

二鉸プレートガーダーアーチの設計計算の簡易化に就て

川上 暢 夫

1. 概 要

一般に不静定構造物の設計計算には、相当の労力と時間とを要する。理論的には解けていても、実際に数値を入れて計算してみれば、相当に厄介であり、此間に誤算も生じ易い。当初断面を仮定してかかり、計算の結果、その仮定が不適當であることが分れば、仮定を立て直して再び最初より計算をやり直さねばならない。今その構造物の力学的性質を詳細に検討して置けば、仮定も適當なるを得るし、計算を著しく簡単に行うことができる。然し、計算を簡単にしたために大きい誤差を生じては問題にならない。

本論文に於ては、二鉸プレートガーダーアーチの設計計算を、主としてグラフを用いて機械的に行う様にして、その労力を著しく節減し、之に要する時間の短縮を計ると共に、その誤差を極めて僅少にとどめようとするのである。

まず下記の性質について検討する。

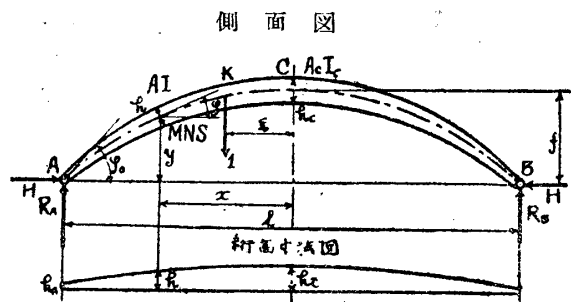
- (a) 支間 (l) が変化するにつれて、水平反力は如何に変化するか。
- (b) 直応力及び剪断応力の影響を無視すれば、水平反力に如何なる誤差を生ずるか。
- (c) 支間と拱矢との比 ($n=l/f$) と水平反力との関係如何。
- (d) 支点より拱頂に至る断面の変化と水平反力との関係如何。
- (e) 水平反力に於ける上記の誤差を補正するには如何にすべきか。

次に、之等の性質にもとづき、不静定力即ち水平反力の影響線を求める為の諸表及びグラフを作製し、最後にこれ等を用いて計算する順序方法を述べる。

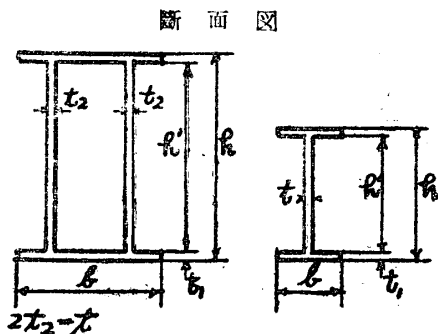
2. アーチの軸曲線及び断面

アーチの軸曲線に就ては、死荷重が大体に於て、等分布荷重に近いものとして、パラボラを

選んだ。これは又計算を容易にするためでもある。



第 1 図



第 2 図

アーチの軸曲線式下の如し。

$$\left. \begin{aligned} y &= f \left(1 - \frac{4}{l^2} x^2 \right) = f \left(1 - \frac{1}{16} n^2 \tan^2 \varphi \right) \\ \tan \varphi &= \frac{8f}{l^2} x = \frac{8}{nl} x \\ \tan \varphi_0 &= \frac{4f}{l} = \frac{4}{n} \\ x &= \frac{l^2}{8f} \tan \varphi = \frac{nl}{8} \tan \varphi \end{aligned} \right\} (1)$$

但し、 $l/f = n$ とする。

アーチの断面は、第2図に示す様に、箱形又は1形とする。而して、その高さ (h) は、第1図下方に示す様に、支点より頂点に至る間、パラボラ形に変化するものとする。

今

$$\left. \begin{aligned} h' &= h - 2t_1 \\ b' &= b - t \\ \frac{h'}{h} &= p \\ \frac{b'}{b} &= q \\ \frac{h_C}{h_A} &= \mu \end{aligned} \right\}$$

と置く、そうすれば

$$\begin{aligned} h &= h_C - \frac{4}{l^2}(h_C - h_A) = h_A \left\{ \frac{h_C}{h_A} - \left(\frac{h_C}{h_A} - 1 \right) \frac{4}{l^2} x^2 \right\} \\ &= h_A \left\{ \mu - (\mu - 1) \frac{4}{l^2} x^2 \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

$$A = hb(1 - pq) \quad (3)$$

$$I = \frac{1}{12} h^3 b (1 - p^3 q) \quad (4)$$

3. 水平反力の影響線

水平反力の影響線は下の式で表される。

$$H = \frac{\int M_0 y w dx + \frac{I_C}{A_C} \int N \cos \varphi v dx + \frac{\beta E I_C}{G A_C} \int S \sin \varphi v dx}{\int y^2 w dx + \frac{I_C}{A_C} \int \cos^2 \varphi v dx + \frac{\beta E I_C}{G A_C} \int \sin^2 \varphi v dx} \quad (5)$$

ここに

$$E = 2,100,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$G = 810,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{E}{G} = \frac{70}{27}$$

$$w = \frac{I_C}{I} \sec \varphi = \frac{\frac{1}{12} h c^3 b (1 - p^3 q)}{\frac{1}{12} h^3 b (1 - p^3 q)} \sec \varphi = \frac{h c^3}{h^3} \sec \varphi = \frac{h c^3 \sec \varphi}{h_A^3 \left\{ \mu - (\mu - 1) \frac{4}{l^2} x^2 \right\}^3} = \frac{\sec \varphi}{\left\{ 1 - 4m \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right\}^3} \quad (6)$$

$$v = \frac{A_C}{A} \sec \varphi = \frac{h c b (1 - p q)}{h b (1 - p q)} \sec \varphi = \frac{h c}{h} \sec \varphi = \frac{\sec \varphi}{1 - 4m \left(\frac{x}{l} \right)^2} \quad (7)$$

但し、 $m = \frac{\mu - 1}{\mu}$ と置く。

次に係数 β は下の式で求められる。

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{A}{I^2} \int \frac{Q^2}{b} dy = \frac{b h (1 - p q)}{144 b^2 h^6 (1 - p^3 q)^2} \left[\frac{2}{b} \int_0^{\frac{1}{2} h} \left\{ \frac{b}{8} (h^2 - 4y^2) \right\}^2 dy + \frac{2}{b(1 - q)} \int_0^{\frac{1}{2} p h} \left\{ \frac{b}{8} (h^2 - 4y^2) \right\}^2 dy \right] \\ &= \frac{3(1 - p q)}{20(1 - p^3 q)^2 (1 - q)} \left\{ (1 - q) (8 - 15p + 10p^3 - 3p^5) + 15p(1 - q p^2)^2 - 10p^3(1 - q p^2)(1 - q) + 3p^5(1 - q)^2 \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

今 $\begin{cases} p = 0.8 \sim 0.95 \\ q = 0.95 \sim 0.98 \end{cases}$ とすれば、 β の値は下の表のようになる。

β の値

第 1 表

q \ p	0.95	0.96	0.97	0.98
0.80	4.766	5.762	7.392	10.655
0.85	3.874	4.613	5.846	8.316
0.90	2.939	3.434	4.259	5.914
0.95	1.994	2.239	2.650	3.475

次に、

$$\frac{I_C}{A_C} = \frac{\frac{1}{12} h c^3 b (1 - p^3 q)}{h c b (1 - p q)} = \frac{1}{12} h c^2 \frac{1 - p^3 q}{1 - p q}$$

$\frac{1}{12} \cdot \frac{1 - p^3 q}{1 - p q}$ の値は下の表の如し。

第 2 表

q \ p	0.95	0.96	0.97	0.98
0.80	0.178	0.183	0.187	0.192
0.85	0.180	0.186	0.192	0.199
0.90	0.177	0.184	0.192	0.202
0.95	0.159	0.168	0.176	0.193

近似的に、

$$\frac{I_c}{A_c} \doteq 0.185 hc^2 \quad (9)$$

今このアーチを単純ばりと考えた場合の任意の点に於ける応力を M_0 N_0 S_0 とすれば、

AK間に於ては、

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= 1 \cdot \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} l + \xi \right) \left(\frac{1}{2} l - x \right) \\ N_0 &= -1 \cdot \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} l + \xi \right) \sin \varphi \\ S_0 &= 1 \cdot \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} l + \xi \right) \cos \varphi \end{aligned} \right\} (10')$$

KB間に於ては、

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= 1 \cdot \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} l - \xi \right) \left(\frac{1}{2} l + x \right) \\ N_0 &= 1 \cdot \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} l - \xi \right) \sin \varphi \\ S_0 &= -1 \cdot \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} l - \xi \right) \cos \varphi \end{aligned} \right\} (10'')$$

$$\int y^2 w dx = f^2 l \int \frac{(1-8t^2+16t^4)(1+\frac{32}{n^2}t^2-\frac{512}{n^4}t^4)}{(1-4mt^2)^3} dt$$

今 $0 < m < 1$ 及び $0 < t < 1/2$ である。故に $2\sqrt{m}t = \sin \theta$ と置けば、

$$dt = \frac{\cos \theta}{2\sqrt{m}} d\theta \quad \text{となる。故に、}$$

$$\begin{aligned} \int y^2 w dx &= f^2 l \int \frac{\left\{ 1 - \frac{2}{m} \left(1 - \frac{4}{n^2} \right) \sin^2 \theta + \frac{1}{m^2} \left(1 - \frac{16}{n^2} - \frac{32}{n^4} \right) \sin^4 \theta + \frac{8}{n^2 m^3} \left(1 + \frac{8}{n^2} \right) \sin^6 \theta - \frac{32}{n^4 m^4} \sin^8 \theta \right\}}{2\sqrt{m} \cos^5 \theta} d\theta \\ &= f^2 l \left\{ \frac{1}{2\sqrt{m}} \int \frac{1}{\cos^5 \theta} d\theta - \frac{B_1}{m\sqrt{m}} \int \frac{\sin^2 \theta}{\cos^5 \theta} d\theta + \frac{B_2}{2m^2\sqrt{m}} \int \frac{\sin^4 \theta}{\cos^5 \theta} d\theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{4B_3}{m^3\sqrt{m}} \int \frac{\sin^6 \theta}{\cos^5 \theta} d\theta - \frac{16B_4}{m^2\sqrt{m}} \int \frac{\sin^8 \theta}{\cos^5 \theta} d\theta \right\} \end{aligned}$$

ここに

$$\left\{ \begin{aligned} B_1 &= 1 - \frac{4}{n^2} \\ B_2 &= 1 - \frac{16}{n^2} - \frac{32}{n^4} \\ B_3 &= \frac{1}{n^2} + \frac{8}{n^4} \\ B_4 &= \frac{1}{n^4} \quad \text{と置く、} \end{aligned} \right.$$

又

$$\left| \frac{1}{2\sqrt{m}} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{1}{\cos^5 \theta} d\theta = \frac{5-3m}{8(1-m)^2} + \frac{3}{16\sqrt{m}} \log \frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} \right.$$

次に、(5)式に於ける、分母及び分子の各項を計算する。

$$(1) \int y^2 w dx$$

今

$$\frac{x}{l} = t \quad \text{と置けば} \quad dx = l dt$$

$$y = f \left\{ 1 - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right\} = f (1 - 4 t^2)$$

$$w = \frac{\sec \varphi}{\{1 - 4 m t^2\}^3}$$

$$\sec \varphi = \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} = \left(1 + \frac{64}{n} t^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\doteq 1 + \frac{32}{n^2} t^2 - \frac{512}{n^4} t^4$$

$$\left\{ \begin{aligned} & -\frac{B_1}{m\sqrt{m}} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\sin^2 \theta}{\cos^5 \theta} d\theta = -\frac{(1+m)B_1}{4m(1-m)^2} + \frac{B_1}{8m\sqrt{m}} \log \frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} \\ & \frac{B^2}{2m^2\sqrt{m}} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\sin^4 \theta}{\cos^5 \theta} d\theta = -\frac{(3-5m)B_2}{8m^2(1-m)^2} + \frac{3B^2}{16m^2\sqrt{m}} \log \frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} \\ & \frac{4B_3}{m^3\sqrt{m}} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\sin^6 \theta}{\cos^5 \theta} d\theta = -\frac{(15-25m+8m^2)B_3}{m^3(1-m)^2} + \frac{15B_3}{2m^3\sqrt{m}} \log \frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} \\ & -\frac{16B^4}{m^4\sqrt{m}} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\sin^8 \theta}{\cos^5 \theta} d\theta = \frac{4(105-175m+56m^2+8m^3)B^4}{3m^4(1-m)^2} - \frac{70B_4}{m^4\sqrt{m}} \log \frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} \end{aligned} \right.$$

之等の價を上式に代入すれば、

$$\begin{aligned} & +\frac{1}{2} l \\ & \int y^2 w dx = f^2 l \left[\frac{1}{24(1-m)^2} \left\{ 3(5-3m) - \frac{3(1-m)B_1}{m} - \frac{3(3-5m)B^2}{m^2} - \frac{24(15-25m+8m^2)B_3}{m^3} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} l \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{32(105-175m+56m^2+8m^3)}{m^4} \right\} + \frac{1}{16\sqrt{m}} \left\{ 3 + \frac{2B_1}{m} + \frac{3B_2}{m^2} + \frac{120B_3}{m^3} - \frac{1120B_4}{m^4} \right\} \log \frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

$$(2) \frac{I_c}{Ac} \int \cos^2 \varphi v dx$$

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{l^2}{8f} \tan \varphi \\ dx &= \frac{nl}{8} \sec^2 \varphi d\varphi \\ v &= \frac{\sec \varphi}{1-4m\left(\frac{x}{l}\right)^2} = \frac{\sec \varphi}{1-\frac{n^2 m}{16} \tan^2 \varphi} \end{aligned} \right.$$

$$\int \cos^2 \varphi v dx = \int \frac{\cos^2 \varphi \sec \varphi}{1-\frac{n^2 m}{16} \tan^2 \varphi} \cdot \frac{nl \sec^2 \varphi}{8} d\varphi = \frac{nl}{8} \int \frac{\cos \varphi}{1-\left(1+\frac{n^2 m}{16}\right) \sin^2 \varphi} d\varphi$$

今 $\sin \varphi = t$ と置けば、

$$d\varphi = \frac{dt}{\cos \varphi}$$

$$\begin{aligned} & +\frac{1}{2} l \\ & \int \cos^2 \varphi v dx = \frac{nl}{8} \int_{-\sin \varphi_0}^{+\sin \varphi_0} \frac{1}{1-\left(1+\frac{n^2 m}{16}\right) t^2} dt = \frac{nl}{16\sqrt{1+\frac{n^2 m}{16}}} \log \frac{1+\sin \varphi_0 \sqrt{1+\frac{n^2 m}{16}}}{1-\sin \varphi_0 \sqrt{1+\frac{n^2 m}{16}}} \\ & -\frac{1}{2} l \end{aligned}$$

然るに

$$\sin \varphi_0 = \sqrt{\frac{1}{1+\cot^2 \varphi_0}} = \frac{4}{\sqrt{16+n^2}} \quad \text{故に}$$

$$\frac{I_c}{Ac} \int \cos^2 \varphi v dx = \frac{I_c}{Ac} \cdot \frac{nl}{8\sqrt{1+\frac{n^2 m}{16}}} \log \frac{1+\frac{4}{\sqrt{16+n^2}} \sqrt{1+\frac{n^2 m}{16}}}{1-\frac{4}{\sqrt{16+n^2}} \sqrt{1+\frac{n^2 m}{16}}}$$

$$= \frac{I_c}{Ac} \cdot \frac{n/l}{2\sqrt{16+n^2m}} \log \frac{\sqrt{16+n^2} + \sqrt{16+n^2m}}{\sqrt{16+n^2} - \sqrt{16+n^2m}} \quad (12)$$

(3) $\frac{\beta EI_c}{GAc} \int \sin^2 \varphi v dx$

$$\int \sin^2 \varphi v dx = \frac{n/l}{8} \int \frac{\sin^2 \varphi \sec^3 \varphi}{1 - \frac{n^2 m}{16} \tan^2 \varphi} d\varphi$$

今 $\begin{cases} \sin \varphi = t & \text{と置けば,} \\ d\varphi = \frac{dt}{\cos \varphi} \end{cases}$

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \sin^2 \varphi v dx = \frac{n/l}{8} \int_{-\sin \varphi_0}^{+\sin \varphi_0} \frac{t^2}{(1-t^2 - \frac{n^2 m}{16} t^2)(1-t^2)} dt = \frac{n/l}{8} \cdot \frac{16}{n^2 m} \left\{ \int_{-\sin \varphi_0}^{+\sin \varphi_0} \frac{dt}{1 - \left(1 + \frac{n^2 m}{16}\right) t^2} \right.$$

$$\left. - \int_{-\sin \varphi_0}^{+\sin \varphi_0} \frac{dt}{1-t^2} \right\} = \frac{2/l}{nm} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{n^2 m}{16}}} \log \frac{1 + \sin \varphi_0 \sqrt{1 + \frac{n^2 m}{16}}}{1 - \sin \varphi_0 \sqrt{1 + \frac{n^2 m}{16}}} - \log \frac{1 + \sin \varphi_0}{1 - \sin \varphi_0} \right\}$$

$$\frac{\beta EI_c}{GAc} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \sin^2 \varphi v dx = \frac{\beta EI_c}{GAc} \cdot \frac{2/l}{nm} \left\{ \frac{1}{\sqrt{16 + n^2 m}} \log \frac{\sqrt{16+n^2} + \sqrt{16+n^2m}}{\sqrt{16+n^2} - \sqrt{16+n^2m}} - \log \frac{\sqrt{16+n^2+4}}{\sqrt{16+n^2-4}} \right\} \quad (13)$$

(4) $\int M_0 y w dx$

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} M_0 y w dx = \int_{-\frac{1}{2}l}^{\xi} \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} l - \xi \right) \left(\frac{1}{2} l + x \right) y w dx + \int_{\xi}^{+\frac{1}{2}l} \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} l + \xi \right) \left(\frac{1}{2} l - x \right) y w dx$$

$$= \frac{1}{4} l \int_{-\frac{1}{2}l}^{\xi} y w dx - \frac{1}{2} \xi \int_{-\frac{1}{2}l}^{\xi} y w dx + \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}l}^{\xi} x y w dx - \frac{\xi}{l} \int_{-\frac{1}{2}l}^{\xi} x y w dx + \frac{1}{4} l \int_{+\xi}^{+\frac{1}{2}l} y w dx + \frac{1}{2} \xi \int_{+\xi}^{+\frac{1}{2}l} y w dx$$

$$- \frac{1}{2} \int_{+\xi}^{+\frac{1}{2}l} x y w dx - \frac{\xi}{l} \int_{+\xi}^{+\frac{1}{2}l} x y w dx = \frac{1}{4} l \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} y w dx - \frac{1}{2} \xi \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} y w dx - \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} x y w dx$$

今 $\begin{cases} \frac{x}{l} = t & \text{と置けば,} \\ x = lt \\ dx = l dt \\ y = f(1 - 4t^2) \end{cases}$

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} yw dx = fl \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{(1-4t^2)(1+\frac{32}{n^2}t^2-\frac{512}{n^4}t^4)}{(1-4mt^2)^3} dt = fl \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{1-4(1-\frac{8}{n^2})t^2-128(\frac{4}{n^4}+\frac{1}{n^2})t^4+\frac{2048}{n^4}t^6}{(1-4mt^2)^3} dt$$

今

$$\begin{cases} 2V\sqrt{mt} = \sin\theta & \text{と置けば,} \\ dt = \frac{\cos\theta}{2V\sqrt{m}} d\theta & \text{故に,} \end{cases}$$

$$\int yw dx = \frac{f_1 l}{2V\sqrt{m}} \left\{ \int \frac{1}{\cos^5\theta} d\theta - \frac{1}{m} C_1 \int \frac{\sin^2\theta}{\cos^5\theta} d\theta - \frac{8C_2}{m^2} \int \frac{\sin^4\theta}{\cos^5\theta} d\theta + \frac{32C_3}{m^4} \int \frac{\sin^6\theta}{\cos^5\theta} d\theta \right\}$$

ここに,

$$\begin{cases} C_1 = 1 - \frac{8}{n^2} \\ C_2 = \frac{4}{n^4} + \frac{1}{n^2} \\ C_3 = \frac{1}{n^4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2V\sqrt{m}} \int \frac{1}{\cos^5\theta} d\theta = \frac{t(5-12mt^2)}{8(1-mt^2)^2} + \frac{3}{32V\sqrt{m}} \log \frac{1+2V\sqrt{mt}}{1-2V\sqrt{mt}} \\ -\frac{C_1}{2mV\sqrt{m}} \int \frac{\sin^2\theta}{\cos^5\theta} d\theta = -\frac{t(1+4mt^2)C_1}{8(1-4mt^2)^2 m} + \frac{C_1}{32mV\sqrt{m}} \log \frac{1+2V\sqrt{mt}}{1-2V\sqrt{mt}} \\ -\frac{8C_2}{2m^2V\sqrt{m}} \int \frac{\sin^4\theta}{\cos^5\theta} d\theta = \frac{8t(3-20mt^2)C_2}{8(1-4mt^2)^2 m^2} - \frac{3C_2}{4m^2V\sqrt{m}} \log \frac{1+2V\sqrt{mt}}{1-2V\sqrt{mt}} \\ \frac{32C_3}{2m^4V\sqrt{m}} \int \frac{\sin^6\theta}{\cos^5\theta} d\theta = -\frac{4t(15-100mt^2+128m^2t^4)C_3}{m^4(1-4mt^2)^2} + \frac{15C_3}{m^4} \log \frac{1+2V\sqrt{mt}}{1-2V\sqrt{mt}} \end{cases}$$

$$\int yw dx = fl \left[\frac{t}{8m^4(1-4mt^2)^2} \left\{ (5m^4 - m^3C_1 + 24m^2C_2 - 480C_3) - (12m^5 + 4m^4C_1 + 160m^3C_2 - 320mC_3)t^2 - 4096m^2C_3t^4 \right\} + \frac{1}{32m^4V\sqrt{m}} (3m^4 + m^3C_1 - 24m^2C_2 + 480C_3) \log \frac{1+2V\sqrt{mt}}{1-2V\sqrt{mt}} \right]$$

今、 $\xi/l = k$ と置く

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2} l \\ \frac{1}{4} l \int yw dx &= fl^2 \left[\frac{1}{32m^4(1-m)^2} \left\{ m^4(5-3m) - m^3(1+m)C_1 + 8m^2(3-5m)C_2 - 16(30-5m \right. \right. \\ & \left. \left. - 16m^2)C_3 \right\} + \frac{1}{64m^4V\sqrt{m}} (3m^4 + m^3C_1 - 24m^2C_2 + 480C_3) \log \frac{1+V\sqrt{m}}{1-V\sqrt{m}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \xi \\ \frac{1}{2} \xi \int yw dx &= fl^2 \left[\frac{k^2}{8m^4(1-4mt^2)^2} \left\{ (5m^4 - m^3C_1 + 24m^2C_2 - 480C_3) - 4(3m^5 + m^4C_1 + 40m^3C_2 \right. \right. \\ & \left. \left. - 80mC_3) t^2 - 4096m^2C_3 t^4 \right\} + \frac{k}{32m^4V\sqrt{m}} (3m^4 + m^3C_1 - 24m^2C_2 + 480C_3) \log \frac{1+2V\sqrt{mt}}{1-2V\sqrt{mt}} \right] \end{aligned}$$

次に

$$\begin{aligned} \int xyw dx &= fl^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{(1-4t^2)(1+\frac{32}{n^2}t^2-\frac{512}{n^4}t^4)t}{(1-4mt^2)^3} dt = fl^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{t-4(1-\frac{8}{n^2})t^3-128(\frac{4}{n^4}+\frac{1}{n^2})t^5+\frac{2048}{n^4}t^7}{(1-4mt^2)^3} dt \\ &= \frac{fl^2}{4m} \left\{ \int \frac{\sin\theta}{\cos^5\theta} d\theta - \frac{1}{m} C_1 \int \frac{\sin^3\theta}{\cos^5\theta} d\theta - \frac{8}{m^2} C_2 \int \frac{\sin^5\theta}{\cos^5\theta} d\theta + \frac{32}{m^3} C_3 \int \frac{\sin^7\theta}{\cos^5\theta} d\theta \right\} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta &= \frac{2mt^2(1-2mt^2)}{(1-4mt^2)^2} \\ -\frac{1}{m} C_1 \int \frac{\sin^3 \theta}{\cos^5 \theta} d\theta &= -\frac{4mt^4 C_1}{(1-4mt^2)^2} \\ -\frac{8}{m^2} C_2 \int \frac{\sin^5 \theta}{\cos^7 \theta} d\theta &= -\frac{16t^2(6mt^2-1)C_2}{m(1-4mt^2)^2} + \frac{4C_2}{m^2} \log(1-4mt^2) \\ \frac{32}{m^3} C_3 \int \frac{\sin^7 \theta}{\cos^9 \theta} d\theta &= \frac{(-1024m^2t^4 + 1152mt^2 - 192)t^2 C_3}{m^2(1-4mt^2)^2} - \frac{48C_3}{m^3} \log(1-4mt^2) \end{aligned} \right.$$

$\frac{1}{2} l$

$$\int_{\xi} xyw dx = fl^2 \left[\frac{1}{16m^3(1-m)^2} \{m^3(2-m) - m^3 C_1 + 8m(2-3m)C_2 + 32(3-2m^2)C_3\} \right. \\ \left. + \frac{mC_2 - 12C_3}{m^4} \log(1-m) \right] - fl^2 \left[\frac{k^2}{2m^3(1-4mk^2)^2} \{ (m^3 + 8mC_2 - 96C_3) - (2m^4 + 2m^3 C_1 \right. \\ \left. + 48m^2 C_2 - 576C_3)k^2 - 512m^2 C_3 k^4 \} + \frac{mC_2 - 12C_3}{m^4} \log(1-4mk^2) \right]$$

$$\int M_0 y w dx = fl^2 \left[\frac{1}{32m^4(1-m)^2} \{m^4 - m^5 - (3m-1)m^3 C_1 - 8m^2(1-m)C_2 - 16(30+7m+16m^2 \right. \\ \left. - 8m^3)C_3\} - \frac{k^2}{8m^4(1-4mk^2)^2} \{m^4 - m^3 C_1 - 8m^2 C_2 - 96(5-4m)C_3 - (4m^5 - 4m^4 C_1 \right. \\ \left. - 32m^3 C_2 - 1984m C_3)k^2 - 2048m^2(2+m)C_3 k^4\} \right. \\ \left. + \frac{1}{64m^4 \sqrt{m}} (3m^4 + m^3 C_1 - 24m^2 C_2 + 480C_3) \left\{ \log \frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} - 2k \log \frac{1+2\sqrt{m}}{1-2\sqrt{m}} k \right\} \right. \\ \left. - \frac{mC_2 - 12C_3}{m^4} \left\{ \log(1-m) - \log(1-4mk^2) \right\} \right] \tag{14}$$

(5) $\frac{Ic}{Ac} \int N \cos \varphi v dx$

$$\left\{ \begin{aligned} v &= \frac{\sec \varphi}{1 - \frac{n^2 m}{16} \tan^2 \varphi} \\ dx &= \frac{nl}{8} \sec^2 \varphi d\varphi \end{aligned} \right.$$

$$\int N \cos \varphi v dx = \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} l - \xi \right) \int_{-\frac{1}{2} l}^{+\xi} \sin \varphi \cos \varphi v dx - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} l + \xi \right) \int_{+\xi}^{+\frac{1}{2} l} \sin \varphi \cos \varphi v dx \\ = \frac{n}{8} \left(\frac{1}{2} l - \xi \right) \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_1} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi - \frac{n^2 m}{16} \sin^2 \varphi} d\varphi - \frac{n}{8} \left(\frac{1}{2} l + \xi \right) \int_{+\varphi_1}^{+\varphi_0} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi - \frac{n^2 m}{16} \sin^2 \varphi} d\varphi$$

今 $\left\{ \begin{aligned} \cos \varphi &= t && \text{と置けば,} \\ d\varphi &= -\frac{dt}{\sin \varphi} \end{aligned} \right.$

$$\int \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi - \frac{n^2 m}{16} \sin^2 \varphi} d\varphi = - \int \frac{dt}{\left(1 + \frac{n^2 m}{16}\right)t^2 - \frac{n^2 m}{16}} = - \frac{8}{n\sqrt{m(16-n^2m)}} \log \frac{t\sqrt{16+n^2m} - n\sqrt{m}}{t\sqrt{16+n^2m} + n\sqrt{m}}$$

又 $\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} = \int_{+k}^{+\frac{1}{2}l}$ である。故に

$$\frac{I_c}{Ac} \int_0^l N_0 \cos \varphi v dx = -\frac{I_c}{Ac} \cdot \frac{l}{Vm(16-n^2m)} \left\{ \log \frac{\sqrt{16+n^2m} - 2n\sqrt{Vm}}{\sqrt{16+n^2m} + 2n\sqrt{Vm}} - \log \frac{\sqrt{16+n^2m} - 2n\sqrt{Vm}}{\sqrt{16+n^2m} + 2n\sqrt{Vm}} \right\} \quad (15)$$

(6) $\frac{\beta EI_c}{GAc} \int S_0 \sin \varphi v dx$

$$\frac{\beta EI_c}{GAc} \int S_0 \sin \varphi v dx = \frac{\beta EI_c}{GAc} \left\{ -\frac{n}{8} \left(\frac{1}{2}l - \xi \right) \int_{+\varphi_0}^{+\varphi_1} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\cos^2 \varphi - \frac{n^2 m}{16} \sin^2 \varphi} + \frac{n}{8} \left(\frac{1}{2}l + \xi \right) \int_{+\varphi_1}^{+\varphi_0} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\cos^2 \varphi - \frac{n^2 m}{16} \sin^2 \varphi} \right\} = -\frac{\beta EI_c}{GAc} \int N_0 \cos \varphi v dx \dots \dots \dots (16)$$

(15) 式参照

以上の(11)~(15)式の値を(5)式に代入すれば水平反力Hが求められる。

4. 均等断面のアーチに於ける水平反力の影響線。

$\mu = 1$ 即ち $m = 0$ の場合であつて、§3の式に之をあてはめると0/0となり、値が求められないから、下の様にして之を求める。

(1) $\int y^2 w dx$

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} y^2 w dx = f^2 \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} (1-8t^2+16t^4) \left(1 + \frac{32}{n^2} t^2 - \frac{512}{n^4} t^4 \right) dt = f^2 \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \left\{ 1 - 8 \left(1 - \frac{4}{n^2} \right) t^2 + 16 \left(1 - \frac{16}{n^2} - \frac{32}{n^4} \right) t^4 + \frac{512}{n^2} \left(1 + \frac{8}{n^2} \right) t^6 - \frac{8192}{n^4} t^8 \right\} dt = \frac{8}{15} f^2 l \left(1 + \frac{8}{7n^2} - \frac{32}{21n^4} \right) \quad (17)$$

(2) $\frac{I_c}{Ac} \int \cos^2 \varphi v dx$

(12)式に於て、 $m = 0$ と置けば

$$\frac{I_c}{Ac} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \cos^2 \varphi v dx = \frac{I_c}{Ac} \cdot \frac{nl}{8} \log \frac{\sqrt{16+n^2} + 4}{\sqrt{16+n^2} - 4} \quad (18)$$

(3) $\frac{\beta EI_c}{GAc} \int \sin^2 \varphi v dx$

$$\frac{\beta EI_c}{GAc} \int \sin^2 \varphi v dx = \frac{\beta EI_c}{GAc} \cdot \frac{l^2}{8l} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} d\varphi = \frac{\beta EI_c}{GAc} \cdot \frac{nl}{8} \left\{ \frac{\sin \varphi_0}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \varphi_0}{1 - \sin \varphi_0} \right\} = \frac{\beta EI_c}{GAc} \cdot \frac{nl}{8} \left\{ \frac{3}{n^2} \sqrt{16+n^2} - \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{16+n^2} + 1}{\sqrt{16+n^2} - 1} \right\} \quad (19)$$

(4) $\int M_0 y w dx$

$$\int M_0 y w dx = \frac{1}{4} l \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} y w dx - \frac{1}{2} \xi \int_{-\xi}^{+\xi} y w dx - \int_{\xi}^{+\frac{1}{2}l} x y w dx$$

今 $\begin{cases} \frac{x}{l} = t & \text{と置けば,} \\ x = lt \\ dx = l dt \\ y = f(1 - 4t^2) \\ w = \frac{1 + \frac{32}{n^2} t^2 - \frac{512}{n^4} t^4}{(1 - 4mt^2)^3} \end{cases}$

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} y w dx = fl \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left\{ 1 - 4 \left(1 - \frac{8}{n^2} \right) t^2 - 128 \left(\frac{4}{n^4} + \frac{1}{n^2} t^4 \right) \right\} dt = 2fl \left(\frac{1}{3} + \frac{8}{15n^2} - \frac{16}{5n^4} \right)$$

$$\int_{-\xi}^{+\xi} y w dx = 2fl \left\{ k + \frac{4}{3} \left(1 - \frac{8}{n^2} \right) k^3 - \frac{128}{5} \left(\frac{4}{n^4} + \frac{1}{n^2} \right) k^5 \right\}$$

$$\int_{\xi}^{+\frac{1}{2}l} x y w dx = fl^2 \int_k^{+\frac{1}{2}} (1 - 4t^2) \left(1 + \frac{32}{n^2} t^2 - \frac{512}{n^4} t^4 \right) t dt$$

$$= fl^2 \left[\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{6n^2} - \frac{4}{3n^4} \right) - \left\{ \frac{1}{2} k^2 - \left(1 - \frac{8}{n^2} \right) k^4 - \frac{64}{3} \left(\frac{4}{n^4} + \frac{1}{n^2} \right) k^6 \right\} \right]$$

$$\int M_0 y w dx = fl^2 \left[\left(\frac{5}{48} + \frac{1}{10n^2} - \frac{4}{15n^4} \right) - \left\{ \frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{8}{n^2} \right) k^4 - \frac{64}{15} \left(\frac{4}{n^4} + \frac{1}{n^2} \right) k^6 \right\} \right] \quad (20)$$

(5) $\frac{I_c}{Ac} \int N_0 \cos \varphi v dx$

$$\begin{aligned} \frac{I_c}{Ac} \int N_0 \cos \varphi v dx &= \frac{I_c}{Ac} \left\{ \frac{n}{8} \left(\frac{1}{2} l - \xi \right) \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_1} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi - \frac{n}{8} \left(\frac{1}{2} l + \xi \right) \int_{+\varphi_1}^{+\varphi_0} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi \right\} \\ &= - \frac{I_c}{Ac} \cdot \frac{nl}{8} \left\{ \frac{1}{\cos \varphi_0} - \frac{1}{\cos \varphi_1} \right\} = - \frac{I_c}{Ac} \cdot \frac{l}{8} \left(\sqrt{16+n^2} - \sqrt{64k^2+n^2} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

(6) $\frac{\beta EI_c}{GA_c} \int S_0 \sin \varphi v dx$

(6)式に示す様に、

$$\frac{\beta EI_c}{GA_c} \int S_0 \sin \varphi v dx = - \frac{\beta EI_c}{GA_c} \int N_0 \cos \varphi v dx \quad (22)$$

以上の(17)~(22)式の値を(5)式に代入すれば、水平反力Hが求められる。

5. $w = 1$ の場合に於ける水平反力の影響線。

(1) $\int y^2 w dx$

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} y^2 w dx = \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} f^2 \left(1 - \frac{4}{l^2} x^2\right)^2 dx = f^2 \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \left(1 - \frac{8}{l^2} x^2 + \frac{16}{l^4} x^4\right) dx = \frac{8}{15} f^2 l \quad (23)$$

(2) $\frac{Ic}{Ac} \int \cos^2 \varphi v dx$

$$\frac{Ic}{Ac} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \cos^2 \varphi v dx = \frac{Ic}{Ac} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi} dx = \frac{Ic}{Ac} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{1}{1 + \left(\frac{8}{nl}\right)^2 x^2} dx = \frac{Ic}{Ac} \cdot \frac{nl}{4} \tan^{-1} \left(\frac{4}{n}\right) \dots \dots (24)$$

(3) $\frac{\beta EIc}{GAc} \int \sin^2 \varphi v dx$

$$\begin{aligned} \frac{\beta EIc}{GAc} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \sin^2 \varphi v dx &= \frac{\beta EIc}{GAc} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \left(1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi}\right) dx = \frac{\beta EIc}{GAc} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \left\{1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{8}{nl}\right)^2 x^2}\right\} dx \\ &= \frac{\beta EIc l}{GAc} \left\{1 - \frac{n}{4} \tan^{-1} \left(\frac{4}{n}\right)\right\} \end{aligned} \quad (25)$$

(4) $\int M_0 y w dx$

$$\begin{aligned} \int M_0 y w dx &= \frac{f}{l} \left(\frac{1}{2}l - \xi\right) \int_{-\frac{1}{2}l}^{\xi} \left(\frac{1}{2}l + x\right) \left(1 - \frac{4}{l^2} x^2\right) dx + \frac{f}{l} \left(\frac{1}{2}l + \xi\right) \int_{\xi}^{+\frac{1}{2}l} \left(\frac{1}{2}l - x\right) \left(1 - \frac{4}{l^2} x^2\right) dx \\ &= \frac{f^3}{n} \left(\frac{5}{48} - \frac{1}{2} k^2 + \frac{1}{3} k^4\right) \end{aligned} \quad (26)$$

(5) $\frac{Ic}{Ac} \int N_0 \cos \varphi v dx$

$$\frac{Ic}{Ac} \int N_0 \cos \varphi v dx = \frac{Ic}{Ac} \left\{ \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2}l - \xi\right) \int_{-\frac{1}{2}l}^{\xi} \sin \varphi \cos \varphi dx - \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2}l + \xi\right) \int_{\xi}^{+\frac{1}{2}l} \sin \varphi \cos \varphi dx \right\}$$

$$\int \sin \varphi \cos \varphi dx = \int \frac{\tan \varphi}{\tan^2 \varphi + 1} dx = 8fn^2 \int \frac{x}{64x^2 + n^2 l^2} dx$$

今 $\begin{cases} 64x^2 + n^2 l^2 = t & \text{と置けば,} \\ dx = \frac{dt}{128x} \end{cases}$

$$\int \sin \varphi \cos \varphi dx = 8fn^2 \int \frac{x}{t} \cdot \frac{dt}{128x} = \frac{fn^2}{16} \log t = \frac{fn^2}{16} \log (64x^2 + n^2 l^2)$$

$$\frac{Ic}{Ac} \int N_0^2 \cos \varphi v dx = -\frac{Ic}{Ac} \cdot \frac{nl}{16} \log \frac{1+n^2}{64k^2 + n^2} \quad (27)$$

(6) $\frac{\beta EIc}{GAc} \int S_0 \sin \varphi v dx$

(16)式に示す様に、

$$\frac{\beta EI_c}{GAc} \int S_0 \sin \varphi v dx = - \frac{\beta EI_c}{GAc} \int N_0 \cos \varphi v dx \tag{28}$$

以上の(23)~(28)式の値を(5)式に代入すれば水平反力Hが求められる。

$$H = \frac{\frac{l^3}{n} \left(\frac{5}{48} - \frac{1}{2} k^2 + \frac{1}{3} k^4 \right) + \left(\frac{\beta E}{G} - 1 \right) \frac{I_c}{Ac} \cdot \frac{n}{16} \log \frac{1+n^2}{64k^2+n^2}}{\frac{8}{15} f l^2 - \left(\frac{\beta E}{G} - 1 \right) \frac{I_c}{Ac} \cdot \frac{n}{4} \tan^{-1} \left(\frac{4}{n} \right) + \frac{\beta EI_c}{GAc}} \tag{29}$$

6. I_c/Ac の値。

(9)式に示す様に、近似的に、 $I_c/Ac \approx 0.185 hc^2$ である。 hc の値は、 n 及び l の値が大きくなる程大きくなるのであるが、又一方に於て、単位長当りの荷重が大きくなる程大きくなる筈である。単位長当りの荷重が大きくなるのは、主として、幅員の増大及び支間の増大による。今もし頂点に於ける断面 Ac は、水平反力の大きさに比例する大きさを必要とし、 Ac は hc^2 に比例するものと仮定すれば、水平反力は略 n に比例するのであるから、〔§8(C)参照〕 hc は \sqrt{n} に略比例する。又水平反力の影響線の面積は、略支間に比例するのであるが、〔§8(A)参照〕単位長当りの荷重も又、支間の増大により増大するのであるから、水平反力の大きさは、支間の比例以上に増大する。又 hc の値は、幅 b と関連して決定せられるのであるから、或程度自由に決定することができるわけである。

而して、長径間の橋梁にあつては、短径間のものに比して、比較的桁高の大きいものの方が経済的である。故に hc は \sqrt{n} に比例すると共に、 l にも比例する大きさをとれば、大體妥當な断面となる。即ち、

$$hc = C \sqrt{n} l$$

ここに、 C は単位長当りの荷重によつてきまる定数とする。此の単位長当りの荷重は、橋梁の幅員、支間、床の構造、活荷重の種類等によつてきまる。

$$I_c/Ac = 0.185 kc^2 = 0.185 C^2 n^{3/2} \dots \dots \tag{30}$$

C の値は大體 $1/100 \sim 1/150$ 位の大きさが普通である。

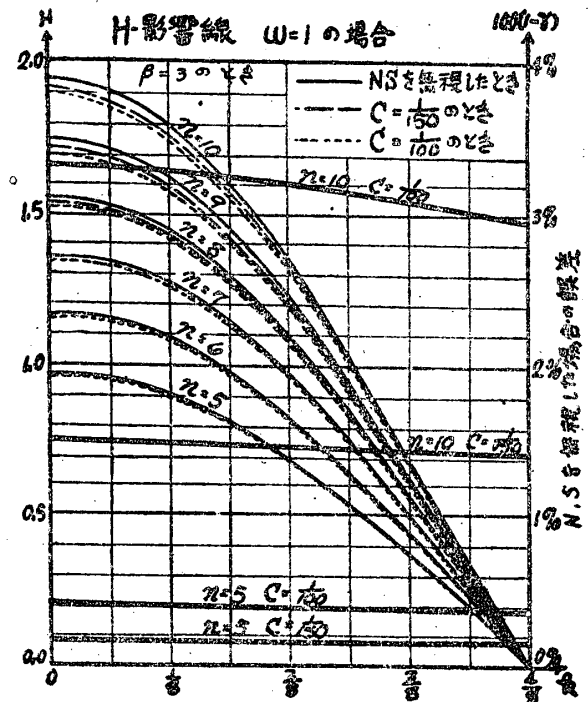
$0.185 C^2 = K$ と置けば、

$$I_c/Ac = K n^{3/2}$$

7. 各種条件の場合に於ける水平反力の影響線。

$n=5 \sim 10$, $w=1$ 及び $\mu=3$, $C=1/100$ 及び $C=1/150$ の場合に於ける水平反力の影響線を描けば、第3図及び第4図の如し。

$w=1$ の場合は、 $\mu=3$ の場合に比べて著しく頂点に於て尖つてゐる。 $\mu=2$ の場合はここに掲げることを省略したが、此中間の形をしている。 $\mu=1$ の場合は $w=1$ の場合に非常に近接している。



第3図

8. アーチの性質。

(A) 支間が変化するにつれて、水平反力は如何に変化するか。

§3に於ける各値は下の様な函数で表すことが出来る。

$$\int M_0 y w dx = f l^2 F_1(n, \mu, k)$$

$$\frac{I_c}{Ac} \int N_0 \cos \varphi \, vdx = K^3 F_2 (n, \mu, k)$$

$$\frac{\beta E I_c}{G A C} \int S_0 \sin \varphi \, vdx = K^3 F_3 (n, \mu, k)$$

$$\int y^2 w dx = f^2 F_4 (n, \mu)$$

$$\frac{I_c}{Ac} \int \cos^2 \varphi \, vdx = k^3 F_5 (n, \mu)$$

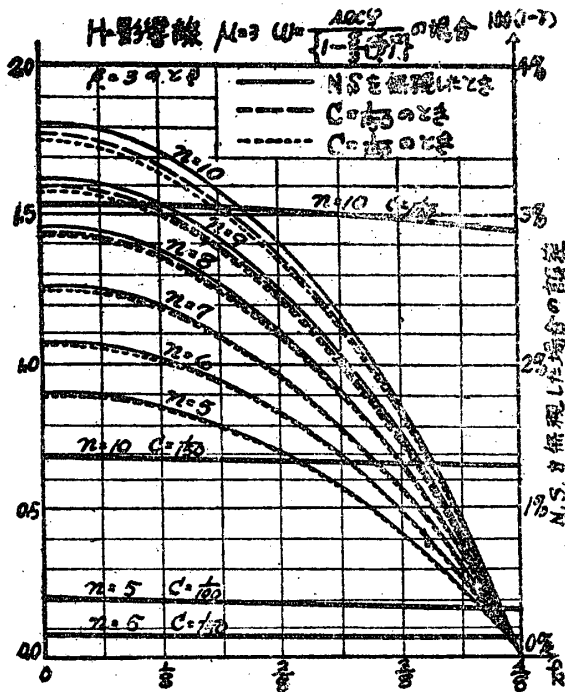
$$\frac{\beta E I_c}{G A C} \int \sin^2 \varphi \, vdx = K^3 F_6 (n, \mu)$$

以上の値を(5)式に入れば、

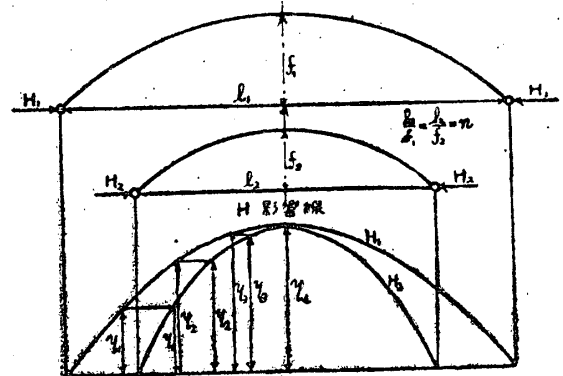
$$H = \frac{f^2 F_1 (n, \mu, k) + K^3 F_2 (n, \mu, k) + K^3 F_3 (n, \mu, k)}{f^2 F_4 (n, \mu) + K^3 F_5 (n, \mu) + K^3 F_6 (n, \mu)}$$

$$= \frac{n F_1 (n, \mu, k) + K n^2 F_2 (n, \mu, k) + K n^2 F_3 (n, \mu, k)}{F^4 (n, \mu) + K n^2 F_5 (n, \mu) + K n^2 F_6 (n, \mu)} = F(n, \mu, k) \quad (31)$$

即ち、 n, μ 及び C が決定せられれば、水平反力の影響線は、支間の大小にかかわらず、 k の各値に対して同一である。即ち第5図に示す通りであつて、その面積は支間に比例する。



第4図



第5図

(B) 直応力及び剪断応力の影響を無視すれば、水平反力に幾何の誤差を生ずるか。水平反力の(5)式は下の形に書きかえることが出来る。

$$H = \frac{\int M_0 y w dx}{\int y^2 w dx} \cdot \frac{1 + \frac{\frac{I_c}{Ac} \int N_0 \cos \varphi \, vdx + \frac{\beta E I_c}{G A C} \int S_0 \sin \varphi \, vdx}{\int M_0 y w dx}}{1 + \frac{\frac{I_c}{Ac} \int \cos^2 \varphi \, vdx + \frac{\beta E I_c}{G A C} \int \sin^2 \varphi \, dx}{\int y^2 w dx}} = \frac{\int M_0 y w dx}{\int y^2 w dx} r \quad (32)$$

r が直応力及び剪断応力の影響を示す係数であるが、 n の値が小さい場合には極めて小さいが、 n の値が大きくなるにつれて急激に大きくなる。 C の値が大きい場合、換言すれば断面の大きいアーチに於ては、更に大きくなる。

今 r の値を下の形であらわし、

$$r = \frac{1+X}{1+Y} = 1 - \frac{Y-X}{1+Y}$$

この差を百分比を以て表せば、

$$100 \frac{Y-X}{1+Y} = e \% \quad (33)$$

今 $p=0.95, q=0.98$ の場合に就て、 e の價を求め之を図示すれば、第6図の様になる。 p 及び q の價を変えれば、更に変つて来る。又同図で分る様に $w=1, \mu=1, \mu=2, \mu=3$ の四つの場合の曲線は略一致している。換言すれば、両支点と頂点との間に相当大きい断面の変化があつても、 e の價には大した差異はないのであつて、我々は $w=1$ の場合の e の價を以てあらゆる場合に適用しても、實際上差支ないのであ

る。然し C の價が変れば、即ち頂点に於ける断面が変化すれば、相当大きく変化する。又第3図及び第4図に於て分る様に、 $\xi/l=k$ の各價に對し、 e の價は殆んど一定と考えて差支ない程度の変化を示すに過ぎない。即ち e の價、從つて r の價は一定と考えて差支なく、その價は、 $w=1, k=0$ の場合の價を採用して差支ない。即ち

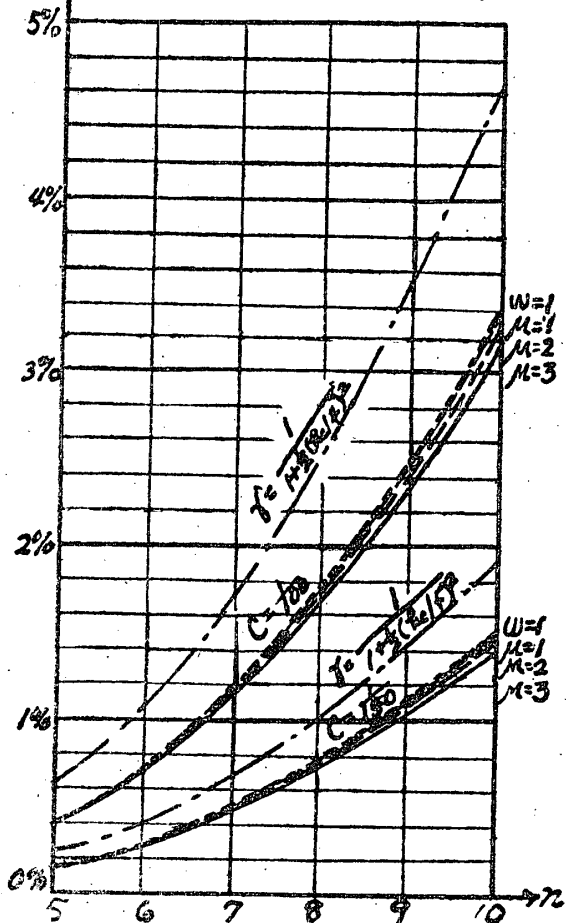
$$X = \frac{\frac{I_c}{Ac} \int N_0 \cos \varphi v dx + \frac{\beta E I_c}{G A c} \int S_0 \sin \varphi v dx}{\int M_0 y w dx} = \frac{\left(\beta \frac{E}{G} - 1\right) 0.185 C^2 n l^2 \cdot \frac{n l}{16} \log \frac{16+n^2}{64 k^2 + n^2}}{\frac{l^3}{n} \left(\frac{5}{48} - \frac{1}{2} k^2 + \frac{1}{3} k^4\right)}$$

$$= 0.111 (2.592 \beta - 1) C^2 n^2 \log \frac{16+n^2}{n^2}$$

$$Y = \frac{\frac{I_c}{Ac} \int \cos^2 \varphi v dx + \frac{\beta E I_c}{G A c} \int \sin^2 \varphi dx}{\int y^2 w dx} = \frac{\frac{I_c}{Ac} \cdot \frac{n l}{4} \tan^{-1} \left(\frac{4}{n}\right) + \frac{\beta E I_c l}{G A c} \left\{1 - \frac{n}{4} \tan^{-1} \left(\frac{4}{n}\right)\right\}}{\frac{8}{15} f^2 l}$$

$$= C^2 n^3 \left\{0.899 \beta - 0.0867 n (2.592 \beta - 1) \tan^{-1} \left(\frac{4}{n}\right)\right\}$$

100(1-r) の各価に對する 100(1-r) の価



第6図

$$r = \frac{1 + 0.111(2.592\beta - 1)C^2 n^2 \log \frac{26+n^2}{n^2}}{1 + C^2 n^3 \left\{0.899\beta - 0.0867n(2.592\beta - 1) \tan^{-1} \left(\frac{4}{n}\right)\right\}} \quad (34)$$

r の價は上式で與えられる。

一般に

$$r = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{hc}{r}\right)^2} \text{ の式に用いられるが、}$$

之を(34)式の價と比較すれば、第6図の様に、相當の誤差を生ずる。

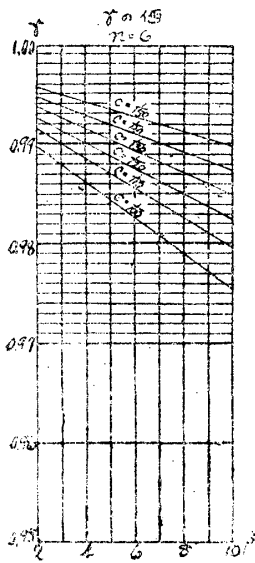
(34)式の r の價を、 β, C , 及び n の各價に對して求むれば、第7図1~6の様になる。

(C) 支間と拱矢との比と水平反力との關係。

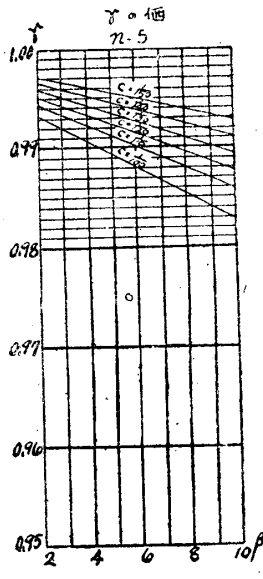
n の價が増大するにつれて、 H の價も又増大するのであるが、其間に如何なる關係があるか調べて見るに、 $w=1$ の場合は、

$$H = \frac{\frac{l^3}{n} \left\{\frac{5}{48} - \frac{1}{2} k^2 + \frac{1}{3} k^4\right\}}{\frac{8}{15} f^2 l}$$

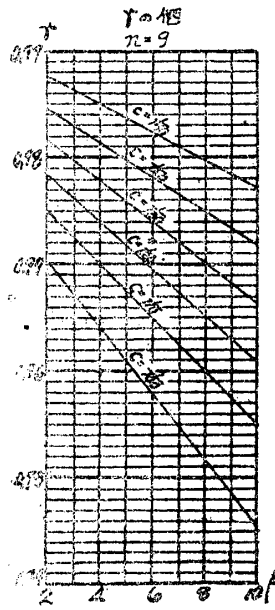
$$= \frac{15}{8} n \left\{\frac{5}{48} - \frac{1}{2} k^2 + \frac{1}{3} k^4\right\} r \quad (35)$$



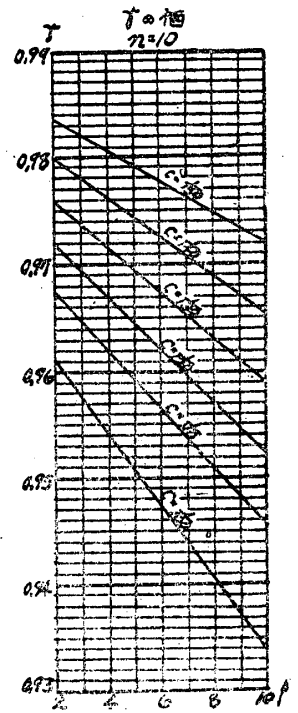
第7図1



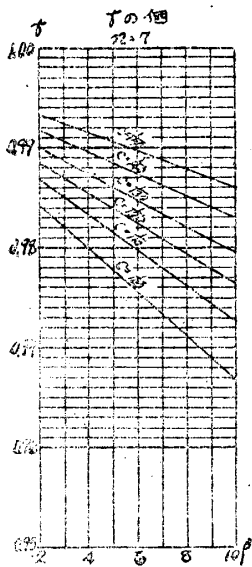
第7図2



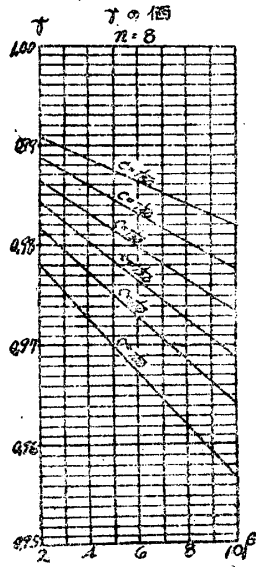
第7図5



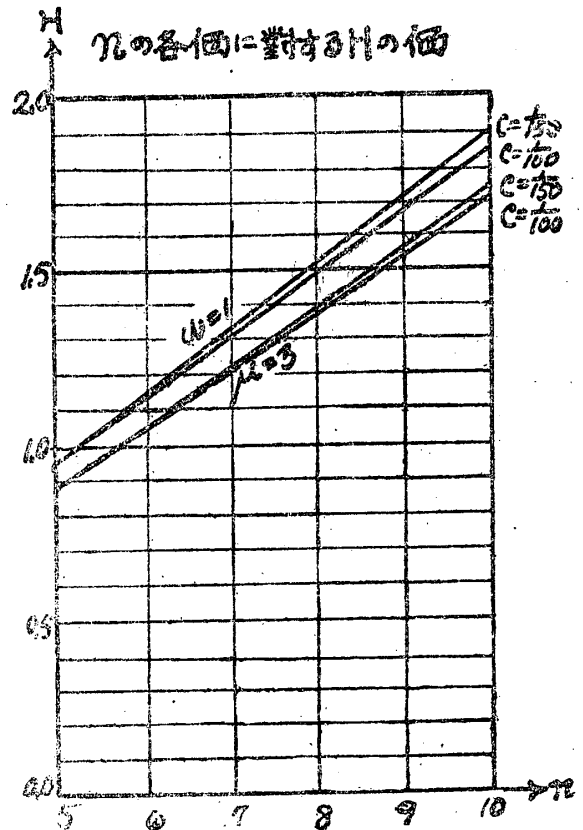
第7図6



第7図3



第7図4



第8図

○ 此中 γ の値は既述の様に、略定数と考へて差支ない。そうすれば、 H は n に比例する。一般の場合に於ては、(32) 式に示す様に

$$H = \frac{\int M_0 y w dx}{\int y^2 w dx} \gamma = \frac{f_2^2 F_1(n, \mu, k)}{f_2 F_4(n, \mu)} \gamma$$

$$= n \cdot \frac{F_1(n, \mu, k)}{F_4(n, \mu)} \gamma$$

上式の様になつて、厳密に言へば H は n に比例しないのであるが、断面を変化せしめて実際に計算してみれば、第8図に示す様に、 H は略 n に比例するものとして事實上差支ないので

ある。

(D) 支点より頂点に至る断面の変化と水平反力との関係。

均等断面のアーチ即ち $\mu = 1$ の場合に於て

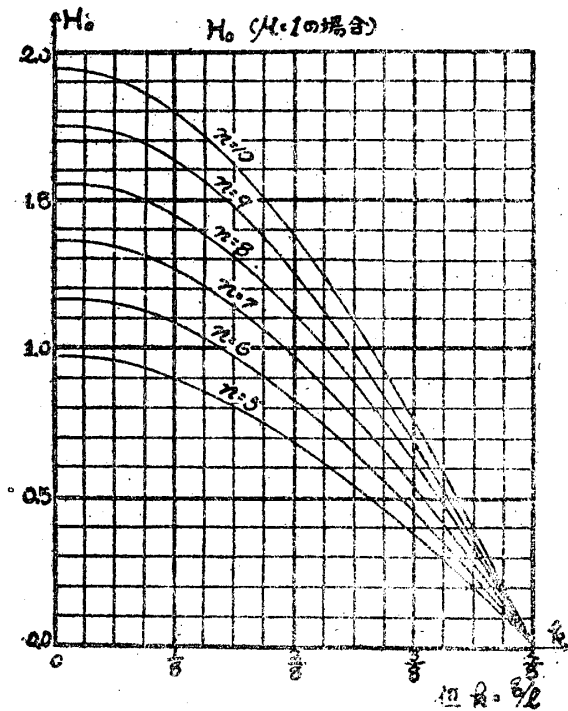
は、§ 4 に計算した様に、水平反力の影響線は
 γ の式で表される。

$$H = \frac{f l^2 \left[\left(\frac{5}{48} + \frac{1}{10n^2} - \frac{4}{15n^4} \right) - \left\{ 2k^2 - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{8}{n^2} \right) k^4 - \frac{64}{15} \left(\frac{4}{n^4} + \frac{1}{n^2} \right) k^6 \right\} \right]}{\frac{8}{15} f l^2 \left(1 + \frac{8}{7n^2} - \frac{32}{21n^4} \right)} \gamma$$

$$= \frac{21n}{128} \cdot \frac{\left[(25n^4 + 24n^2 - 64) - 120n^4 k^2 + (80n^4 - 640n^2) k^4 + (4096 + 1024n^2) k^6 \right]}{21n^4 + 24n^2 - 32} \gamma \quad (36)$$

今直応力及び剪断応力の影響を無視した場合の價、即ち $\gamma=1$ の場合の價を H_0 として、其の影響線を求めれば、第9図の様になる。

次に、断面に変化があるアーチに就て、 H_0 の價を求めれば第10図の様になる。即ち両支点部に比べて頂点部の断面の大きいもの程、中央部は下り、両側部はふくれる。そうして支間の四分の一点附近で皆一致する。今均等断面即ち $\mu=1$ の場合と比較してその差を表せば第(11)図の様になる。

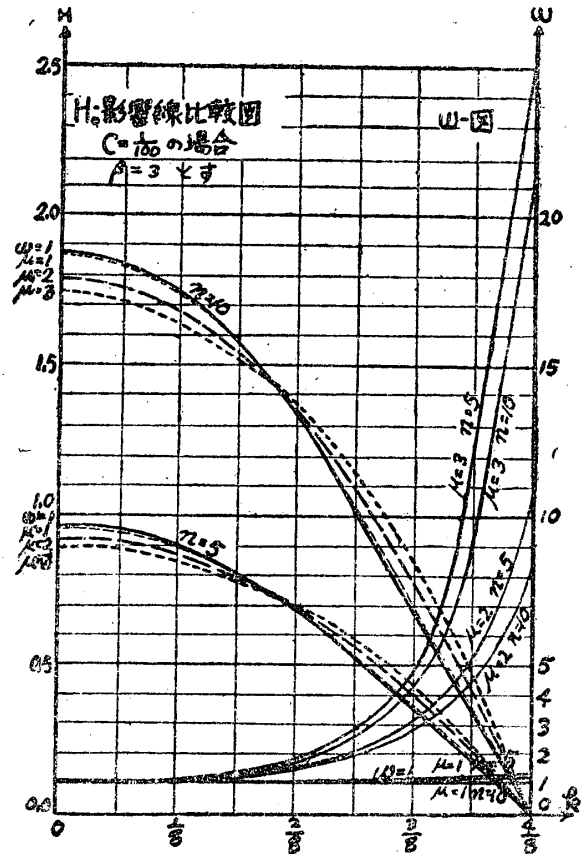


第9図

即ち、第10図に示す様に、両支点部と頂点との間に断面の変化がある場合に於ては、 w の

$$H' = \frac{8n}{10000} (2k^2 + 3) (4k^2 - 1) (20k^2 - 1) \sqrt{(2\mu - 2)(\mu + 6)} \quad (37)$$

この H' の價を實際の價と比較すれば、第11図に示す様に、殆んど一致しその誤差は極めて微小である。 n 及び μ の各價に対する H' の價



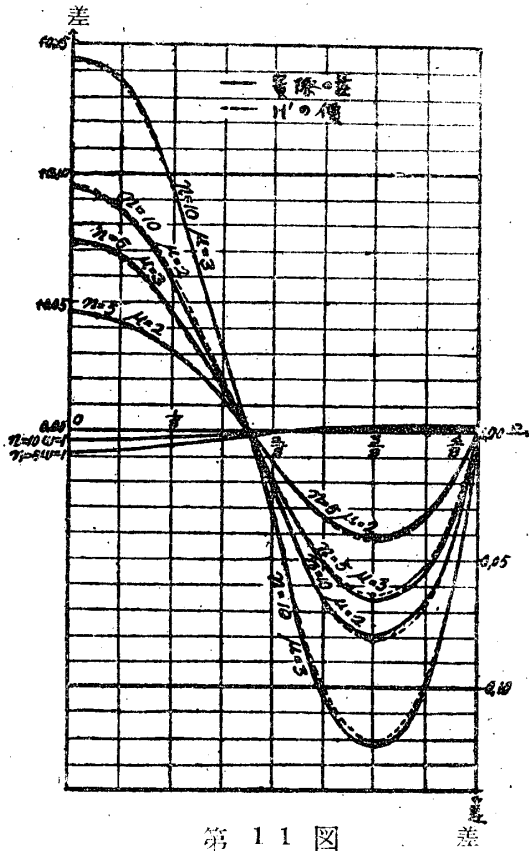
第10図

変化は著しく大きくなる。 $\mu=3$ の場合には30倍にも達する。然し水平反力の影響線に於ては、其差はあまり大きくないのであつて、中央に於て精々10%以下である。

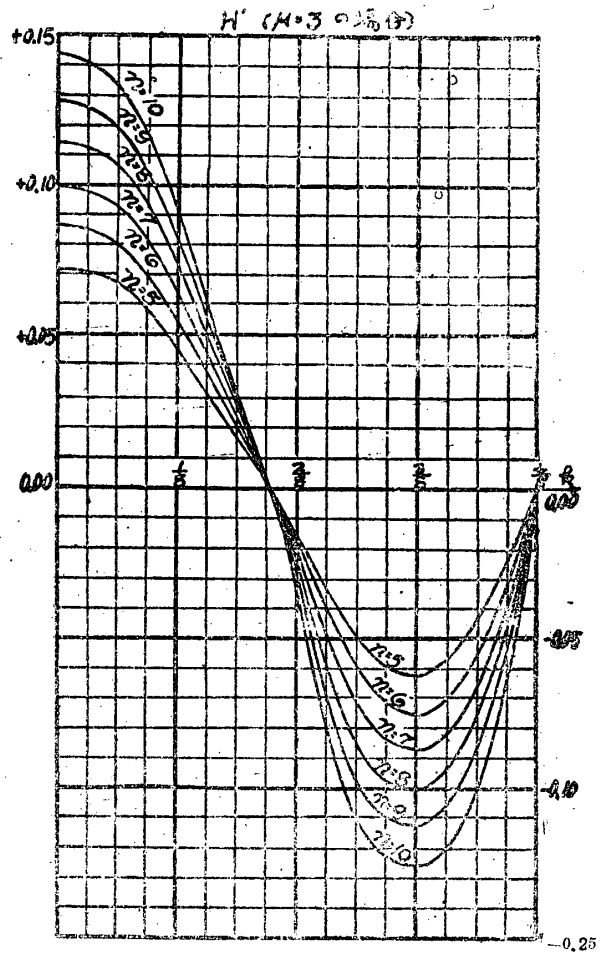
この差を正確な数式を以て表すことは、非常に複雑になつて、到底實用に適しない。それ故に之を近似値を以て表すこととし、之を H' を以て表せば、

を求めれば、第12図1~2の如し。 μ の種々の價に対して同様な曲線があるのであるが、ここには μ が2及び3の場合をかかげ他を省略

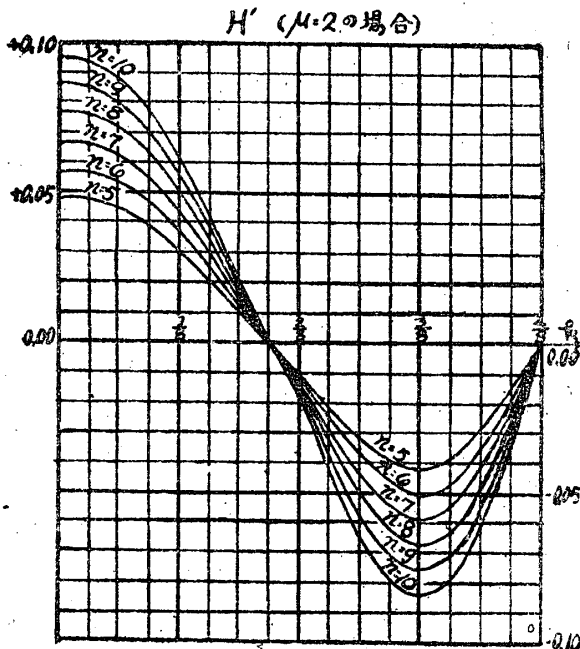
均等断面の場合に対する不均等断面の場合のHの差
(但N及Sの影響を無視した場合)



第11図



第12図2



第12図1

した。

9. 結論

二鉸プレートガーダーアーチの水平反力の影響線を求めるには下の如くすればよい。

(a) 均等断面の場合

第9図よりH₀の影響線を求める。nの値が整数

でない場合は、此等の曲線の中に比例的に曲線を入れて之を以てH₀の影響線とする。次に第7図よりrの値を求め、之をH₀にかける。即ち

$$H = H_0 r \tag{38}$$

これ即ち求める水平反力の影響線である。但しrを求める際に、βの値は第1表より求め、Cの値は橋梁の幅員支間活荷重等を考慮して適当に仮定して計算しあとで実際に採用した断面に合せて訂正する。

(b) 不均等断面の場合

前の場合と同様にまづ第9図よりH₀を求め、次に第12図よりH'を求める。更に第7図よりrの値を求める。そうすれば求むる水平反力の影響線下の如し。

$$H = (H_0 - H') r \tag{39}$$

上述の様にして求めれば、その計算が非常に迅速容易であり、而も非常に正確であつて、その誤差は極めて僅小である。その上誤算を生ずることが殆んどない。今後に於けるプレートガーダーアーチの設計計算にはすべてこの方法が用いられることを提唱する。

終り