水平二重管内の自由對流溫度分布の理論解

村　川　勝　彌

Ⅰ 緒　言

一般的な境界条件の下に一般的な解を求めるために解析を行つた。

Ⅱ 三次元の場合

$x=(r-r_1)/(r_2-r_1)$, $z=Z/L$, $t=(T-T_0)/T_0$, とおいて無次元化すればエネルギー式と境界条件とは次のようになる。

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{1}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{1}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2}+\left(\frac{r_2-r_1}{L}\right)^2\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=\frac{\overline{w}\cdot(r_2-r_1)}{a}\cdot\frac{Co,_{\theta}(x,\theta)}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\cdot\frac{\partial t}{\partial \theta} \quad (1)$$

$$(t)_{x=0}=f_0(\theta,z) \quad (2) \qquad (t)_{x=1}=f_1(\theta,z) \quad (3)$$

$Co,_{\theta}(x,\theta)$ は θ 方向の無次元速度分布[1]である。

$$t=w+x\{f_1(\theta,z)-f_0(\theta,z)\}+f_0(\theta,z) \quad (4)$$

とおけば $(w)_{x=0}=(w)_{x=1}=0$ (5)

となるからパラメーター μ を導入して次のようになる。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}+\left(\frac{r_2-r_1}{L}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=$$

$$\mu\cdot\left[\frac{\overline{w}\cdot(r_2-r_1)}{a}\cdot\frac{Co,_{\theta}(x,\theta)}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\cdot\frac{\partial w}{\partial \theta}+F_0(x,\theta,z)\right] \quad (6)$$

$w=w_0+\mu\cdot w_1+\mu^2\cdot w_2+$ …… (7)，（最後に $\mu=1$ とおけばよい）

Ⅲ 第0次近似

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{1}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\cdot\frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{1}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\cdot\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2}+\left(\frac{r_2-r_1}{L}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}=0 \cdots \quad (8)$$

$$(w_0)_{x=0}=(w_0)_{x=1}=0 \quad (9)$$

$$w_0=\sum_{s=1}^{\infty}y_0(x,s)\cdot e^{-k_s\cdot L/(r_2-r_1)\cdot z}\{\cos s\theta+\sin s\theta\} \quad (10)$$

$$\frac{d^2y_0}{dx^2}+\frac{1}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\cdot\frac{dy_0}{dx}+\left\{k_s^2-\frac{s^2}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\right\}\cdot y_0=0 \quad (11)$$

$$(y_0)_{x=0}=(y_0)_{x=1}=0 \quad (12)$$

$$\therefore y_0=U_0(k_s,x)=\frac{J_s\left\{k_s\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right\}}{J_s\left\{k_s\frac{r_1}{r_2-r_1}\right\}}-\frac{Y_s\left\{k_s\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right\}}{Y_s\left\{k_s\frac{r_1}{r_2-r_1}\right\}} \quad (13)$$

J_s, Y_s はBessel函数である。

k_s は次式の根である。

$$J_s\left\{k_s\frac{r_2}{r_2-r_1}\right\}\cdot Y_s\left\{k_s\frac{r_1}{r_2-r_1}\right\}-J_s\left\{k_s\frac{r_1}{r_2-r_1}\right\}\cdot Y_s\left\{k_s\frac{r_2}{r_2-r_1}\right\}=0 \quad (14)$$

(10)，(13)，(14) から w_0 が求まる。

Ⅳ 第1次近似

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+\frac{1}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\cdot\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{1}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\cdot\frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2}+\left(\frac{r_2-r_1}{L}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}+F_1(x,\theta,z)=0 \quad (15)$$

$$(w_1)_{x=0}=(w_1)_{x=1}=0 \quad (16)$$

既知函数 $F_1(x,\theta,z)$ を θ と z とによつて、それぞれFourier級数に展開して

$$w_1=4/\pi\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{1}y_1(x,\lambda,\zeta)\cdot\cos 2m(\theta-\lambda)\cdot\cos 2n\pi(z-\zeta)\cdot d\lambda\cdot d\zeta+v_0(x, m=n=0) \quad (17)$$

$$y_1=\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot v_1 \quad (18)$$

$$\frac{d^2v_1}{dx^2}+\frac{1}{4\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\cdot v_1-\left\{4\pi^2n^2\left(\frac{r_2-r_1}{L}\right)^2+\frac{4m^2}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\right\}\cdot v_1+h_1(x,\lambda,\zeta)=0 \quad (19)$$

$$(v_1)_{x=0}=(v_1)_{x=1}=0 \quad (20)$$

$$\frac{d^2v_0}{dx^2}+\frac{1}{4\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\cdot v_0+\frac{1}{\pi}F_1(\lambda,\zeta)=0 \qquad (21)$$

$$(v_0)_{x=0}=(v_0)_{x=1}=0 \qquad (22)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{1}{4\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\cdot v=0 \qquad (23),$$

$$(v)_{x=0}=(v)_{x=1}=0 \qquad (24)$$

のGreen函数を$G(x,\xi)$とすれば

$$G(x,\xi)=\left\{\begin{array}{l}\{x+r_1/(r_2-r_1)\}^{\frac{1}{2}}\cdot\{\xi+r_1/(r_2-r_1)\}^{\frac{1}{2}}\cdot[\ln r_2/(r_2-r_1)-\ln\{\xi+r_1/(r_2-r_1)\}]\cdot[\ln\{x+r_1/(r_2-r_1)\}-\ln r_1/(r_2-r_1)]/\ln r_2/r_1,\\ \quad [0\leqq x\leqq\xi\leqq 1]\\ =\{x+r_1/(r_2-r_1)\}^{\frac{1}{2}}\cdot\{\xi+r_1/(r_2-r_1)\}^{\frac{1}{2}}\cdot[\ln r_2/(r_2-r_1)-\ln\{x+r_1/(r_2-r_1)\}]\cdot[\ln\{\xi+r_1/(r_2-r_1)\}-\ln r_1/(r_2-r_1)]/\ln r_2/r_1,\\ \quad [0\leqq\xi\leqq x\leqq 1]\end{array}\right. \qquad (25)$$

$$v_0=\int_0^1 G(x,\xi)\cdot y/\pi\cdot F_1(\lambda,\zeta)\cdot d\xi \qquad (26)$$

(19)，(20)は

$$f(x)=\left\{m^2/\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2+n^2\pi^2(r_2-r_1)^2/L^2\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\int_0^1 G(x,\xi)\cdot h_1(\xi,\lambda,\zeta)\cdot d\xi \qquad (27)$$

$$u_1=v_1\cdot\left\{m^2/\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2+n^2\pi^2(r_2-r_1)^2/L^2\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (28)$$

$$K(x,\xi)=G(x,\xi)\cdot\left\{m^2/\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2+n^2\pi^2\cdot(r_2-r_1)^2/L^2\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{m^2/\left(\xi+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2+n^2\pi^2(r_2-r_1)^2/L^2\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (29)$$

とおけば対称核$K(x,\xi)$を有する次の Fredholm 第二種積分方程式に帰着できる。

$$u_1(x)=f(x)-4\int_0^1 K(x,\xi)\cdot u_1(\xi)\cdot d\xi \qquad (30)$$

Schmidtの理論により次の解をうる。

$$u_1(x)=\sum_{S=1}^{\infty}\lambda_S\varphi_S(x)/(\lambda_S+4)\cdot\int_0^1 f(\xi)\cdot\varphi_S(\xi)\cdot d\xi \qquad (31)$$

固有函数$\varphi_s(x)$は 完全法化直交固有函数系として表わせば

$$\varphi_s(x)=K_{m,s}\cdot\left\{m^2/\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2+n^2\pi^2(r_2-r_1)^2/L^2\right\}^{\frac{1}{2}}\{x+r_1/(r_2-r_1)\}^{\frac{1}{2}}\cdot W_{2m}\left\{k_s\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right\},$$

$$K_{m,s}=k_s/\sqrt{k_s^2/2[\{r_1/(r_2-r_1)\}^2\cdot\{W'_{2m}r_1/(r_2-r_1)\}^2-\{r_2/(r_2-r_1)\}^2\cdot\{W_{2m}'r_2/(r_2-r_1)\}^2]+m^2\left[\int_0^1\left\{\left(\xi+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2\left(W'_{2m}k_s\left(\xi+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right)^2-n^2\left(W_{2m}k_s\left(\xi+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right)^2\right\}\left(1-2\ln\left(\xi+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right)/\left(\xi+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^3\cdot d\xi-\left\{\ln\left(\xi+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\cdot\left(W'_{2m}\left(\xi+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right)^2\right\}_0^1\right]} \qquad (32)$$

$$W_{2m}\left\{k_s\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right\}=I_{2m}\left\{k_s\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right\}/I_{2m}\left(k_s\frac{r_1}{r_1-r_1}\right)-K_{2m}\left\{k_s\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right\}/K_{2m}\left(k_s\frac{r_1}{r_2-r_1}\right) \qquad (33)$$

I_{2m}, K_{2m}はModified Bessel Functionである。

固有値λ_sは　$\lambda_s^{\frac{1}{2}}=k_s=2n\pi(r_2-r_1)/L$　(34)

$\therefore 2n\pi=k_s\cdot L/(r_2-r_1)$　(35)

（最後にnの代りに$\sum_{S=1}^{\infty}$と 書きあらためる ことにする）

でk_sは次式（36）の根である。

$$I_{2m}\left(k_s\frac{r_2}{r_2-r_1}\right)\cdot K_{2m}\left(k_s\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)-I_{2m}\left(k_s\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\cdot K_{2m}\left(k_s\frac{r_2}{r_2-r_1}\right)=0 \qquad (36)$$

$$\therefore W_1=4/\pi\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{S=1}^{\infty}y_1(x,\lambda,\zeta)\cdot\cos 2m(\theta-\lambda)\cdot\cos k_s L/(r_2-r_1)\cdot(z-\zeta)\cdot d\lambda\cdot d\zeta+v_0 \qquad (37)$$

W_2以下は（15），（16）と同形となるので同様な操作によつて求められる。

V　二次元の場合

パラメーターμを導入して

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{1}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{1}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial\theta^2}=\mu\cdot\frac{\overline{w}(r_2-r_1)}{a}\cdot\frac{Co,\theta(x,\theta)}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\cdot\frac{\partial t}{\partial\theta} \qquad (38)$$

$(t)_{x=0}=f_0(\theta)$ (39), $(t)_{x=1}=f_1(\theta)$ (40)

$$t=t_0+\mu\cdot t_1+\mu^2\cdot t_2+ \quad (41)$$

（最後に $\mu=1$ とおけばよい）$f_0(\theta)$, $f_1(\theta)$を Fourier 級数に展開して第０次近似 t_0 を求めると次のようになる。

VI 第０次近似[2]

$$t_0=\varepsilon_0/\pi\cdot\int_0^{\pi}\{f_1(\lambda)-f_0(\lambda)\}\cdot d\lambda/l\mathrm{n}r_2/r_1\cdot l\mathrm{n}\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)+\varepsilon_0/\pi\cdot\int_0^{\pi}[l\mathrm{n}r_2/(r_2-r_1)\cdot f_0(\lambda)-l\mathrm{n}r_1/(r_2-r_1)\cdot f_1(\lambda)]\cdot d\lambda/l\mathrm{n}r_2/r_1+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n/\pi\cdot\int_0^{\pi}[\{r_2/(r_2-r_1)\}^{-2n}\cdot f_0(\lambda)-\{r_1/\{r_2-r_1)\}^{-2n}\cdot f_1(\lambda)\}\cdot\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^{2n}+\{-(r_2/(r_2-r_1))^{2n}\cdot f_0(\lambda)+(r_1/(r_2-r_1))^{2n}\cdot f_1(\lambda)\}\cdot\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^{-2n}]\cdot\cos 2n(\theta-\lambda)\cdot d\lambda/[(r_2/r_1)^{-2n}-(r_2/r_1)^{+2n}] \quad (42)$$

$(\varepsilon_0=1,\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots\cdots=2)$

VII 第１次近似

$$\frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2}+\frac{1}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\cdot\frac{\partial t_1}{\partial x}+\frac{1}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\cdot\frac{\partial^2 t_1}{\partial\theta^2}+F_0(x,\theta)=0 \quad (43)$$

$$(t_1)_{x=0}=(t_1)_{x=1}=0 \quad (44)$$

$$t_1=4/\pi\sum_{n=1}^{\infty}y_1(x,\lambda)\cdot\cos 2n(\theta-\lambda)\cdot d\lambda+v_0(x,n=0) \quad (45)$$

$F_0(x,\theta)$をθについて Fourier 級数に展開すれば v_0は(17), (21), (22), (26)と同形となるから直ちに求められる。

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}+\frac{1}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\cdot\frac{dy_1}{dx}-\frac{4n^2}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\cdot y_1+h_0(x,\lambda)=0 \quad (46)$$

$$(y_1)_{x=0}=(y_1)_{x=1}=0 \quad (47)$$

$y_1=\int_0^x(x-\xi)v(\xi)d\xi+c_1\cdot x+c_2$ (48) とおいて (47) から$c_2=0$ (49), $c_1=\int_0^1(\xi-1)v(\xi)\cdot d\xi$ (50) となるから

$$f(x)=C_1\cdot\left\{4n^2x/\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2-1/\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right\}-h_0(x,\lambda) \quad (51)$$

$$K(x,\xi)=4n^2(x-\xi)/\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2-1/\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right) \quad (52)$$

とおけば(46), (47)の境界値問題は次のVolterra第二種積分方程式に帰着できる。

$$v(x)=f(x)+\int_0^x K(x,\xi)\cdot v(\xi)\cdot d\xi \quad (53)$$

相反函数$-k(x,y)$を用いて解けば

$$v(x)=f(x)-\int_0^x k(x,y)\cdot f(y)\cdot dy=C_1 g(x)+l(x) \quad (54)$$

となる。(50)より

$$C_1=\int_0^1(\xi-1)l(\xi)\cdot d\xi/\left[1+\int_0^1(1-\xi)g(\xi)\cdot d\xi\right] \quad (55)$$

(48)に(54), (55)を代入すれば y_1 が求まるから(45)からt_1がえられる。t_2以下も(43), (44)と同形となるので上と同様な操作によつて決定することができる。

VIII 結　言

(2), (3)；(39), (40)式の境界における温度分布をあたえた文献が見当らないので数値計算例を示すことができなかつた。(1)式の C_0, $\theta(x,\theta)$, (15)式の$F_1(x,\theta,z)$, (43)式の$F_0(x,\theta)$が複雑な函数となるので数値計算には手数を要するが Bessl 函数が利用できるので便利である。

文部省科学研究費による研究の一部である。

参考文献

(1) 村川勝彌、山口大学工学部学報第４巻第１号２～３ページ（昭和28年）
(2) 村川勝彌、日本機械学会第29期定時総会講演会（昭和27年４月、東京）前刷13～14ページ