

隣接亀裂をもつ矩形板の破壊強度

(中央亀裂と両側亀裂が存在する場合)

清水 茂俊*・河野 俊一*・中島 敏明**

Effects on Fracture Toughness of Adjacent Cracks in the Rectangular Plate

(The Mutual Interference between the Center Crack and Symmetrical Edge Cracks)

Shigetoshi SHIMIZU, Shun-ichi KAWANO and Toshiaki NAKASHIMA

Abstract

The brittle fracture toughness of the plate with cracks are characterized by the critical stress intensity factor K_{IC} or the critical strain energy release rate of crack extension G_{IC} . Thus, the prediction of strength for a structure requires the knowledge of the stress intensity factor K_I in terms of the structural configuration and loading condition. Several cases of K -values of the plate with a single crack were investigated by many authors. But we have only a few results for the K -values of the plate with several cracks.

The aim of this study is to investigate the effect on brittle fracture toughness of adjacent cracks in the rectangular plate. For this purpose, the mutual interference between a center crack and symmetrical edge cracks in the rectangular plate was discussed.

The K -values were numerically calculated by using the method proposed by authors, which was the application of the J -integral using the method of superposition of analytical and finite element methods to get good accuracy for extremely coarse finite element.

In order to show the reliability of the numerical results, we made an experiment on fracture toughness of the hard polyvinyl chloride rectangular plates with cracks same as the numerical calculated models. The numerical results showed good agreement with the experimental ones.

1. 緒 言

亀裂を有する脆性材料の破壊基準は、線形弾性破壊力学に基礎をおく臨界応力拡大係数 K_{IC} あるいは臨界歪エネルギー解放率 G_{IC} として定義され、その実験方法もすでに ASTM E399 によって規格化されている。また、実際の構造物に破壊靱性試験によって得られた K_{IC} を適用する際、構造物の形状および亀裂長さに依存する応力拡大係数 K_I の理論解析が必要となり、この方面の研究として、単一亀裂については Isida¹⁾, Gross²⁾, Bowie³⁾, Sie⁴⁾, Dixon⁵⁾ 等の報告がある。

一方、複数個の亀裂が存在する場合、すなわち隣接亀裂の相互干渉に対する研究も Datsyshin⁶⁾, Karihaloo⁷⁾, 池田⁸⁾, 永井^{9), 10)} 等によって報告されているが、脆性材料について理論および実験の両面から追求した

例は未だ少ない。この破壊靱性におよぼす隣接亀裂の相互干渉の影響に対して次のような問題点が考えられる。

- i) 複数個の亀裂が存在する場合、破壊靱性値が個々の単一亀裂のそれと等しくなるかどうか。
- ii) 複合亀裂の破壊応力とその亀裂長さと同じ単一亀裂の場合と比較して異なるかどうか。

本報告は上記の問題点を解明するために、複合亀裂の破壊のクライテリオンを導入し、一例として一直線上に中央亀裂と両側亀裂の存在する矩形板について数値解析を行ない、その妥当性を実験によって検討した。数値解析に対しては筆者等の提案した有限要素法 (FEM) の解に、無限板に亀裂が存在する場合の解析解を重ね合せ、更に J 積分を適用する方法¹¹⁾ によって精度の良い K_I 値を得た。また、実験には脆性材料としてほぼ理想的と思われる硬質塩化ビニールを用い、亀裂発生現象の観察および破壊応力の測定を行なった。

* 機械工学科

** ダイヤ機械工業株式会社

2. 基礎式の導入

2.1 破壊の判別式

Fig.1に示すような亀裂と直角方向に一樣な分布荷重 σ_0 を受ける無限板を考える。 m 個の亀裂は全て一直線上にあるものとし、各々の亀裂先端からの亀裂進展長さを Δa_i 、全亀裂進展長さを Δa とすれば $\Delta a = \sum_{i=1}^n \Delta a_i$ ($n \leq 2m$) となる。 m 個の亀裂を含んだ系全体の歪エネルギーを U とすると、全歪エネルギー解放率 \bar{G} は定義を拡張して次式で表わされる。

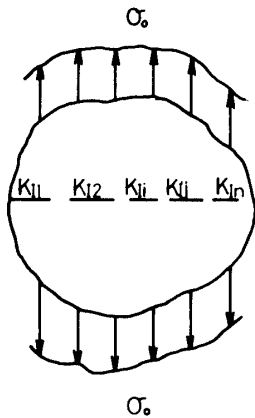


Fig.1

$$\bar{G} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta a} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta U_i}{\Delta a_i} \frac{\Delta a_i}{\Delta a} \quad (1)$$

ΔU_i : Δa_i の亀裂進展によって解放される歪エネルギー

K_{ij} を各亀裂先端の応力拡大係数、 E を縦弾性係数とすると、平面応力状態において (1) 式は

$$\bar{G} = \frac{1}{E} \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n K_{ij}^2 \frac{\Delta a_i}{\Delta a} \quad (2)$$

とおくことができる。ここで $\Delta a_i = 0$, $\Delta a_j \neq 0$, すなわち j 番目の亀裂先端からのみ破壊が生じた場合の歪エネルギー解放率を G_j とすると、 G_j は j 番目の亀裂先端と他の亀裂先端から同時に、あるいは他の亀裂先端から破壊が生ずると仮定した場合の \bar{G} よりも大きくなければならない。

$$G_j \geq \bar{G} \quad (3)$$

上式を (2) 式を用いて書きなおすと次のようになる。

$$\frac{1}{E} K_{ij}^2 \geq \frac{1}{E} \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n K_{ii}^2 \frac{\Delta a_i}{\Delta a} \quad (4)$$

あるいは、

$$\left. \begin{aligned} K_{ij}^2 - \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n K_{ii}^2 \frac{\Delta a_i}{\Delta a} \\ = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (K_{ij}^2 - K_{ii}^2) \frac{\Delta a_i}{\Delta a} \geq 0 \end{aligned} \right\} (5)$$

(5) 式は一樣な E の場合、ある特定の j 番目の亀裂先端の応力拡大係数 K_{ij} が他のいずれの K_{ii} 値よりも大きければ、 j 番目の亀裂先端からのみ破壊が生ずる

ことを示している。また、全ての亀裂先端の K_{ii} 値が等しい場合は

$$G_j = \bar{G} \quad (6)$$

となり、破壊は全亀裂先端から同時に生ずる。線形弾性破壊力学では $G = K_{ij}^2/E$ (平面応力) の関係があるので、以後破壊の判定には (5) 式を用いることとする。

2.2 有限要素法による隣接亀裂の計算法

次の式で与えられる Rice¹²⁾ の J 積分値は

$$J = \int_{\Gamma} (W dy - T \cdot \frac{\partial U}{\partial x} ds) \quad (7)$$

線形弾性破壊力学で $J = G = K_{ij}^2/E$ (平面応力) であることが証明されている。ただし、 W は歪エネルギー密度、 T はトラクションベクトル、 U は変位ベクトル、 s は積分路 Γ の長さである。各裂亀先端の J_i 値は、FEM の計算結果を (7) 式に適用することによって得られ、さらに $J_i = K_{ij}^2/E$ の関係と (5) 式より破壊の判定ができる。

しかし、FEM の解を J 積分に適用する際、積分路 Γ が亀裂先端からある程度離れた所でないと一般に良好な精度の解が得られないことが数値的に証明されている。^{11), 13)} このため、隣接亀裂のように積分路 Γ の選択に制限があるような場合、 J 値の精度に問題があるので、次に述べるような筆者等の提案した重ね合せ法¹¹⁾を用いた。

FEM の解に Westergaard の解析解¹⁴⁾を重ね合せ、その結果に J 積分法を適用すると、有限板に対する J 積分値は次に示すようになる。

$$J = J^\infty \{1 + (J^F/J^\infty)^{1/2}\}^2 \quad (8)$$

ここで J^∞ は Westergaard の解析解による J 積分値であり、 J^F は境界に次のような外力 $\{\sigma^F\}$ が作用する場合の FEM による計算値である。

$$\{\sigma^F\} = \{\sigma_0\} - \{\sigma^\infty\} \quad (9)$$

ただし $\{\sigma_0\}$ は境界に作用する真の外力、 $\{\sigma^\infty\}$ は次に示すようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 R^{1/2} (x \cos \theta / 2 + y \sin \theta / 2 - y a^2 R^{-1} \sin 3\theta / 2) \\ \sigma_y &= \sigma_0 R^{1/2} (x \cos \theta / 2 + y \sin \theta / 2 + y a^2 R^{-1} \sin 3\theta / 2) \\ \tau_{xy} &= -\sigma_0 y a^2 R^{-3/2} \cos 3\theta / 2 \\ X &= x^2 - y^2 - a^2, \quad Y = 2xy \\ R &= (X^2 + Y^2)^{1/2}, \quad \theta = \tan^{-1} (Y/X) \end{aligned} \right\} (10)$$

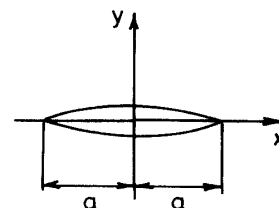


Fig.2

ただし、座標軸の原点および x, y 軸は Fig.2 に示すようにとる。なお、理論の詳細については前述の参考文献 11) で明らかにしたのでここでは省略する。

3. 数値計算例

Fig.3 に示すような中央に長さ $2a$ 、両側に各々長さ b の亀裂をもつ矩形板を例にとり、FEM を用いて数値計算を行なった。計算は対称の条件から全体の 1/4 をとりだし、要素分割は Fig.3 に示すように総節点数 203、総要素数 220 である。

計算結果を a/W をパラメータにして、縦軸に K_I/σ_0 横軸に全亀裂長さを板幅 $2W$ で除し無次元化した値 $(a+b)/W$ をとって整理すると、Fig.4 に示すような関係が得られた。ここで一点鎖線および二点鎖線は、それぞれ中央および両側亀裂の応力拡大係数 K_{Ia} および K_{Ib} を示す。 $a/W=0.2$ 一定の場合を例にとると、 $(a+b)/W=0.2$ (D点) は中央亀裂のみが存在す

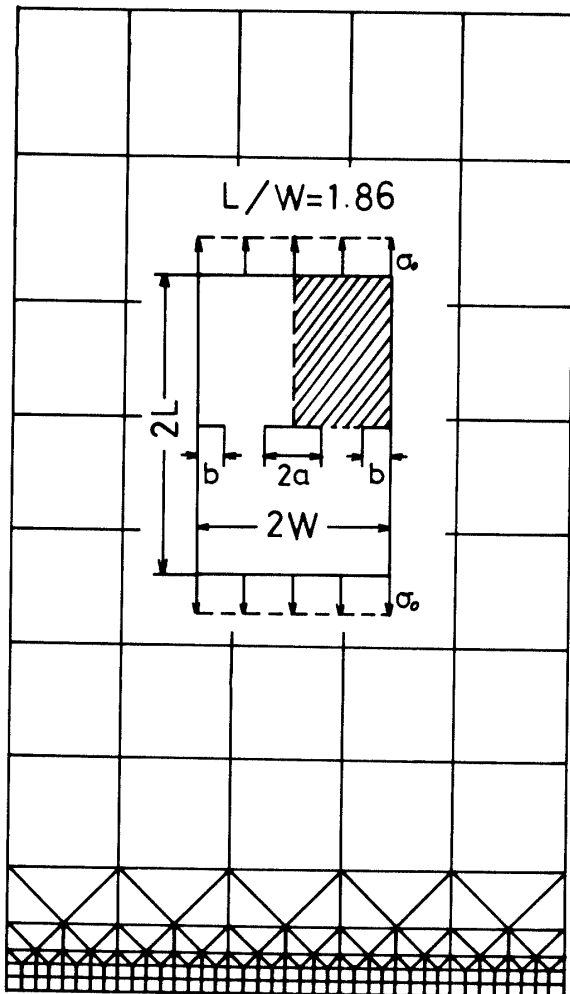


Fig.3 Finite element representation of one quarter of a test specimen model

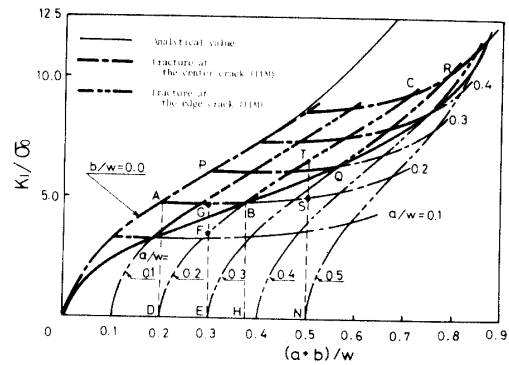


Fig.4 Relation between K_I/σ_0 and $(a+b)/W$.
 $(a+b)$: One-half of total crack length,
 W : One-half of specimen width,
 σ_0 : Gross section stress,
 K_I : Stress intensity factor)

る場合であり、 $(a+b)/W=0.3$ (E点) の時、 $K_{Ia}/\sigma_0 = \overline{EG}$ 、 $K_{Ib}/\sigma_0 = \overline{EF}$ であるので $K_{Ia} > K_{Ib}$ となり破壊は中央亀裂先端より生ずる。全亀裂長さを増加すると $(a+b)/W=0.38$ (H点) で $K_{Ia}/\sigma_0 = K_{Ib}/\sigma_0 = \overline{HB}$ となり破壊は中央および両側亀裂先端から同時に生ずる。さらに両側亀裂長さ b が増加して、例えば $(a+b)/W=0.5$ (N点) のときは、 $K_{Ia}/\sigma_0 = \overline{NS}$ 、 $K_{Ib}/\sigma_0 = \overline{NT}$ であるので $K_{Ia} < K_{Ib}$ となり破壊は両側亀裂先端から生ずる。すなわち \overline{AB} 間では中央亀裂より、 \overline{BC} 間では両側亀裂から、さらに B 点では中央と両側亀裂先端から同時に破壊が生ずることを示している。同様にして $a/W=0.3$ の時 K_I/σ_0 は曲線 \overline{PQR} となり、 \overline{PQ} では中央亀裂、 \overline{QR} では両側亀裂、 Q 点では両側亀裂先端から同時に破壊する。また $(a+b)/W$ を一定にとると、中央と両側の亀裂先端から同時に破壊する B 点あるいは Q 点の軌跡が K_I/σ_0 の下限値を示す。

なお、両側亀裂に対する Irwin の解析解⁵⁾ (細線) と $b/W=0$ の曲線は $(a+b)/W$ が大きくなると若干の相違がみられるが、解析解が板の長さを無限と仮定していることと、FEM の精度によるものと思われる。

4. 実験結果および考察

以上述べた数値解析法が正当か否かを調べるために、次の実験を行なった。

実験に使用した試験片は Fig.5 に示すような板厚 5.8mm、縦 200mm、幅 $2W=70$ mm の硬質塩化ビニール板で、中央および両側の亀裂は幅 0.5mm の薄刃糸ノコで切削後、その先端を 0.05mm の曲率半径に仕上げた。また硬質塩化ビニールは温度、湿度ならびに時硬効果の影響が大きいので、材料購入後外縁を取り除き温度 19°C、湿度 54% の条件下で実験を行なっ

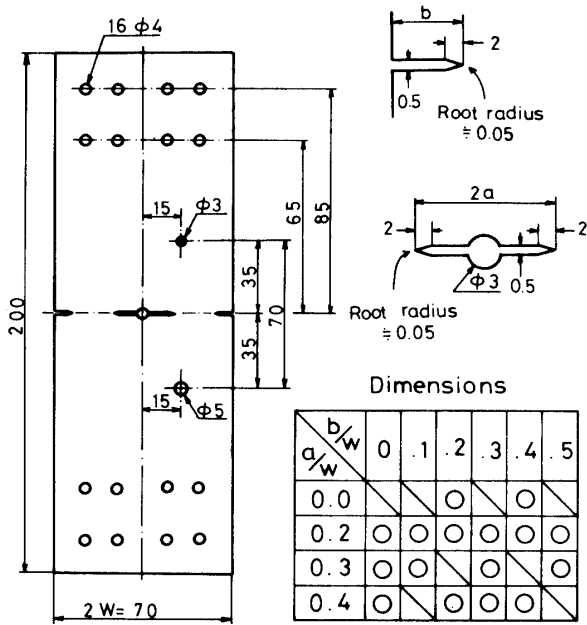


Fig. 5 Shape and dimensions of the specimen.

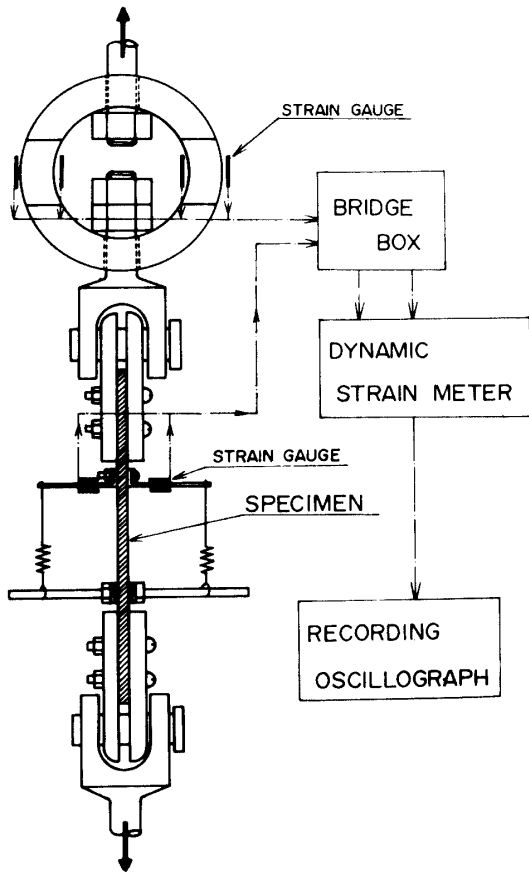


Fig. 6 Schematic diagram of apparatus.

た。材料の機械的性質を Table. 1 に、実験に用いた 16種類の亀裂長さの組み合わせを Fig. 5 に示す。

Table. 1 Mechanical properties

Young's modulus (kg/mm ²)	Poisson's ratio	Breaking Stress (kg/mm ²)
385.6	0.36	5.94

Fig. 6 に実験装置を示す。試験片は亀裂遠方で外力が断面に等しく作用するように、上下端とも 8 箇所ボルトによって固定し、また変位は曲げによる影響をのぞくために試験片の両面に変位計をとりつけた。この変位と荷重の関係は、歪ゲージを貼布したロードセルおよび変位計の出力を電磁オシロに接続して自動的に記録した。

Fig. 7 に荷重-荷重点変位の関係より求めたコンプライアンス C と亀裂長さとの関係を示す。同図から明らかなように、実線で示す FEM の計算結果と実験結果はほぼ一致し、荷重端近傍における外力がほぼ等応力分布となっていると推定できる。

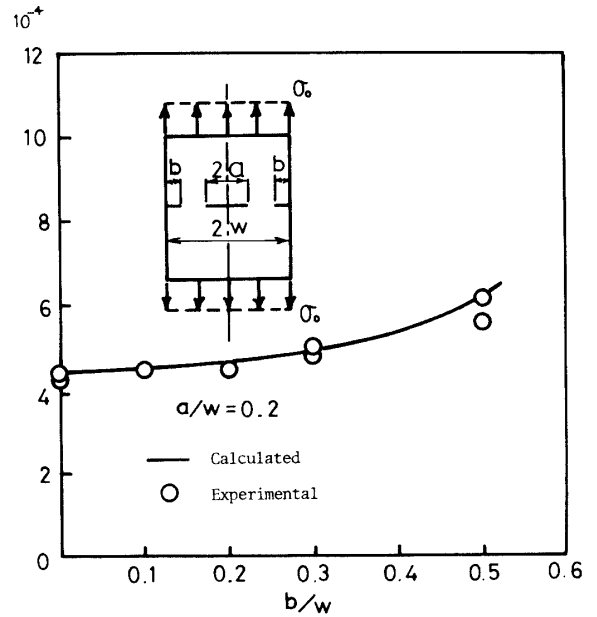


Fig. 7 Relation between compliance C and crack length.

Photo. 1 に中央亀裂より、Photo. 2 に両側亀裂より破壊を生じた試験片の破断写真を示す。同写真の矢印で示すように、破壊は亀裂先端に安定な破壊 (flat-fracture) を生じ、さらに急激に進展して枝状に拡がっている。従って、この安定な破壊面および亀裂の拡散方向から、どの亀裂先端より破壊を生じたか容易に判別できる。

Fig. 4 の K_I/σ_0 の下限値 (太実線) における a/W と $(a+b)/W$ の関係は、Fig. 8 の \overline{OC} に示すような

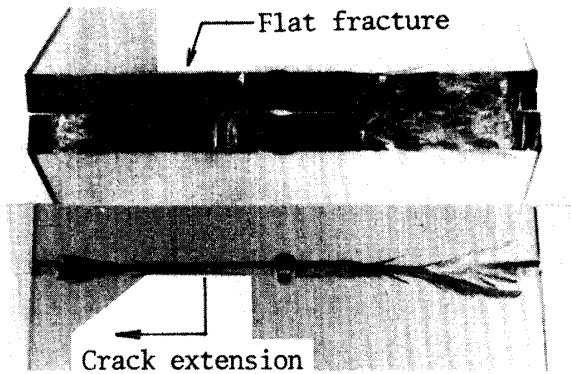


Photo. 1 An example of fracture surface of the hard polyvinyl chloride, the cracks initiated at both tips of center crack.

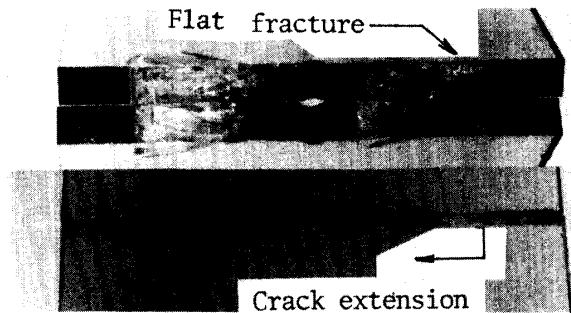


Photo. 2 An Example of fracture surface of the hard polyvinyl chloride, the cracks initiated at the tip of right edge crack.

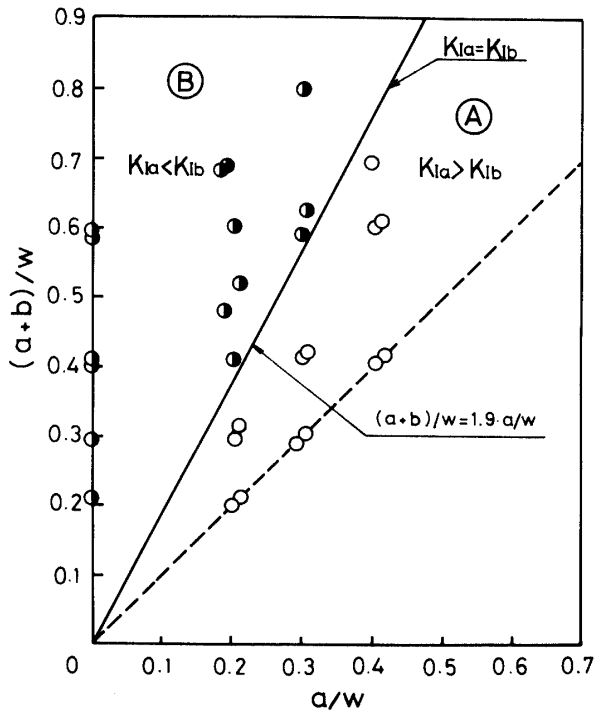


Fig. 8 The location of crack initiation. (A-zone: fracture at the center crack, B-zone: fracture at the side crack)

$(a+b)/W=1.9a/W$ の直線となった。ここで縦軸 $a/W=0$ は両側亀裂のみ、傾きが1の破線 \overline{OC} は中心亀裂のみが存在する場合である。

縦軸と直線 \overline{OC} で囲まれた領域③は $K_{Ia} < K_{Ib}$ となり両側亀裂先端より、直線 \overline{OC} と破線で囲まれた領域④は $K_{Ia} > K_{Ib}$ となり中央亀裂先端より、直線 \overline{OC} 上では $K_{Ia} = K_{Ib}$ となり中央と両側亀裂先端から同時に破壊することを示している。○印の中央亀裂より、●印の両側亀裂より破壊したことを示す実験結果は、Fig. 8 にみられるように本計算より得られた破壊位置を示す領域に全て対応した。

次に、Fig. 4 を用いて本実験結果から臨界応力拡大係数 K_{Ic} を計算すると、その平均値は $K_{Ic} = 7.46 \text{ kg mm}^{-3/2}$ となった。この K_{Ic} を用いて推定した破壊応力 σ_F と実験値は、後述の図に示すようにあまりばらつきがみられず、隣接亀裂の K_{Ic} と単一亀裂の K_{Ic} は等しいといえる。

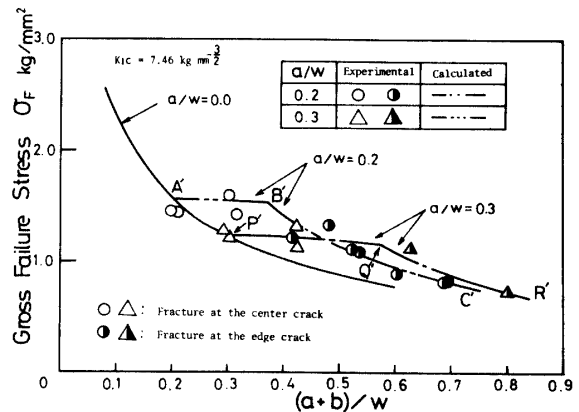


Fig. 9 Relation between gross failure stress and total crack length

Fig. 9 に a/W をパラメータにした場合の σ_F と $(a+b)/W$ の関係を示す。同図における曲線 $\overline{A'B'C'}$ および $\overline{P'Q'R'}$ は、Fig. 4 の曲線 \overline{ABC} および \overline{PQR} に対応している。Fig. 4 から明らかのように、Fig. 9 において $a/W=0.2$ 一定の場合、 $0.2 \leq (a+b)/W < 0.38$ ($\overline{A'B'}$) の範囲では中央亀裂先端より、 $(a+b)/W > 0.38$ ($\overline{B'C'}$) の範囲では両側亀裂先端より破壊が発生することを示している。中央亀裂から破壊する場合は、 σ_F は全亀裂長さの増加に対して無関係でありほぼ一定値となる。これに対して両側亀裂から破壊する場合、全亀裂長さの増加と共に急激な σ_F の低下がみられる。図中の○△印は中央亀裂より、●▲は両側亀裂より破壊した実験値を示し、これらの値は計算結果と比較してかなり良い一致がみられた。

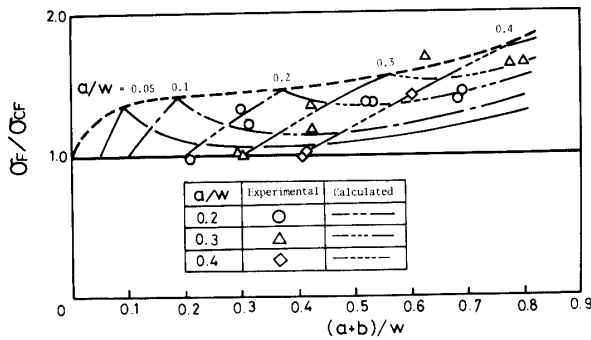


Fig.10 Relatween σ_F/σ_{CF} and $(a+b)/W$.
 (σ_{CF} : Gross failour stress of the plate with the center crack)

Fig.10 に σ_F/σ_{CF} と $(a+b)/W$ の関係を示す。ただし、 σ_{CF} は亀裂長さ $2(a+b)$ の中央亀裂のみを有する矩形板の破壊応力である。同図の $\sigma_F/\sigma_{CF}=1$ は中央亀裂のみの場合で、中央と両側亀裂が存在する場合は、いずれも $\sigma_F/\sigma_{CF}>1$ となり、複数の亀裂が存在する場合、等価な亀裂長さの単一亀裂と比較して破壊応力が高くなる。例えば $a/W=0.2$ 一定の場合、 σ_F/σ_{CF} は $(a+b)/W$ の増加と共に曲線 \overline{AB} に沿って増加するが、臨界点 B に達すると曲線 \overline{BC} に沿って一旦急激に減少した後再び増加する。

破線で示す臨界点 B の軌跡は Fig.4 の K_I/σ_0 の下限値 (太実線) に対応し、中央と両側亀裂先端から同時に破壊が生ずる場合の σ_F/σ_{CF} である。この時の破壊応力は、 $(a+b)/W$ を一定にとると最大となり、 $0.1 < (a+b)/W < 0.5$ の範囲では $1.45 < \sigma_F/\sigma_{CF} < 1.55$ となった。 $a/W=0.2, 0.3$ および 0.4 に対する計算値は、図中の○印で示す実験値とよく一致した。

なお、高分子材料の粘弾塑性およびクリープ特性が破壊応力に及ぼす影響については、立石、宮本¹⁵⁾の報告があるが、本実験に関しては負荷時間(約1分内外)が短いこと、実験温度が比較的低いことから完全な脆性材料として解析してもさしつかえいと思われる。

5. 結 言

脆性破壊靱性に及ぼす隣接亀裂の相互干渉の影響を調べるため、一直線上に中央および両側に対称な亀裂が共存する矩形板の応力拡大係数を、有限要素法の結

果にJ積分法を適用して数値的に求めた。さらに、計算結果の正当性を検証するために、硬質塩化ビニールを用いた破壊靱性試験を行なった結果、次のような結論を得た。

i) 本実験に用いた硬質塩化ビニールでは、同一環境下において、単一亀裂を有する矩形板の臨界応力拡大係数 K_{Ic} と、隣接亀裂を有する矩形板の K_{Ic} とはよく一致した。

ii) 隣接亀裂の全亀裂長さ $2(a+b)$ を、等価な中央亀裂あるいは両側亀裂に置きかえた場合、破壊応力 σ_F は等価な単一亀裂と比較して常に大きくなる。

iii) 中央および両側亀裂の応力拡大係数を K_{Ia} および K_{Ib} とすれば、 $K_{Ia} > K_{Ib}$ の時中央亀裂より、 $K_{Ia} < K_{Ib}$ の時両側亀裂より、 $K_{Ia} = K_{Ib}$ の時は中央と両側亀裂から同時に破壊が生ずる。全亀裂長さ $2(a+b)$ を一定にとると、 $K_{Ia} = K_{Ib}$ の時に破壊応力が最大となり、この時の全亀裂長さ^と中央亀裂長さの比は $(a+b)/a=1.9$ であった。

iv) 中央亀裂長さ $2a$ を一定にした場合、両側亀裂の長さ b が 0 から臨界値 $b=0.9a$ に達するまで、破壊応力は中央亀裂長さによって支配され両側亀裂長さの影響は非常に少ない。

参 考 文 献

- 1) M. Isida: Int. J. Fract. Mech., 7, 301 (1971).
- 2) B. Gross et al.: NASA TND-2369 (1964).
- 3) O.L. Bowie: J. Appl. Mech., 31, 208 (1964).
- 4) G.C. Sie et al.: J. Appl. Mech., 29, 306 (1962).
- 5) J.R. Dixon et al.: J. Starin Analysis, 7(1972).
- 6) A.P. Datsyshin et al.: PMM, 37-2 (1973).
- 7) B.L. Karihaloo: Engng. Fract. Mech., 12 (1979).
- 8) 池田他2名: 日本造船学会論文集, 129 (1971).
- 9) 永井他6名: 日本造船学会論文集, 132 (1972).
- 10) 永井他6名: 日本造船学会論文集, 134 (1973).
- 11) S. Shimizu, S. Kawano: Proceedings of the 1976 International Conference on Finite Element Method in Engineering, University of Adelaide, Australia (1976).
- 12) J.R. Rice: J. Appl. Mech., 35, 379 (1969).
- 13) R.K. Leverenz: Int. J. Fract. Mech., 8(1972).
- 14) H.M. Westergaard: J. Appl. Mech., 6 (1939).
- 15) 立石, 宮本: 機論, 40, 339 (1974).

(昭和54年10月15日受理)