

浸透性壁面を有する平板内の流れについて

(層流の場合)

深 田 三 夫*

Flow of Viscous Fluid through Permeable Parallel Wall

Mitsuo FUKADA

Abstract

In this paper, the rectilinear flow of a viscous fluid through a two-dimensional parallel channel formed by an impermeable upper wall ($y=H$) and a permeable lower wall ($y=0$) was reported. velocity profile in both the channel and the permeable material was obtained, postulating that the slip velocity at the permeable interface differ from the mean filter velocity within the permeable material and that shear effects are transmitted into the body of the material through a boundary-layer region.

Experimental values of the mass efflux of a flow over permeable wall was enhanced over the value it would have of the wall were permeable, but that of a flow in the sand fell the value estimated by Darcy's law.

1. ま え が き

管路の壁面が浸透性を有する場合、同じ圧力勾配で同じ通水断面積を持つ時に、不透水壁面の場合よりも流量が増える。Joseph, Beavers¹⁾ は図1に示すような一面が透水体で構成された平行な平板内の層流流れを扱い、浸透層との境界面において slip 速度の概念を導入し、平板内の流量増加を示した。この考え方によれば、境界面を通して運動量の伝播が行なわれ、境

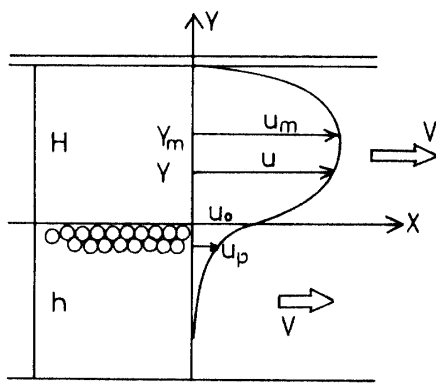


Fig. 1 Schematic view of velocity profile.

界面近傍の浸透層内において急激な速度の変化があるはずであり、層内の流量増加もあわせてひき起こす。一方層内の流れはそのほとんどの領域において Darcy 則に従う流れと考えられるが、上述のことで境界面近傍においては成り立たない。本報告では Slattery の考えに従い拡張された Darcy 則を用いることにより、境界近傍の²⁾速度分布を示し、層内の流量の増加量を求めた。また浸透層に自然砂を用い実験を行ない圧力～流量関係を求め、理論値との比較を行なった。

2. 流れを表わす方程式

2-1 主流域の場合

流体は Newton 流体で非圧縮性であると仮定し、流れは二次元で定常であるとする。すなわち図1の座標系において

$$u=u(y), \quad v=w=0 \quad (1)$$

この時 Navier-Stokes の方程式は

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu d^2u/dy^2 \quad (2)$$

μ : 粘性係数

Joseph らは浸透層との境界面において slip 速度の概

* 土木工学科

念を導入し、次の境界条件を与えた。

$$du/dy = \alpha/\sqrt{k}(v_B - v_S): \text{ at } y=0 \quad (3)$$

ここで α は境界面での浸透層の形状に関係する定数であり、 v_B は slip 速度、 v_S は主流が存在しない場合の断面平均流速で、

$$v_S = -k/\mu(dp/dx) = k'I \quad (4)$$

$$k' = k\rho g/\mu \quad I = -d(p/\rho g)/dx$$

よく知られている Darcy 則である。境界条件 $y=H$, $u=0$ と (3) により主流の流速分布が求まる。

$$u = 1/2\mu \times dp/dx \times (y^2 - H^2) + \alpha/\sqrt{k}(v_B - v_S)(y - H) \quad (5)$$

$$\text{or } u/v_S = 1/2 \times \sigma^2 \times (1 - y^2/H^2) - \alpha\sigma(f-1)(1 - y/H)$$

$$\text{ここで } \sigma = h/\sqrt{k} \quad f = v_B/v_S$$

よって境界面での slip 速度は

$$u_B = -k/2\mu \times (\sigma^2 + 2\alpha\sigma)/(1 + \alpha\sigma) \times dp/dx \quad (6)$$

で表わされる。 u_B は境界面の形状、および H/\sqrt{k} に依存していることがわかる一方断面内平均流量は

$$Q = \int_0^H u dy = -H^3/12\mu \times \frac{dp}{dx} - H^3/4\mu\sigma \times (\sigma + 2\alpha)/(1 + \alpha\sigma) \times \frac{dp}{dx} = gH^3I/12\nu + gH^3I/12\nu \times (\sigma + 2\alpha)/\sigma(1 + \alpha\sigma) \quad (7)$$

第一項は不透水性壁面内の Poiseuille flow の場合の流量であって、第二項は slip 速度による流量の増加分である。

2-2 浸透層の場合

浸透層内の流れは層の構成体そのものの形が非常に複雑なため、Navier-Stokes の方程式の一般解を求めることは不可能に近く、しかも実用的にも意味のないことである。通常浸透層内の問題には流れの巨視的な量すなわち、断面平均流速～圧力勾配の間のよく知られた実験的事実、Darcy 則を用いている。J. C. Slattery は局所平均 (local volume averaging) の考え方をを用い浸透層内の流れを表わす一般式を与えた。Slattery が与えた式は文献2), 3)に詳しいが、ここでは、この式を今考えている問題に適用してみる。2-1での仮定をこの場合にも使うと

$$u \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} - \mu/l_0^2 k_0^* \times \bar{v} = -\rho g I \quad (8)$$

ここで \bar{v} は局所平均 $\bar{v} = 1/V \int_{V(S)} u dV$ を表わし、 l_0 : 浸透層構成体の代表的長さ (例えば粒径) k_0^* : 無次元量 (Darcy 則と比較すると $l_0^2 k_0^* \approx k$)、いま浸透層の厚さを H_0 とし境界条件 $y=0$, $\bar{v}=0$, $y=H_0$, $\bar{v}=\bar{v}_B$ のもとで (8) を解くと次の解を得る。

$$u^* = \bar{u}/(gIk/\nu) = 1 - (\sinh H_0/\sqrt{k} \times (1 - y^*)/\sinh H/\sqrt{k} + \sinh H/\sqrt{k} y^*/\sinh H/\sqrt{k}) + v_B/(gIk/\nu) \times \sinh H/\sqrt{k} y^*/\sinh H/\sqrt{k} \quad (9)$$

$$y^* = y/H$$

境界面近傍での挙動をみると $y/H \sim \epsilon$ では

$$u^* = 1 - \sinh H/\sqrt{k} (1 - \epsilon)/\sinh H/\sqrt{k} = 1 - e^{-\epsilon H/\sqrt{k}} \quad (9')$$

$y/H \sim 1 - \epsilon$ では

$$u^* = 1 + (v_B/(gIk/\nu) - 1) \sinh H/\sqrt{k} (1 - \epsilon)/\sinh H/\sqrt{k} \approx 1 + (v_B/(gIk/\nu) - 1) e^{-H/\sqrt{k}\epsilon} = 1 + (f-1) e^{-H/\sqrt{k}\epsilon} \quad (9'')$$

となり slip 速度の大きさによって浸透層内の速度分布も変化を受けることがわかる。断面内平均流量を求めると

$$Q \doteq \int_0^{y'} v_S dy + \int_{y'}^{H_0} v_S \{1 + (f-1) e^{-H/\sqrt{k}\epsilon}\} dy$$

$$\text{or } Q^* = Q/v_S$$

$$= \int_0^{y^{*'}} dy^* + \int_{y^{*'}}^1 \{1 + (f-1) e^{-H/\sqrt{k}(1-y^*)}\} dy^* = 1 + \sqrt{k}/H(f-1)(1 - e^{-H/\sqrt{k}(1-y^{*'})}) \quad (10)$$

ここで $y^{*'}$ は (9') において $u^* = 1.1$ となる点を選んだ。(10)式の第2項が slip 速度の存在による流量の増加分である。

2-3 解析結果

(5) (9') によって主流及び浸透層内の流速分布が明らかになった。slip 速度は浸透層の透水率 k 、平板間隔 H より表わされる無次元量 H/\sqrt{k} と境界面での浸透層の形状によって定まってくる無次元量 α によって決まり主流及び浸透層の流速分布もそれに従って決まってくることになる。いままでのところ α は実験により定めなければならないが、ここでは、Joseph らが例として示しているように $\alpha = 0.1$ として

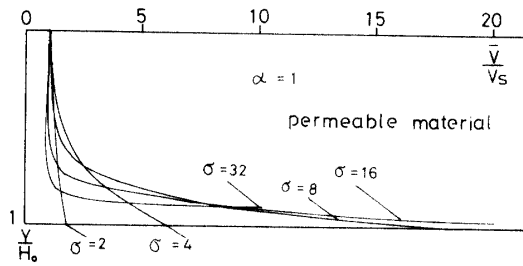


Fig. 2

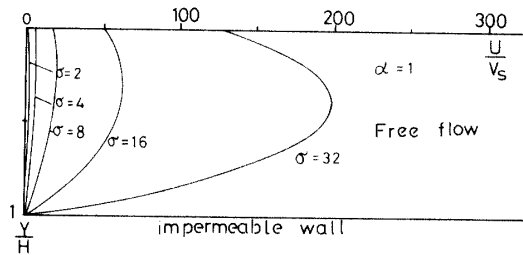


Fig. 3 Velocity profile in a channel and in a permeable material.

流速分布形を求めてみた。この結果で興味をひくのは浸透層内の流速分布で h/\sqrt{k} の増加と共に層内の流速分布は境界面近傍に限られ、しかも速度勾配は急激に増加していくことがわかる。

3. 実験装置及びその方法について

実験は図4に示すような装置で行ない、浸透層として平均粒径 $D_p=0.186\text{ cm}$, $D_p=0.620\text{ cm}$ の砂層を用いた。流れの対象が層流であるため、平均流速分布を求めることはできず、流量～圧力勾配を測定した。流れを二次元に保つため、下流端で浸透層内、および主流部の圧力水頭を一定に保った。下流端で分離された流れはそれぞれ重量を計り流量とした。圧力勾配は管径 40mm のマンオメーターに導き、読み取り顕微鏡にて読んだ。また層内の流体の挙動を色素 (KMnO_4) を注入し調べた。

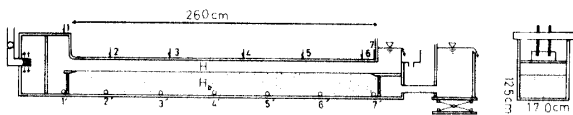


Fig. 4 Outline of experimental arrangement.

4. 測定結果について

4-1 主流部及び層内の流れ方向圧力分布について

図5に圧力分布の一例を示す。これは $D_p=0.62\text{ cm}$ の場合で $H=1.15\text{ cm}$ である。上下流端の圧力を用い

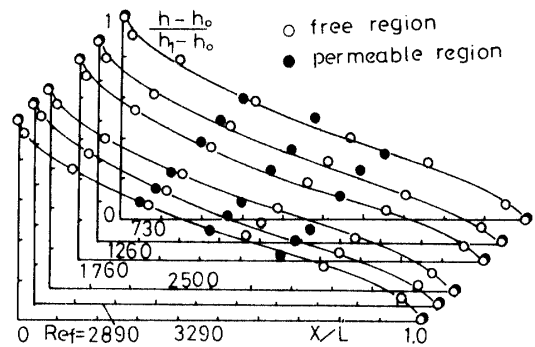


Fig. 5 Static pressure distributions in a channel and in a permeable material.

て正規化を行なっている。分布が示すように上下流端付近は直線分布をしていない。これは流れが完全に発達していないことを示すものであるが、入口付近の変化はすきま H の大きいほど大きく、また同じ開口度でも粗度のない滑面の方が大きいことが実験より示されている。上下流端付近をのぞいた測定値を用い平均圧力勾配とし以下の解析に用いた。

4-2 浸透層内の圧力～流量特性について

図6に $D_p=0.186\text{ cm}$ の場合のすきま幅 H を3通り変えて実験を行なった結果を示す。図6-1は主流部の圧力～流量関係を、図6-2は浸透層内の圧力～流量関係を示す。(10)式が示すように層内の流量は H/\sqrt{k} の

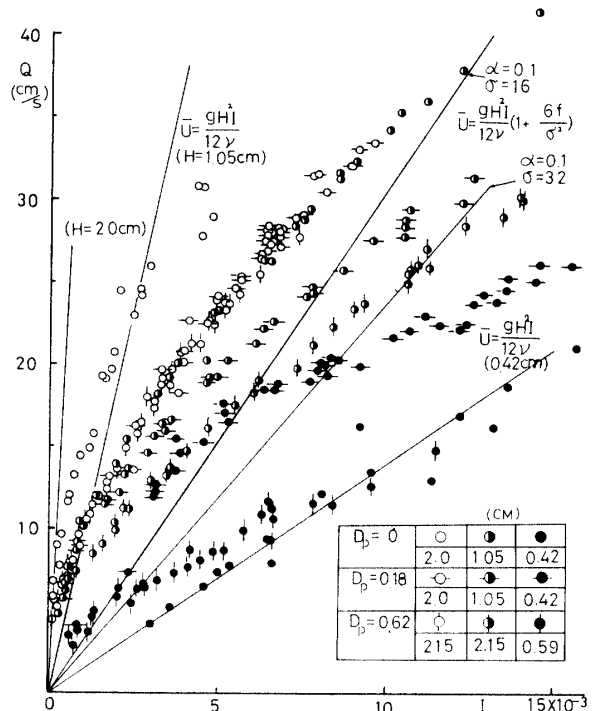


Fig. 6-1 Relationship between the mass efflux through the plate and the static pressure gradient.

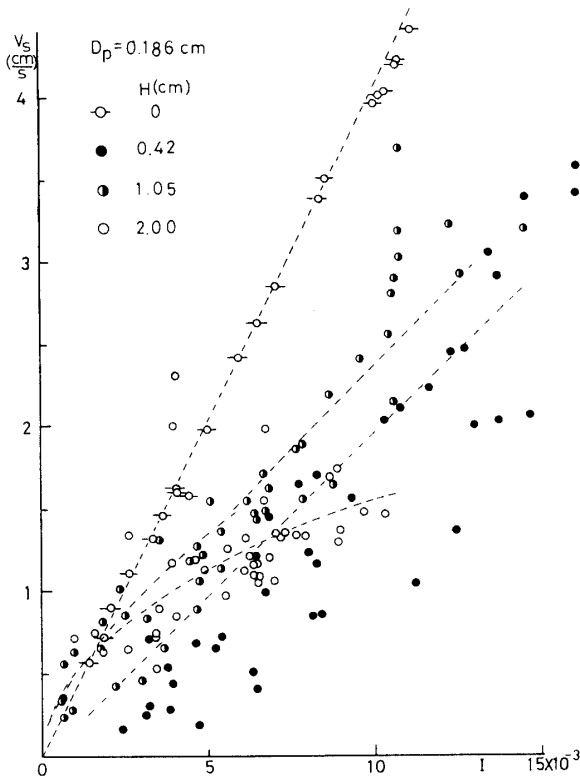


Fig. 6-2 Relationship between the mass efflux through the permeable layer and the static pressure gradient.

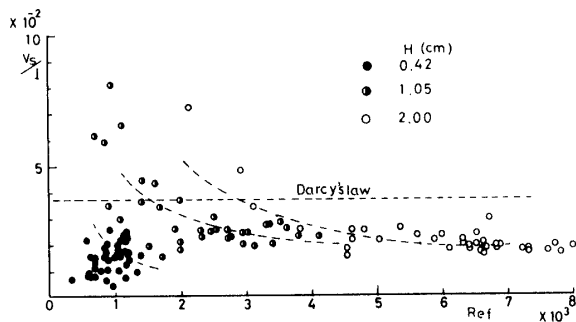


Fig. 6-3 Relationship between the permeability (V_s/I) and Reynolds number in the free flow. (Ref)

大ききにもよるが增加する。ところが、ほとんどの場合に主流部が存在しない時に比較して減っている。これは、(10)式とは全く異なることであるが、圧力勾配が小さい時には(10)式が示すように流量は増加しているように思える。このことを、主流部の Re 数 ($Re_f = \bar{u}H/\nu$) との関係で考えてみる。図6-3は Re_f と V_s/I の関係を示す。 v_s/I は通常透水係数として用いられている量であるが、主流の存在によってその Re_f 数の

増加と共に減少する傾向となっているが主流域が層流と考えられる $Re_f = 1000$ 以下では逆に飽和透水率 (この場合は 3.9×10^{-2} cm/sec) より大きくなっている。このことは(10)式が示すとおりである。

4-3 主流部の圧力～流量特性について

図中には不透水壁面の場合についての実験結果も同時に示されている。流れが層流と考えられる範囲においては Hagen-Poiseuille の平均流速公式に一致した実験結果が得られているが、一面が浸透性の場合には同じ圧力勾配のもとでは主流の流量が増加している。しかし、すきま幅 H が 1.05 cm, 2.00 cm の場合は実験のほとんどの範囲内において流れは乱流と考えられ流量は不透水性壁面の場合より減っている。

5. おわりに

理論解と実測値との比較はいまの段階では次のことにより困難である。

(1) 浸透層の形状に関する定数 α は、境界面での slip 速度 v_s と境界面での速度勾配が求められなければならないが微流速なため測定方法及び精度に関する問題点、今回考察した流れは主流域、浸透層内とも層流であるが、層流～乱流、あるいは共に乱流場の場合の解析が今後の課題となった。特に浸透層が層流、主流部が乱流の場合にはここで示された slip 速度の考え方が妥当かどうか疑問である。このことは実験事実 (図6-2, 6-3) より明らかである。すなわち主流の存在によってかえって浸透層の流量が減っている。この事実は流れが二次元的でなく、境界面上になんらかの力により層内の流体が主流部へ流入するということから説明はつくのであるがその定量的評価は今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) G. S. Beuners and D. D. Joseph, Boundary conditions at a naturally permeable wall. J. Fluid Mech., **36**, 17-19 (1969).
- 2) J. C. Slattery. Single-phase Flow through Porous Media. AIChE **15**, 866-872 (1969).
- 3) J. C. Slattery. Momentum, Energy, and Mass Transfer in Continua. McGraw-Hill (1970) p. 203

(昭和58年4月15日 受理)