2 - r_1) \}} \\ b &= \frac{2r_2 / r_1 \cdot J_0 \{ \sqrt{\lambda} r_1 / (r_2 - r_1) \} - 2\sqrt{\lambda} J_1 \{ \sqrt{\lambda} r_1 / (r_2 - r_1) \}}{2r_2 / r_1 \cdot Y_0 \{ \sqrt{\lambda} r_1 / (r_2 - r_1) \} - 2\sqrt{\lambda} Y_1 \{ \sqrt{\lambda} r_1 / (r_2 - r_1) \}} \end{aligned}$$

次に、 z に関するグリーン関数は対象形になるよう $y_1(z)$, $y_2(z)$ の形を考え、

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha \frac{\cos h\sqrt{\lambda} (z - \eta + 1)}{\cos h\sqrt{\lambda} (-\eta + 1)} \\ y_2 &= \beta \frac{\cos h\sqrt{\lambda} (z - \eta - 1)}{\cos h\sqrt{\lambda} (-\eta)} \end{aligned}$$

グリーン関数の性質、すなわち、跳躍量を持つという条件から α , β を決定し、

$$\begin{aligned} \Gamma(z_1, \eta_1; \lambda_1) &= \frac{\cos h\sqrt{\lambda} \{L / (r_2 - r_1)\} (z - \eta + 1)}{2\sqrt{\lambda} L / (r_2 - r_1) \sin h\sqrt{\lambda} \{L / (r_2 - r_1)\}} \quad \dots\dots\dots [0 \leqq z \leqq \eta] \\ &= \frac{\cos h\sqrt{\lambda} \{L / (r_2 - r_1)\} (z - \eta - 1)}{2\sqrt{\lambda} L / (r_2 - r_1) \sin h\sqrt{\lambda} \{L / (r_2 - r_1)\}} \quad \dots\dots\dots [1 \geqq z \geqq \eta] \end{aligned} \quad (61)$$

以上から、

$$\begin{aligned} \therefore u_1(x_1, z_1) &= \left(x_1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right)^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 \int_0^1 \Gamma_1(x_1, \xi_1; \lambda_1) \Gamma_1(z_1, \eta_1; \lambda_1) \cdot \left(\xi_1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad Q(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1 \end{aligned} \quad (62)$$

〔Ⅱ〕および、〔Ⅲ〕の領域についても、全く同様に u を求めることができる。結果のみ記すと、

〔Ⅱ〕の領域

$$\begin{aligned} \Gamma_2(x_2, \xi_2; \lambda_2) &= \frac{b}{A} \left\{ u_1(x_2) - u_2(x_2) \frac{u_1(x_2=0)}{u_2(x_2=0)} \right\} \quad \dots\dots\dots [0 \leqq x_2 \leqq \xi_2] \\ &= \frac{a}{A} \left\{ u_1(x_2) - u_2(x_2) \frac{u_1(x_2=1)}{u_2(x_2=1)} \right\} \quad \dots\dots\dots [1 \geqq x_2 \geqq \xi_2] \end{aligned} \quad (63)$$

ただし、

$$\begin{aligned} a &= \frac{u_1(\xi_2)u_2(x_2=0) - u_1(\xi_2)u_1(x_2=0)}{u_2(x_2=0)} \\ b &= \frac{u_1(\xi_2)u_2(x_2=1) - u_1(\xi_2)u_1(x_2=1)}{u_2(x_2=1)} \\ u_1(x_2) &= \left(x_2 + \frac{r_2}{r_3 - r_2}\right)^{\frac{1}{2}} J_0 \left\{ \sqrt{\lambda} \left(x_2 + \frac{r_2}{r_3 - r_2}\right) \right\} \\ u_2(x_2) &= \left(x_2 + \frac{r_2}{r_3 - r_2}\right)^{\frac{1}{2}} Y_0 \left\{ \sqrt{\lambda} \left(x_2 + \frac{r_2}{r_3 - r_2}\right) \right\} \\ \frac{1}{A} &= \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2} \frac{u_2(x_2=0)u_2(x_2=1)}{u_1(x_2=0)u_2(x_2=1) - u_1(x_2=1)u_2(x_2=0)} \end{aligned}$$

z に関し、

$$\begin{aligned} \Gamma_2(z_2, \eta_2; \lambda_2) &= \frac{\cosh \sqrt{\lambda} \{L / (r_3 - r_2)\} (z - \eta + 1)}{2\sqrt{\lambda} L / (r_3 - r_2) \sinh \sqrt{\lambda} \{L / (r_3 - r_2)\}} \dots\dots\dots [0 \leq z_2 \leq \eta_2] \\ &= \frac{\cosh \sqrt{\lambda} \{L / (r_3 - r_2)\} (z - \eta - 1)}{2\sqrt{\lambda} L / (r_3 - r_2) \sinh \sqrt{\lambda} \{L / (r_3 - r_2)\}} \dots\dots\dots [1 \geq z_2 \geq \eta_2] \end{aligned} \quad (64)$$

以上から,

$$\begin{aligned} \therefore u_2(x_2, z_2) &= \left(x_2 + \frac{r_2}{r_3 - r_2}\right)^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 \int_0^1 \Gamma_2(x_2, \xi_2; \lambda_2) \Gamma_2(z_2, \eta_2; \lambda_2) \cdot \left(\xi_2 + \frac{r_2}{r_3 - r_2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad Q(\xi_2, \eta_2) d\xi_2 d\eta_2 \end{aligned} \quad (65)$$

〔Ⅲ〕の領域

$$\begin{aligned} \Gamma_3(x_3, \xi_3; \lambda_3) &= \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2(b-a)} \{u_1(x_3) \{u_1(\xi_3) - bu_2(\xi_3)\} + u_2(x_3) \{abu_2(\xi_3) - au_1(\xi_3)\}\} \\ &\quad \dots\dots\dots [0 \leq x_3 \leq \xi_3] \\ &= \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2(b-a)} \{u_1(x_3) \{u_1(\xi_3) - au_2(\xi_3)\} + u_2(x_3) \{abu_2(\xi_3) - bu_1(\xi_3)\}\} \\ &\quad \dots\dots\dots [1 \geq x_3 \geq \xi_3] \end{aligned} \quad (66)$$

ただし,

$$\begin{aligned} a &= \frac{J_0 \{\sqrt{\lambda} r_3 / (r_4 - r_3)\}}{Y_0 \{\sqrt{\lambda} r_3 / (r_4 - r_3)\}} \\ b &= \frac{[\{1 + (r_4 / r_3)\} \{r_4 / (r_4 - r_3)\} + 1] J_0 \{\sqrt{\lambda} r_4 / (r_4 - r_3)\} - 2\sqrt{\lambda} x_4 / (r_4 - r_3) J_1 \{\sqrt{\lambda} r_4 / (r_4 - r_3)\}}{[\{1 + (r_4 / r_3)\} \{r_4 / (r_4 - r_3)\} + 1] Y_0 \{\sqrt{\lambda} r_4 / (r_4 - r_3)\} - 2\sqrt{\lambda} r_4 / (r_4 - r_3) Y_1 \{\sqrt{\lambda} r_4 / (r_4 - r_3)\}} \\ u_1(x_3) &= \left(x_3 + \frac{r_3}{r_4 - r_3}\right)^{\frac{1}{2}} J_0 \left\{\sqrt{\lambda} \left(x_3 + \frac{r_3}{r_4 - r_3}\right)\right\} \\ u_2(x_3) &= \left(x_3 + \frac{r_3}{r_4 - r_3}\right)^{\frac{1}{2}} Y_0 \left\{\sqrt{\lambda} \left(x_3 + \frac{r_3}{r_4 - r_3}\right)\right\} \end{aligned}$$

z に関し,

$$\begin{aligned} \Gamma_3(z_3, \eta_3; \lambda_3) &= \frac{\cosh \sqrt{\lambda} \{L / (r_4 - r_3)\} (z - \eta + 1)}{2\sqrt{\lambda} L / (r_4 - r_3) \sinh \sqrt{\lambda} \{L / (r_4 - r_3)\}} \dots\dots\dots [0 \leq z_3 \leq \eta_3] \\ &= \frac{\cosh \sqrt{\lambda} \{L / (r_4 - r_3)\} (z - \eta - 1)}{2\sqrt{\lambda} L / (r_4 - r_3) \sinh \sqrt{\lambda} \{L / (r_4 - r_3)\}} \dots\dots\dots [1 \geq z_3 \geq \eta_3] \end{aligned} \quad (67)$$

以上より,

$$\begin{aligned} \therefore u_3(x_3, z_3) &= \left(x_3 + \frac{r_3}{r_4 - r_3}\right)^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 \int_0^1 \Gamma_3(x_3, \xi_3; \lambda_3) \Gamma_3(z_3, \eta_3; \lambda_3) \cdot \left(\xi_3 + \frac{r_3}{r_4 - r_3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \\ &\quad Q(\xi_3, \eta_3) d\xi_3 d\eta_3 \end{aligned} \quad (68)$$

2, 3 固有値 k_s

〔Ⅰ〕の領域の固有値 k_{s1}

前述の(51)式の境界条件から,

$$w = A \left(x_1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot J_0 \left\{k_s \left(x_1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right)\right\} + B \left(x_1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot Y_0 \left\{k_s \left(x_1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right)\right\}$$

ただし,

$$\begin{aligned} A &= 1 / J_0 \left(k_s \frac{r_2}{r_2 - r_1}\right), \quad B = -1 / Y_0 \left(k_s \frac{r_2}{r_2 - r_1}\right) \\ \therefore \frac{\partial w}{\partial x_1} &= A \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot J_0 \left\{k_s \left(x_1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right)\right\} - A k_s \left(x_1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right)^{\frac{1}{2}} J_1 \left\{k_s \left(x_1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right)\right\} \\ &\quad + B \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right)^{-\frac{1}{2}} Y_0 \left\{k_s \left(x_1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right)\right\} - B k_s \left(x_1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right)^{\frac{1}{2}} Y_1 \left\{k_s \left(x_1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right)\right\} \end{aligned} \quad (69)$$

これを(51)式に代入して, $\{r_1 / (r_2 - r_1)\} - \{r_2 / (r_2 - r_1)\} = -1$, と J_ν, Y_ν の漸近展開公式を用いると,

$$\tan k_{s1} = \frac{r_1}{r_2} k_{s1} \quad (70)$$

次に, $k_{s1} = p - \beta$, $p = \{s + (\pi/2)\}$ として級数展開により k_{s1} を求めると,

$$k_{s,1} = \left(\frac{2s+1}{2}\right)\pi - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)\left\{\frac{2}{(2s+1)\pi}\right\} - \left\{\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3\right\}\left\{\frac{2}{(2s+1)\pi}\right\}^3 - \dots \quad (71)$$

〔Ⅱ〕の領域の固有値 $k_{s,2}$

境界条件より,

$$J_0\left(\sqrt{\lambda}\frac{r_3}{r_3-r_2}\right)Y_0\left(\sqrt{\lambda}\frac{r_2}{r_3-r_2}\right) = J_0\left(\sqrt{\lambda}\frac{r_2}{r_3-r_2}\right)Y_0\left(\sqrt{\lambda}\frac{r_3}{r_3-r_2}\right) \quad (72)$$

これを, $J_n(ka)Y_n(kb) - J_n(kb)Y_n(ka) = 0$ とおき, $ka=x$, $b/a=\rho > 1$, $a=r_2/(r_3-r_2)$, $b=r_3/(r_3-r_2)$ とすれば,

$$\frac{Y_n(x)}{J_n(x)} - \frac{Y_n(\rho x)}{J_n(\rho x)} = 0 \quad (73)$$

ただし J_n はベッセル関数, Y_n はノイマン関数を表わす.

正根の大きさの順序に並べて, s 番目の根 $x_{n,s}$ は McMahon によれば,

$$x_{n,s} = \delta + \frac{p}{\delta} + \frac{q-p^2}{\delta^4} + \frac{r-4pq+2p^3}{\delta^5} + \dots$$

ただし,

$$\delta = \frac{s\pi}{p-1}, \quad p = \frac{m-1}{s\rho}, \quad q = \frac{4(m-1)(m-25)(\rho^3-1)}{3(8\rho)^3(\rho-1)}, \quad r = \frac{32(m-1)(m^2-114m+1073)(\rho^5-1)}{5(8\rho)^5(\rho-1)},$$

$m=4n^2$

以上より

$$k_{s,2} = \frac{x_{n,s}}{a} \quad (74)$$

〔Ⅲ〕の領域の固有値 $k_{s,3}$

$$k_{s,3} = x^2 \quad \text{とおき,}$$

$$\sqrt{\lambda} r_4 / (r_4 - r_3) = bx, \quad \sqrt{\lambda} r_3 / (r_4 - r_3) = ax, \quad b-a = 1$$

とおくと, 境界条件から導いた式は,

$$xJ_1(bx)Y_0(ax) - xY_1(bx)J_0(ax) = J_0(bx)Y_0(ax) - Y_0(bx)J_0(ax)$$

〔Ⅰ〕の領域の場合と同様な公式により

$$x \cot x = -1$$

さらに〔Ⅰ〕の領域と同様な変形をして,

$$x = \sqrt{k_{s,3}} = \left(\frac{2s+1}{2}\right)\pi + \frac{2}{(2s+1)\pi} - \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left\{\frac{2}{(2s+1)\pi}\right\}^3 + \dots \quad (75)$$

2.4 未知温度 $f(z)$, $\psi(z)$ の解法

まず接合法により,

$$-\lambda_1 \left(\frac{\partial T_2}{\partial r}\right)_{r=r_2} = -\lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial r}\right)_{r=r_3} \quad (76)$$

$$-\lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial r}\right)_{r=r_3} = -\lambda_3 \left(\frac{\partial T_3}{\partial r}\right)_{r=r_3} \quad (77)$$

無次元化すると,

$$\frac{\lambda_1}{A_n(r_2-r_1)} \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)_{x_1=1} + 2f(z) \right\} = \frac{\lambda_2}{(r_3-r_2)} \left\{ \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)_{x_2=0} + \frac{1}{A'_n} \psi(z) - \frac{1}{A_n} f(z) - \frac{B'_n}{A'_n} + \frac{B_n}{A_n} \right\} \quad (78)$$

$$\frac{\lambda_2}{r_3-r_2} \left\{ \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)_{x_2=1} + \frac{1}{A'_n} \psi(z) - \frac{1}{A_n} f(z) - \frac{B'_n}{A'_n} + \frac{B_n}{A_n} \right\} = \frac{\lambda_3}{A'_n(r_4-r_3)} \left\{ \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)_{x_3=0} - 2\psi(z) \right\} \quad (79)$$

(78), (79) 式中の $(\partial u_1 / \partial x_1)_{x_1=1}$, $(\partial u_2 / \partial x_2)_{x_2=0}$, $(\partial u_2 / \partial x_2)_{x_2=1}$, $(\partial u_3 / \partial x_3)_{x_3=0}$ を先に求めた(62), (65), (68) 式から求め, 再び(78), (79) 式に代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{A_n(r_2-r_1)} \left\{ \int_0^1 K_{0,0}(z, \zeta) f(\zeta) d\zeta + \int_0^1 K_{0,0}(z, \zeta) \frac{\partial^2 f(\zeta)}{\partial \zeta^2} d\zeta + 2 \times f(z) \right\} &= \frac{\lambda_2}{r_3-r_2} \left\{ \int_0^1 M_{2,0,1}(z, \zeta) \psi(\zeta) d\zeta \right. \\ &+ \int_0^1 M_{2,0,2}(z, \zeta) f(\zeta) d\zeta + \int_0^1 M_{2,0,3}(z, \zeta) \frac{\partial^2 \psi(\zeta)}{\partial \zeta^2} d\zeta + \int_0^1 M_{2,0,4}(z, \zeta) \frac{\partial^2 f(\zeta)}{\partial \zeta^2} d\zeta + \frac{1}{A'_n} \psi(z) - \frac{1}{A_n} \\ &\left. f(z) - \frac{B'_n}{A'_n} + \frac{B_n}{A_n} \right\} \quad (80) \end{aligned}$$

$$\frac{\lambda_2}{r_3 - r_2} \left\{ \int_0^1 M_{2,1,1}(z, \zeta) \psi(\zeta) d\zeta + \int_0^1 M_{2,1,2}(z, \zeta) f(\zeta) d\zeta + \int_0^1 M_{2,1,3}(z, \zeta) \frac{\partial^2 \psi(\zeta)}{\partial \zeta^2} d\zeta + \int_0^1 M_{2,1,4}(z, \zeta) \frac{\partial^2 f(\zeta)}{\partial \zeta^2} d\zeta + \frac{1}{A'_n} \psi(z) - \frac{1}{A_n} f(z) - \frac{B'_n}{A'_n} + \frac{B_n}{A_n} \right\} = \frac{\lambda_3}{A'_n(r_4 - r_3)} \left\{ \int_0^1 N_{3,1}(z, \zeta) \psi(\zeta) d\zeta + \int_0^1 N_{3,2}(z, \zeta) \frac{\partial^2 \psi(\zeta)}{\partial \zeta^2} d\zeta - 2\psi(z) \right\} \quad (81)$$

以上の(80), (81)式中の未知関数 $f(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ を, ルジャンドル多項式で展開し,

$$f(\zeta) = a_0 p_0(\zeta) + a_1 p_1(\zeta) + a_2 p_2(\zeta) + \dots$$

$$\psi(\zeta) = b_0 p_0(\zeta) + b_1 p_1(\zeta) + b_2 p_2(\zeta) + \dots$$

ただし公式により,

$$p_0(\zeta) = 1, \quad p_1(\zeta) = \zeta, \quad p_2(\zeta) = (3\zeta^2 - 1) / 2, \quad p_3(\zeta) = (5\zeta^3 - 3\zeta) / 2, \dots$$

$$\therefore \frac{\partial^2 f(\zeta)}{\partial \zeta^2} = 3a_2 p_0(\zeta) + 15a_3 p_1(\zeta) + \dots$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \psi(\zeta)}{\partial \zeta^2} = 3b_2 p_0(\zeta) + 15b_3 p_1(\zeta) + \dots$$

これを(80), (81)式に代入して, $f(z)$, $\psi(z)$ を求める.

2.5 数値計算の手順

- (1) まず $f(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ を, ルジャンドルの多項式で展開する. この際, 第何次の項まで取るかは計算しようとする物体の温度分布曲線を想定して決める. つぎに(71), (74), (75)式により, 固有値 k_{sn} を求め, それらを(80), (81)式に代入し, $f(z)$, $\psi(z)$ を求める.
- (2) 固有値を使って(62), (68)式で, u_1, u_3 を求め,

$$\phi_1 = u_1 + x_1^2 f(z), \quad \phi_3 = u_3 + (1 - x_3)^2 \psi(z)$$
 から ϕ を求める.
- (3) $\phi_1 = A_n \theta_1 + B_n$, $\phi_3 = A'_n \theta_3 + B'_n$ から θ_1, θ_3 を求める.
- (4) $T_1 = T_0 \theta_1$, $T_3 = T_0 \theta_3$ から内面温度 T_1 および外表面温度 T_3 が求められる.
- (5) これらの値を与えれば, 円筒内部の高温ガス温度も逆に計算することができる.

3. 円筒内にヒレ付円柱がある場合

図2の様な原子炉の燃料要素(ウラン円柱)に冷却用ヒレのついた場合²⁾には, ウランからの発熱量や熱輻射, 熱伝達, 熱伝導を同時に考えると,

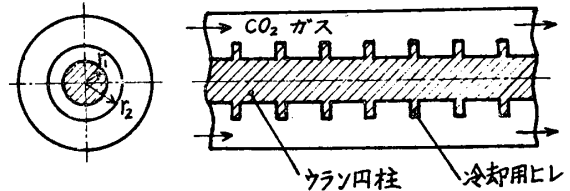


図 2

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x + r_1 / (r_2 - r_1)} \frac{dy}{dx} + ky + cy^4 + f(x) = 0 \quad (82)$$

$$(y)_{x=0} = 0 \quad (83)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = 0 \quad (84)$$

を解くことになり, (82)式が非線型微分方程式のため解法が難かしく, 電子計算機によって解けるが, 著者らは次のようなきわめて簡便な方法を考えた.

(83), (84)式を用いて, 有限ハンケル変換を適用して, 4次代数方程式を解くことによって, なんらの近似や, 省略を行なうことなしに, ただちに次の解がえられた.

$$\begin{aligned}
\gamma(x) = & \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 \left(\eta + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) [z(\eta)] \left\{ J_0 \left\{ \xi_i \left(\eta + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) \right\} Y_0 \left(\xi_i \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) - J_0 \left(\xi_i \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) Y_0 \left\{ \xi_i \left(\eta + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) \right\} \right\} \\
& d\eta \cdot \left\{ J_0 \left\{ \xi_i \left(x + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) \right\} Y_0 \left(\xi_i \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) - J_0 \left(\xi_i \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) Y_0 \left\{ \xi_i \left(x + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) \right\} \right\} \cdot 1 / \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r_2}{r_2 - r_1} \right)^2 \left\{ J_0 \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\xi_i \frac{r_2}{r_2 - r_1} \right) Y_0 \left(\xi_i \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) - J_0 \left(\xi_i \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) Y_0 \left(\xi_i \frac{r_2}{r_2 - r_1} \right) \right\}^2 - \xi_i^2 \frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{r_2 - r_1} \right)^2 \left\{ J_1 \left(\xi_i \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) Y_0 \left(\xi_i \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - Y_1 \left(\xi_i \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) J_0 \left(\xi_i \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) \right\}^2 \right] \quad (85)
\end{aligned}$$

ただし,

$$\xi_i = \pi/2, 3\pi/2, \dots, (2i-1)\pi/2, \dots; \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (86)$$

$$[z(\eta)] = \left[\sqrt{\frac{2}{\lambda(\eta)} \left(\frac{k - \xi_i^2}{c} \right) - \gamma(\eta) - \sqrt{\lambda(\eta)} \right] / 2 \quad (87)$$

$$\begin{aligned}
\lambda(\eta) = & \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(\frac{\xi_i^2 - k}{c} \right)^2 + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\xi_i^2 - k}{c} \right)^4 + \frac{1}{27} \left\{ -\frac{4f(\eta)}{c} \right\}^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(\frac{\xi_i^2 - k}{c} \right)^2 - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\xi_i^2 - k}{c} \right)^4 + \frac{1}{27} \left\{ -\frac{4f(\eta)}{c} \right\}^3}} \\
& \quad (88)
\end{aligned}$$

(82)式のような**非線型**微分方程式は、有限ハンケル変換の適用によって、代数方程式の解法に帰着できることがわかる。

4. 結 言

(80), (81)式中の未知関数 $f(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ を決定するときに、係数 $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$ は多元連立方程式から求めることになるが、電子計算機によれば10元の場合に約10分を要する程度である。(11), (12); (41), (42) によって熱射輻を伴うときの非線型微分方程式を線型化することができ、ピカールの逐次近似法やガウスの数値積分法によって精度の向上が行なえ、ベッセル関数表が利用できるので数値計算には便利となる。

熱射輻, 熱伝導, 熱伝達が同時に共存する場合の研究は、工業上にもきわめて必要で緊急を要するが現在のところ、あまり見あたらないようである。著者らは、グリーン関数, 固有値, 固有関数と積分方程式を使用して理論解析を進めた。微分方程式を、そのまま解くよりも、積分方程式化を行なって積分方程式を解く方が容易である。しかし、微分方程式や積分方程式を解くよりも、(85)式のごとく有限ハンケル変換によって解けばさらに、容易に解けることがわかったので、さらに、簡便な方法についての研究も一応、終えることができた。

参 考 文 献

- 1) M. Perlmutter and R. Siegel (NASA); Trans, ASME, Ser. C, **84**, 301 (1962)
- 2) 日本機械学会総会, 前刷(熱) (1963)
- 3) 日本機械学会誌 (伝熱特集号) **50**, (1962)