

# 連行した従動荷重を受ける梁の動的弾性安定解析

——初期応力を考慮した場合——

會田 忠義\*・中山 高明\*\*・平井 利典\*\*

Analysis of Dynamic Elastic Stability of Beams under Travelling Vertical Follower Load Systems by the Linearized Finite Displacement Theory

Tadayoshi AIDA, Takaaki NAKAYAMA and Toshifumi HIRAI

## Abstract

Dynamic stability of flexible beams, of which the deformation is comparatively large, under travelling vertical follower load systems is investigated by applying the fundamental equation, governing the dynamic elastic stability, which is derived by using the linearized finite displacement theory. Firstly, it is shown that the fundamental equation of beams under the above travelling load systems becomes Hill's equation and that parametrically excited unstable coupled vibration occurs. The boundary frequency equations of simple parametric resonance are obtained by Bolotin's method and stability maps of a simply supported beam are given, with account taken of the effects of load mass and damping. Lastly, the behaviors of vibration of the beam in the vicinity of boundary of a main unstable region are estimated by numerical integration.

## 1. まえがき

梁上を走行する鉛直の一定方向力を受ける梁の動的応答に関する研究は、極めて多くのものがあり<sup>1) 2)</sup>、等間隔の一連の一定方向力が梁上を走行する場合、動的不安定現象が発生することも発表されている<sup>3)</sup>。上記の問題で、荷重が従動力である場合、梁の動的安定性には興味深いものがある。筆者らは、梁の変形が小さい場合について、単一鉛直従動荷重による梁の動的挙動<sup>4)</sup>、連行する鉛直従動荷重による梁の安定性<sup>5)</sup> および連行する水平横従動荷重による梁の安定性<sup>6)</sup> の研究を行ってきた。

本研究は、梁の変形が比較的大きい場合について、弾性安定問題の基礎方程式を適用し、連行する鉛直従動荷重による梁の安定性を明らかにするものである。荷重は、梁のねじれ回転に対してのみその作用方向を変える従動力であるとする。この場合、基礎方程式は Hill 方程式になることを示し、係数励振不安定振動領域、特に、単純パラメトリック共振領域の境界振動数

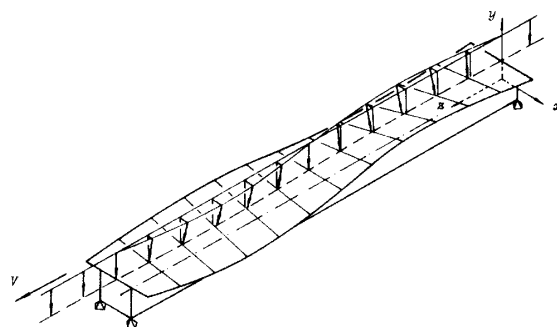


Fig. 1 Beam under travelling follower load system.

方程式を Bolotin の方法<sup>3)</sup> で求め、単純梁の安定性を示す。さらに、主領域の境界における振動挙動を数値積分により明らかにする。

## 2. 動的弾性安定問題の基礎方程式

Fig. 2 に示すように、薄肉断面の重心  $G$  に原点を置く直角座標を設け、 $x$  および  $y$  軸を断面主軸に、 $z$  軸を梁軸に一致させる。せん断中心  $S$  の変位を  $(u_s, v_s, w_s)$ 、重心の変位を  $(u_G, v_G, w_G)$  およびねじり角を  $\theta$  とする。

荷重は、断面内の点  $(e_x, e_y)$  に作用する従動荷重  $q_s^N$

\* 建設工学科

\*\* 大学院土木工学専攻

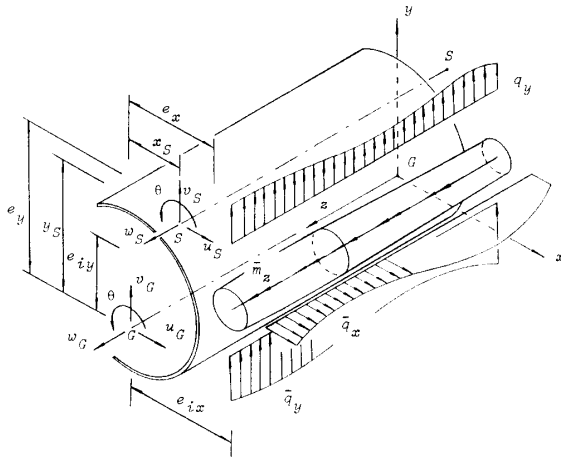


Fig. 2 Displacements and loads of beam and system of coordinates.

と、点  $(e_{ix}, e_{iy})$  に作用する一定方向力  $q_y^c$  (ここでは荷重重量) を考える。解析に当り、梁断面の回転慣性を無視し、変位速度に比例する減衰力を考慮する。このとき、基礎方程式は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
 & m \left( \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} + y_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) + \eta_u \frac{\partial u_s}{\partial t} + EI_{xx} \frac{\partial^4 u_s}{\partial z^4} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M_x^0 \theta) \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( M_z^0 \frac{\partial v_s}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( M_z^0 \frac{\partial^2 v_s}{\partial z^2} \right) + q_y^N \theta - \bar{q}_x = 0 \\
 & m \left( \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} - x_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) + \eta_v \frac{\partial v_s}{\partial t} + EI_{yy} \frac{\partial^4 v_s}{\partial z^4} \\
 & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( M_z^0 \frac{\partial u_s}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( M_z^0 \frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} \right) - \bar{q}_y = 0 \\
 & \mu I_{ps} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + m \left( y_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - x_s \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} \right) + \eta_\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} + EI_\omega^0 \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} \\
 & - GK \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left( M_x^0 \beta_y + M_\omega^0 \beta_\omega \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right\} + M_x^0 \frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} \\
 & - \frac{\partial}{\partial z} \left( Q_y^0 \beta_y - M_z^0 \beta_\omega \right) \theta - q_y^N (e_y - y_s) - \bar{m}_z \\
 & + \bar{q}_x (e_{iy} - y_s) - \bar{q}_y (e_{ix} - x_s) = 0 \quad \dots\dots (2.1)
 \end{aligned}$$

ここで、

- $m$  : 梁の単位長さ質量,
- $\mu I_{ps}$  : 梁断面のせん断中心に関する質量の慣性モーメント,
- $EI_{xx}, EI_{yy}$  :  $y$  軸および  $x$  軸に関する曲げ剛性,
- $GK$  : ねじり剛性,
- $EI_\omega^0$  : 曲げねじり剛性,
- $\beta_y = -y_s + \frac{1}{2I_{yy}} \left( \int_A y^3 dA + \int_A x^2 y dA \right)$
- $\beta_\omega = \frac{1}{2I_\omega^0} \left( \int_A x^2 \omega_s dA + \int_A y^2 \omega_s dA \right)$

- $\omega_s$  : 断面のせん断中心に関する規準化されたサンプナンのそり関数
- $Q_y^0$  : 断面のせん断中心に作用する  $y$  方向の初期せん断力
- $M_x^0$  : 断面の  $x$  軸に関する初期曲げモーメント
- $M_z^0$  : 断面のせん断中心に関する初期ねじりモーメント
- $M_\omega^0$  : 断面のせん断中心に関する初期そりモーメント
- $M_z^{\omega 0} = -dM_\omega^0/dz$

これらの初期断面力は、従動荷重  $q_y^N$  および一定方向荷重  $q_y^c$  による断面力の和で、次式で表わされる。式中、上付き添字  $N$  および  $C$  をもつ値は、それぞれ  $q_y^N$  および  $q_y^c$  による断面力を表わす。

$$\begin{aligned}
 Q_y^0 &= Q_y^{0C} + Q_y^{0N} \\
 M_x^0 &= M_x^{0C} + M_x^{0N} \\
 M_z^0 &= M_z^{0C} + M_z^{0N} \\
 M_\omega^0 &= M_\omega^{0C} + M_\omega^{0N} \\
 M_z^{\omega 0} &= M_z^{\omega 0C} + M_z^{\omega 0N} \quad \dots\dots (2.2)
 \end{aligned}$$

$\eta_u, \eta_v$  および  $\eta_\theta$  : せん断中心の水平、鉛直および回転変位速度に対する減衰係数  
 $\bar{q}_x, \bar{q}_y$  および  $\bar{m}_z$  : 荷重質量による付加慣性力およびモーメント (Fig. 3 参照)

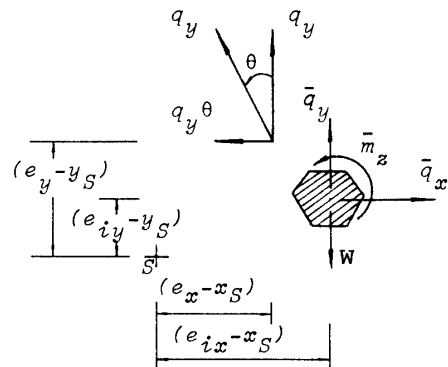


Fig. 3 Follower load and additional inertia forces of load mass.

ここでは、初期断面力  $M_\omega^0$  および  $M_z^{\omega 0}$  の影響を無視することとし、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q_y^{0C}}{\partial z} &= -q_y^c, & \frac{\partial M_x^{0C}}{\partial z} &= Q_y^{0C}, & \frac{\partial^2 M_x^{0C}}{\partial z^2} &= -q_y^c, \\
 \frac{\partial Q_y^{0N}}{\partial z} &= -q_y^N, & \frac{\partial M_x^{0N}}{\partial z} &= Q_y^{0N}, & \frac{\partial^2 M_x^{0N}}{\partial z^2} &= -q_y^N.
 \end{aligned} \quad \dots\dots (2.3)$$

なる関係を用いて整理すると、基礎方程式は次式となる。

$$\begin{aligned}
 & m\left(\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} + y_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right) + \eta_u \frac{\partial u_s}{\partial t} + EI_{xx} \frac{\partial^4 u_s}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial M_x^0}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} \\
 & + M_x^0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 M_x^{0c}}{\partial z^2} \theta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M_x^0}{\partial z^2} \frac{\partial v_s}{\partial z} + \frac{3}{2} \frac{\partial M_x^0}{\partial z} \frac{\partial^2 v_s}{\partial z^2} \\
 & + M_x^0 \frac{\partial^3 v_s}{\partial z^3} - \bar{q}_x = 0 \\
 & m\left(\frac{\partial^2 v^2}{\partial t^2} - x_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right) + \eta_v \frac{\partial v_s}{\partial t} + EI_{yy} \frac{\partial^4 v_s}{\partial z^4} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M_x^0}{\partial z^2} \frac{\partial u_s}{\partial z} \\
 & - \frac{3}{2} \frac{\partial M_x^0}{\partial z} \frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} - M_x^0 \frac{\partial^3 u_s}{\partial z^3} - \bar{q}_y = 0 \\
 & \mu I_{ps} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + m\left(y_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - x_s \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2}\right) + \eta_\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} + EI_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} \\
 & - GK \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - 2\beta_y \frac{\partial M_x^0}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} - 2\beta_y M_x^0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \beta_y \frac{\partial^2 M_x^0}{\partial z^2} \theta \\
 & + M_x^0 \frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} + (e_y - y_s) \frac{\partial^2 M_x^{0N}}{\partial z^2} \theta - \bar{m}_z - \bar{q}_x (e_{ix} - y_s) \\
 & + \bar{q}_y (e_{ix} - x_s) = 0 \quad \dots\dots (2.4)
 \end{aligned}$$

以下に、支間長  $l$  の梁上を連続的に走行する鉛直荷重  $q_y^N$  および  $q_y^c$  と、これに伴う初期断面力  $M_x^{0N}, M_x^{0c}$  および  $M_x^{0N}, M_x^{0c}$  ならびに付加慣性力  $\bar{q}_x, \bar{q}_y$  および  $\bar{m}_z$  を示す。

鉛直荷重  $q_y$  に、従動集中荷重  $P \cos \omega t$  ( $P$ : 荷重振幅,  $\omega$ : 荷重振動数) からなる荷重列 (荷重間隔が  $a$ , 走行速度が  $V$  である)  $q_y^N$  と, Fig. 4 に示すように、同じ荷重位置、同一間隔および同一走行速度をもつ一定方向  $-W$  からなる荷重列  $q_y^c$  を想定する。このとき  $q_y^N$  および  $q_y^c$  は周期  $a/V$  をもつ関数となり、次式で表わされる。

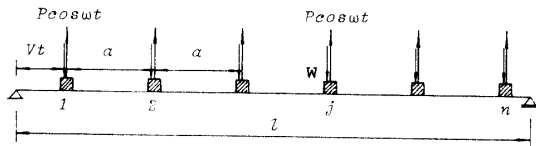


Fig. 4 Travelling follower load system.

$$\begin{aligned}
 q_y^N &= \begin{cases} P \cos \omega t \sum_{j=1}^n \delta\{z - \xi(t, j)\} & \dots 0 \leq t < T_s \\ P \cos \omega t \sum_{j=1}^{n-1} \delta\{z - \xi(t, j)\} & \dots T_s \leq t \leq T_p \end{cases} \\
 q_y^c &= \begin{cases} -W \sum_{j=1}^n \delta\{z - \xi(t, j)\} & \dots 0 \leq t < T_s \\ -W \sum_{j=1}^{n-1} \delta\{z - \xi(t, j)\} & \dots T_s \leq t \leq T_p \end{cases} \quad \dots\dots (2.5)
 \end{aligned}$$

式中,  $\xi(t, j) = Vt + (j-1)a$ ,  $T_s = \{l - (n-1)a\}/V$ ,  $T_p = a/V$ ,  $\delta$  は Dirac の  $\delta$  関数である。ここで、荷重振動周期  $T = 2\pi/\omega$  が荷重移動周期  $T_p = a/V$  の整数分の 1, すなわち  $T_p$  が  $T$  の整数倍である場合を想定する。

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \alpha \omega_0, & \omega_0 &= 2\pi V/a \\ \alpha &: \text{整数}, & \omega_0 &: \text{荷重移動振動数} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.6)$$

$M_x^{0N}, M_x^{0c}$  および  $M_x^{0N}, M_x^{0c}$  はフーリエ級数を用いて次のように表示される。

$$\begin{aligned}
 M_x^{0N} &= \begin{cases} \frac{-2P \cos \omega t}{l} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \\ \quad \cdot \sin(\omega_j t + \omega_{jh}) \sin \frac{j\pi z}{l} & \dots 0 \leq t < T_s \\ \frac{-2P \cos \omega t}{l} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \\ \quad \cdot \sin(\omega_j t + \omega_{jh}) \sin \frac{j\pi z}{l} & \dots T_s \leq t \leq T_p \end{cases} \\
 M_x^{0c} &= \begin{cases} \frac{2W}{l} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \\ \quad \cdot \sin(\omega_j t + \omega_{jh}) \sin \frac{j\pi z}{l} & \dots 0 \leq t < T_s \\ \frac{2W}{l} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \\ \quad \cdot \sin(\omega_j t + \omega_{jh}) \sin \frac{j\pi z}{l} & \dots T_s \leq t < T_p \end{cases} \quad \dots\dots (2.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_x^{0N} &= \begin{cases} \frac{2P(e_x - x_s) \cos \omega t}{l} \left[ \frac{1}{2}(l - Vt) + \left(\frac{l}{\pi}\right) \times \right. \\ \quad \times \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sin(\omega_j t + \omega_{jh}) \left. \left\{ \cos \frac{j\pi z}{l} - 1 \right\} \right] & \dots 0 \leq t < T_s \\ \frac{2P(e_x - x_s) \cos \omega t}{l} \left[ \frac{1}{2}(l - Vt) + \left(\frac{l}{\pi}\right) \times \right. \\ \quad \times \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sin(\omega_j t + \omega_{jh}) \left. \left\{ \cos \frac{j\pi z}{l} - 1 \right\} \right] & \dots T_s \leq t \leq T_p \end{cases} \\
 M_x^{0c} &= \begin{cases} \frac{-2W(e_{ix} - x_s)}{l} \left[ \frac{1}{2}(l - Vt) + \left(\frac{l}{\pi}\right) \times \right. \\ \quad \times \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sin(\omega_j t + \omega_{jh}) \left. \left\{ \cos \frac{j\pi z}{l} - 1 \right\} \right] & \dots 0 \leq t < T_s \\ \frac{-2W(e_{ix} - x_s)}{l} \left[ \frac{1}{2}(l - Vt) + \left(\frac{l}{\pi}\right) \times \right. \\ \quad \times \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sin(\omega_j t + \omega_{jh}) \left. \left\{ \cos \frac{j\pi z}{l} - 1 \right\} \right] & \dots T_s \leq t < T_p \end{cases} \quad \dots\dots (2.8)
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\omega_j = j\pi V/l, \omega_{jh} = j\pi(h-1)a/l \quad \dots\dots (2.9)$$

荷重質量による付加慣性力は、上記の集中荷重が、それぞれ質量  $M_0$ 、質量の慣性モーメント  $J_0$  をもつとき、周期  $a/V$  をもつ周期関数となり次式で表わされる。

$$\bar{q}_x = \begin{cases} -M_0 \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - (e_{iy} - y_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta \{z - \xi(t, j)\} & \dots 0 \leq t < T_s \\ -M_0 \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - (e_{iy} - y_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta \{z - \xi(t, j)\} & \dots T_s \leq t \leq T_p \end{cases}$$

$$\bar{q}_y = \begin{cases} -M_0 \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} + (e_{ix} - x_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta \{z - \xi(t, j)\} & \dots 0 \leq t < T_s \\ -M_0 \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} + (e_{ix} - x_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta \{z - \xi(t, j)\} & \dots T_s \leq t < T_p \end{cases} \quad \dots\dots (2.10)$$

$$\bar{m}_z = \begin{cases} -J_0 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \delta \{z - \xi(t, j)\} & \dots 0 \leq t < T_s \\ -J_0 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \delta \{z - \xi(t, j)\} & \dots T_s \leq t < T_p \end{cases} \quad \dots\dots (2.11)$$

3. 基礎方程式の解析

基礎方程式 (2.4) の解を次式で近似表示する。

$$\left. \begin{aligned} u_s &= \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(t) u_{sk}(z) \\ v_s &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(t) v_{sk}(z) \\ \theta &= \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k(t) \theta_k(z) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (3.1)$$

式中、 $\rho_k(t)$ 、 $\sigma_k(t)$  および  $\tau_k(t)$  は、時間に関する未知関数である。 $u_{sk}(z)$  および  $v_{sk}(z)$  はそれぞれ梁の水平および鉛直曲げ振動の  $k$  次の固有関数であり、 $\theta_k(z)$  は曲げねじり剛性を考慮した梁のねじり振動の  $k$  次の固有関数である。

基礎方程式 (2.4) および付加慣性力 (2.11) に式 (3.1) を代入し、固有関数の直交性を利用して整理すると、基礎方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \rho_k}{dt^2} + \frac{M_0}{mA_{kk}^u} \sum_{i=1}^{\infty} D_{ki}^{uu} \frac{d^2 \rho_i}{dt^2} + \frac{y_s}{A_{kk}^u} \sum_{i=1}^{\infty} C_{ki}^{u\theta} \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} \\ & - \frac{M_0(e_{iy} - y_s)}{mA_{kk}^u} \sum_{i=1}^{\infty} D_{ki}^{u\theta} \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} + \frac{\eta_u}{m} \frac{d\rho_k}{dt} + \omega_{uk}^2 \rho_k \\ & + \frac{W}{mA_{kk}^u} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \bar{f}_{ki}^{uuC} + \frac{3}{2} \bar{g}_{ki}^{uuC} + \bar{h}_{ki}^{uuC} \right) \sigma_i \\ & + \frac{P}{mA_{kk}^u} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \bar{f}_{ki}^{uuN} + \frac{3}{2} \bar{g}_{ki}^{uuN} + \bar{h}_{ki}^{uuN} \right) \sigma_i \\ & + \frac{W}{mA_{kk}^u} \sum_{i=1}^{\infty} (2g_{ki}^{u\theta C} + f_{ki}^{u\theta C} + h_{ki}^{u\theta C}) \tau_i \\ & + \frac{P}{mA_{kk}^u} \sum_{i=1}^{\infty} (2g_{ki}^{u\theta N} + f_{ki}^{u\theta N}) \tau_i = 0 \\ & \frac{d^2 \sigma_k}{dt^2} + \frac{M_0}{mA_{kk}^v} \sum_{i=1}^{\infty} D_{ki}^{vv} \sigma_i - \frac{x_s}{A_{kk}^v} \sum_{i=1}^{\infty} C_{ki}^{v\theta} \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} \\ & + \frac{M_0(e_{ix} - x_s)}{mA_{kk}^v} \sum_{i=1}^{\infty} D_{ki}^{v\theta} \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} + \frac{\eta_v}{m} \frac{d\sigma_k}{dt} + \omega_{vk}^2 \sigma_k \\ & - \frac{W}{mA_{kk}^v} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \bar{f}_{ki}^{vvC} + \frac{3}{2} \bar{g}_{ki}^{vvC} + \bar{h}_{ki}^{vvC} \right) \rho_i \\ & - \frac{P}{mA_{kk}^v} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \bar{f}_{ki}^{vvN} + \frac{3}{2} \bar{g}_{ki}^{vvN} + \bar{h}_{ki}^{vvN} \right) \rho_i = 0 \\ & \frac{m y_s}{\mu I_{ps} A_{kk}^{\theta}} \sum_{i=1}^{\infty} C_{ik}^{\theta u} \frac{d^2 \rho_i}{dt^2} - \frac{M_0(e_{iy} - y_s)}{\mu I_{ps} A_{kk}^{\theta}} \sum_{i=1}^{\infty} D_{ik}^{\theta u} \frac{d\rho_i}{dt} \\ & - \frac{m x_s}{\mu I_{ps} A_{kk}^{\theta}} \sum_{i=1}^{\infty} C_{ik}^{\theta v} \frac{d^2 \sigma_i}{dt^2} + \frac{M_0(e_{ix} - x_s)}{\mu I_{ps} A_{kk}^{\theta}} \sum_{i=1}^{\infty} D_{ik}^{\theta v} \frac{d^2 \sigma_i}{dt^2} \\ & + \frac{d^2 \tau_k}{dt^2} + \frac{J_s}{\mu I_{ps} A_{kk}^{\theta}} \sum_{i=1}^{\infty} D_{ki}^{\theta\theta} \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} + \frac{\eta_{\theta}}{\mu I_{ps}} \frac{d\tau_k}{dt} + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{\theta ki}^2 \tau_i \\ & + \frac{W}{\mu I_{ps} A_{kk}^{\theta}} \sum_{i=1}^{\infty} f_{ki}^{\theta u C} \rho_i + \frac{P}{\mu I_{ps} A_{kk}^{\theta}} \sum_{i=1}^{\infty} f_{ki}^{\theta u N} \rho_i \\ & - \frac{W \beta_y}{\mu I_{ps} A_{kk}^{\theta}} \sum_{i=1}^{\infty} (2f_{ki}^{\theta\theta C} + 2g_{ki}^{\theta\theta C} + h_{ki}^{\theta\theta C}) \tau_i \\ & - \frac{P}{\mu I_{ps} A_{kk}^{\theta}} \sum_{i=1}^{\infty} \{ \beta_y (2f_{ki}^{\theta\theta N} + 2g_{ki}^{\theta\theta N} + h_{ki}^{\theta\theta N}) \\ & - (e_y - y_s) h_{ku}^{\theta\theta N} \} \tau_i = 0 \quad k=1, 2, \dots, \infty \end{aligned} \quad \dots\dots (3.2)$$

ここで

$$\begin{aligned} A_{ki}^a &= \int_0^l a_k(z) a_i(z) dz & B_{ki}^a &= \int_0^l a_k(z) a_i'''(z) dz \\ \bar{B}_{ki}^a &= \int_0^l a_k(z) a_i'(z) dz & C_{ki}^{ab} &= \int_0^l a_k(z) b_i(z) dz \\ D_{ki}^{ab} &= \begin{cases} \sum_{j=1}^n \int_0^l \delta \{z - \xi(t, j)\} a_k(z) b_i(z) dz & \dots 0 \leq t < T_s \\ \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^l \delta \{z - \xi(t, j)\} a_k(z) b_i(z) dz & \dots T_s \leq t \leq T_p \end{cases} \end{aligned} \quad \dots\dots (3.3)$$

$$\omega_{uk}^2 = \frac{EI_{xx}}{m} \left( \frac{\alpha_k}{l} \right)^4, \quad \omega_{vk}^2 = \frac{EI_{yy}}{m} \left( \frac{\alpha_k}{l} \right)^4$$

$$\omega_{\delta ki}^2 = \frac{EI_{\theta}^0 B_{ki}^0 - GK \bar{B}_{ki}^0}{\mu I_{ps} A_{kk}^0}$$

$\alpha_k$ : 曲げ振動の  $k$  次の固有値

$$J_s = J_0 + M_0 \{ (e_{ix} - x_s)^2 + (e_{iy} - y_s)^2 \} \quad \dots\dots (3.4)$$

$$g_{ki}^{abc} = \frac{1}{W} \int_0^l \frac{\partial M_x^{oc}}{\partial z} a_k(z) b_i'(z) dz,$$

$$\bar{g}_{ki}^{abc} = \frac{1}{W} \int_0^l \frac{\partial M_z^{oc}}{\partial z} a_k(z) b_i'(z) dz$$

$$g_{ki}^{abN} = \frac{1}{P} \int_0^l \frac{\partial M_x^{oN}}{\partial z} a_k(z) b_i'(z) dz,$$

$$\bar{g}_{ki}^{abN} = \frac{1}{P} \int_0^l \frac{\partial M_z^{oN}}{\partial z} a_k(z) b_i'(z) dz$$

$$f_{ki}^{abc} = \frac{1}{W} \int_0^l M_x^{oc} a_k(z) b_i''(z) dz,$$

$$\bar{f}_{ki}^{abc} = \frac{1}{W} \int_0^l M_z^{oc} a_k(z) b_i''(z) dz$$

$$f_{ki}^{abN} = \frac{1}{P} \int_0^l M_x^{oN} a_k(z) b_i''(z) dz,$$

$$\bar{f}_{ki}^{abN} = \frac{1}{P} \int_0^l M_z^{oN} a_k(z) b_i''(z) dz$$

$$h_{ki}^{abc} = \frac{1}{W} \int_0^l \frac{\partial^2 M_x^{oc}}{\partial z^2} a_k(z) b_i(z) dz,$$

$$\bar{h}_{ki}^{abc} = \frac{1}{W} \int_0^l \frac{\partial^2 M_z^{oc}}{\partial z^2} a_k(z) b_i(z) dz$$

$$h_{ki}^{abN} = \frac{1}{P} \int_0^l \frac{\partial^2 M_x^{oN}}{\partial z^2} a_k(z) b_i(z) dz,$$

$$\bar{h}_{ki}^{abN} = \frac{1}{P} \int_0^l \frac{\partial^2 M_z^{oN}}{\partial z^2} a_k(z) b_i(z) dz$$

$\dots\dots (3.5)$

上付き添字および積分記号中の  $a$  および  $b$  は座標関数  $u_s, v_s$  あるいは  $\theta$  を表す。 ( $'$ ) =  $d/dz$

式(3.2)は、無限連立方程式となるが、基礎方程式の解(3.1)を  $N$  項からなる有限級数で近似し、マトリックス表示すると次式となる。

$$(A + A_M) \frac{d^2 f}{dt^2} + D \frac{df}{dt} + (B + WC_C + PC_N) f = 0 \quad \dots\dots (3.6)$$

ここで、

$$f = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N]^T \quad \dots\dots (3.7)$$

$$A = \begin{bmatrix} [A_{1rs}] & [A_{2rs}] & [A_{3rs}] \\ [A_{4rs}] & [A_{5rs}] & [A_{6rs}] \\ [A_{7rs}] & [A_{8rs}] & [A_{9rs}] \end{bmatrix}_{r, s=1, 2, \dots, N} \quad \dots\dots (3.8)$$

$$A_{1rs} = A_{5rs} = A_{9rs} = \delta_{rs}, \quad A_{2rs} = A_{4rs} = 0,$$

$$A_{3rs} = y_s C_{sr}^{u0} / A_{rr}^u, \quad A_{6rs} = -x_s C_{sr}^{v0} / A_{rr}^v,$$

$$A_{7rs} = m y_s C_{sr}^{u0} / \mu I_{ps} A_{rr}^0, \quad A_{8rs} = -m x_s C_{sr}^{v0} / \mu I_{ps} A_{rr}^0,$$

$\delta_{rs}$ : Kronecker の記号

$$A_M = \begin{bmatrix} [A_{M1rs}] & [A_{M2rs}] & [A_{M3rs}] \\ [A_{M4rs}] & [A_{M5rs}] & [A_{M6rs}] \\ [A_{M7rs}] & [A_{M8rs}] & [A_{M9rs}] \end{bmatrix}_{r, s=1, 2, \dots, N} \quad \dots\dots (3.9)$$

$$A_{M1rs} = M_0 D_{rs}^{uu} / m A_{rr}^u, \quad A_{M2rs} = A_{M4rs} = 0,$$

$$A_{M3rs} = -M_0 (e_{iy} - y_s) D_{rs}^{u0} / m A_{rr}^u,$$

$$A_{M5rs} = M_0 D_{rs}^{vv} / m A_{rr}^v,$$

$$A_{M6rs} = M_0 (e_{ix} - x_s) D_{rs}^{v0} / m A_{rr}^v,$$

$$A_{M7rs} = -M_0 (e_{iy} - y_s) D_{sr}^{u0} / \mu I_{ps} A_{rr}^0,$$

$$A_{M8rs} = M_0 (e_{ix} - x_s) D_{sr}^{v0} / \mu I_{ps} A_{rr}^0,$$

$$A_{M9rs} = J_s D_{rs}^{00} / \mu I_{ps} A_{rr}^0$$

$$D = \begin{bmatrix} [D_{1rs}] & [D_{2rs}] & [D_{3rs}] \\ [D_{4rs}] & [D_{5rs}] & [D_{6rs}] \\ [D_{7rs}] & [D_{8rs}] & [D_{9rs}] \end{bmatrix}_{r, s=1, 2, \dots, N} \quad \dots\dots (3.10)$$

$$D_{1rs} = \eta_u \delta_{rs} / m, \quad D_{5rs} = \eta_v \delta_{rs} / m, \quad D_{9rs} = \eta_\theta \delta_{rs} / \mu I_{ps},$$

$$D_{2rs} = D_{3rs} = D_{4rs} = D_{6rs} = D_{7rs} = D_{8rs} = 0.$$

$$B = \begin{bmatrix} [B_{1rs}] & [B_{2rs}] & [B_{3rs}] \\ [B_{4rs}] & [B_{5rs}] & [B_{6rs}] \\ [B_{7rs}] & [B_{8rs}] & [B_{9rs}] \end{bmatrix}_{r, s=1, 2, \dots, N} \quad \dots\dots (3.11)$$

$$B_{1rs} = \omega_{ur}^2 \delta_{rs}, \quad B_{5rs} = \omega_{vr}^2 \delta_{rs}, \quad B_{9rs} = \omega_{\theta r}^2 \delta_{rs},$$

$$B_{2rs} = B_{3rs} = B_{4rs} = B_{6rs} = B_{7rs} = B_{8rs} = 0.$$

$$C_C = \begin{bmatrix} [C_{1rs}^c] & [C_{2rs}^c] & [C_{3rs}^c] \\ [C_{4rs}^c] & [C_{5rs}^c] & [C_{6rs}^c] \\ [C_{7rs}^c] & [C_{8rs}^c] & [C_{9rs}^c] \end{bmatrix}_{r, s=1, 2, \dots, N} \quad \dots\dots (3.12)$$

$$C_{1rs}^c = C_{5rs}^c = C_{6rs}^c = C_{8rs}^c = 0,$$

$$C_{2rs}^c = (\bar{f}_{rs}^{uv0} / 2 + 3\bar{g}_{rs}^{uv0} / 2 + \bar{h}_{rs}^{uv0}) / m A_{rr}^u,$$

$$C_{3rs}^c = (f_{rs}^{u0c} + 2g_{rs}^{u0c} + h_{rs}^{u0c}) / m A_{rr}^u,$$

$$C_{4rs}^c = -(\bar{f}_{rs}^{vu0} / 2 + 3\bar{g}_{rs}^{vu0} / 2 + \bar{h}_{rs}^{vu0}) / m A_{rr}^v,$$

$$C_{7rs}^c = f_{rs}^{00c} / \mu I_{ps} A_{rr}^0,$$

$$C_{9rs}^c = -\beta (2f_{rs}^{00c} + 2g_{rs}^{00c} + h_{rs}^{00c}) / \mu I_{ps} A_{rr}^0.$$

$$C_N = \begin{bmatrix} [C_{1rs}^N] & [C_{2rs}^N] & [C_{3rs}^N] \\ [C_{4rs}^N] & [C_{5rs}^N] & [C_{6rs}^N] \\ [C_{7rs}^N] & [C_{8rs}^N] & [C_{9rs}^N] \end{bmatrix}_{r, s=1, 2, \dots, N} \quad \dots\dots (3.13)$$

$$C_{1rs}^N = C_{5rs}^N = C_{6rs}^N = C_{8rs}^N = 0,$$

$$C_{2rs}^N = (\bar{f}_{rs}^{uvN} / 2 + 3\bar{g}_{rs}^{uvN} / 2 + \bar{h}_{rs}^{uvN}) / m A_{rr}^u,$$

$$\begin{aligned}
C_{3rs}^N &= (2g_{rs}^{u0N} + f_{rs}^{u0N})/mA_{rr}^u, & \left\{ \begin{array}{l} \bar{f}_{ki}^{abN} \\ \bar{g}_{ki}^{abN} \\ \bar{h}_{ki}^{abN} \end{array} \right\} &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \bar{c}_{0ki}^{abN} \\ \bar{c}_{0ki}^{abN} \\ \bar{c}_{0ki}^{abN} \end{array} \right\} + \sum_{p=1}^{\infty} \left( \left\{ \begin{array}{l} \bar{c}_{pki}^{abN} \\ \bar{c}_{pki}^{abN} \\ \bar{c}_{pki}^{baN} \end{array} \right\} \cos p\omega_0 t \right. \\
C_{4rs}^N &= -(\bar{f}_{rs}^{vuN}/2 + 3\bar{g}_{rs}^{vuN}/2 + \bar{h}_{rs}^{vuN})/mA_{rr}^v, & & \left. + \left\{ \begin{array}{l} \bar{d}_{pki}^{abN} \\ \bar{d}_{pki}^{abN} \\ \bar{d}_{pki}^{abN} \end{array} \right\} \sin p\omega_0 t \right) \\
C_{7rs}^N &= f_{rs}^{0uN}/\mu I_{ps} A_{rr}^0, & & \\
C_{9rs}^N &= -\{\beta_y(2f_{rs}^{00N} + 2g_{rs}^{00N} + h_{rs}^{00N}) & & \\
&\quad - (e_y - y_s)h_{rs}^{00N}\}/\mu I_{ps} A_{rr}^0. & & \dots\dots (4.5)
\end{aligned}$$

式(3.6)を解析することにより、荷重質量と初期応力を考慮した場合の梁の安定性が明らかにされる。

#### 4. 連成振動の安定解析

式(3.6)中の係数  $A_M$ ,  $C_C$  および  $C_N$  は,  $T_p = a/V$  なる周期をもつことより,  $(A + A_M)^{-1}(B + WC_C + PC_N)$  が同一周期をもつ。したがって, 式(3.6)が Hill 方程式となる。

式(3.6)の係数マトリックス  $A_M$ ,  $C_C$  および  $C_N$  に含まれる  $D_{ki}^{ab}$  (式3.3) および  $\bar{f}_{ki}^{abC}, \dots, \bar{h}_{ki}^{abN}, \bar{f}_{ki}^{abC}, \dots, \bar{h}_{ki}^{abN}$  を周期  $T_p$  をもつフーリエ級数に展開する。

$$D_{ki}^{ab} = \frac{1}{2} a_{0ki} + \sum_{p=1}^{\infty} (a_{pki}^{ab} \cos p\omega_0 t + b_{pki}^{ab} \sin p\omega_0 t) \dots\dots (4.1)$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} f_{ki}^{abC} \\ g_{ki}^{abC} \\ h_{ki}^{abC} \end{array} \right\} &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_{0ki}^{abC} \\ \bar{a}_{0ki}^{abC} \\ \bar{a}_{0ki}^{abC} \end{array} \right\} + \sum_{p=1}^{\infty} \left( \left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_{pki}^{abC} \\ \bar{a}_{pki}^{abC} \\ \bar{a}_{pki}^{abC} \end{array} \right\} \cos p\omega_0 t \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \begin{array}{l} \bar{b}_{pki}^{abC} \\ \bar{b}_{pki}^{abC} \\ \bar{b}_{pki}^{abC} \end{array} \right\} \sin p\omega_0 t \right) \\
&\dots\dots (4.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} \bar{f}_{ki}^{abN} \\ \bar{g}_{ki}^{abN} \\ \bar{h}_{ki}^{abN} \end{array} \right\} &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_{0ki}^{abN} \\ \bar{a}_{0ki}^{abN} \\ \bar{a}_{0ki}^{abN} \end{array} \right\} + \sum_{p=1}^{\infty} \left( \left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_{pki}^{abN} \\ \bar{a}_{pki}^{abN} \\ \bar{a}_{pki}^{abN} \end{array} \right\} \cos p\omega_0 t \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \begin{array}{l} \bar{b}_{pki}^{abN} \\ \bar{b}_{pki}^{abN} \\ \bar{b}_{pki}^{abN} \end{array} \right\} \sin p\omega_0 t \right) \\
&\dots\dots (4.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} \bar{f}_{ki}^{abC} \\ \bar{g}_{ki}^{abC} \\ \bar{h}_{ki}^{abC} \end{array} \right\} &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \bar{c}_{0ki}^{abC} \\ \bar{c}_{0ki}^{abC} \\ \bar{c}_{0ki}^{abC} \end{array} \right\} + \sum_{p=1}^{\infty} \left( \left\{ \begin{array}{l} \bar{c}_{pki}^{abC} \\ \bar{c}_{pki}^{abC} \\ \bar{c}_{pki}^{abC} \end{array} \right\} \cos p\omega_0 t \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \begin{array}{l} \bar{d}_{pki}^{abC} \\ \bar{d}_{pki}^{abC} \\ \bar{d}_{pki}^{abC} \end{array} \right\} \sin p\omega_0 t \right) \\
&\dots\dots (4.4)
\end{aligned}$$

式(4.1)~(4.5)を式(3.6)に代入し整理すると,

$$\begin{aligned}
A \left[ + \left\{ \frac{A_{10}}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} (A_{1p} \cos p\omega_0 t + A_{2p} \sin p\omega_0 t) \right\} \frac{d^2 f}{dt^2} \right. \\
+ \left[ B + W \left\{ \frac{C_{10}^C}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} (C_{1p}^C \cos p\omega_0 t + C_{2p}^C \sin p\omega_0 t) \right\} \right. \\
+ P \left. \left\{ \frac{C_{10}^N}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} (C_{1p}^N \cos p\omega_0 t + C_{2p}^N \sin p\omega_0 t) \right\} \right] f = 0 \\
\dots\dots (4.6)
\end{aligned}$$

基礎方程式が Hill 方程式であることより、振動解を調和振動であるとして、不安定解の存在条件より、単純共振の不安定領域と安定領域の境界を表わす境界振動数方程式を求める。Hill 方程式の解について、係数の周期と同じかあるいは2倍の周期をもつ周期解が、単純共振の不安定領域と安定領域を区分すること、さらに厳密にいうと、同じ周期をもつ2つの解が上記の不安定領域を区分し、異なる周期をもつ解が安定領域を区分することが知られている<sup>3)</sup>。

係数の周期  $T_p = a/V$  ( $\omega_0 = 2\pi V/a$ ) の2倍の周期をもつ解および周期  $T_p$  をもつ解をそれぞれ次式で表わす。

$$f = \sum_{\zeta=1,3,\dots}^{\infty} \left( a_{\zeta} \cos \frac{1}{2} \zeta \omega_0 t + b_{\zeta} \sin \frac{1}{2} \zeta \omega_0 t \right) \dots\dots (4.7)$$

$$f = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\zeta=2,4,\dots}^{\infty} \left( a_{\zeta} \cos \frac{1}{2} \zeta \omega_0 t + b_{\zeta} \sin \frac{1}{2} \zeta \omega_0 t \right) \dots\dots (4.8)$$

ここで、 $a_0$ ,  $a_{\zeta}$ ,  $b_{\zeta}$  は時間に無関係なベクトルである。式(4.7)および(4.8)が基礎方程式(4.6)を満す条件を求めるに次式となる。

$$\begin{aligned}
\left| -\frac{\omega_0}{4} \left( [A]_1 + \frac{1}{2} [A_M]_1 \right) + [B]_1 + [D]_1 \right. \\
\left. + \frac{W}{2} [C^C]_1 + \frac{P}{2} [C^N]_1 \right| = 0 \\
\dots\dots (4.9)
\end{aligned}$$

$$\left| -\frac{\omega_0}{4} \left( [A]_2 + \frac{1}{2} [A_M]_2 \right) + [B]_2 + [D]_2 \right.$$

$$+\frac{W}{2}[C^c]_2+\frac{P}{2}[C^N]_2=0 \quad \dots\dots(4.10)$$

ここで,

$$[A]_1 = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \ddots & & & & & \\ & 5^2 A & & & & \\ & 3^2 A & & & & \\ & & A & & & \\ \hline & & & A & & \\ & & & 3^2 A & & \\ & 0 & & & 5^2 A & \\ \hline & & & & & \ddots \end{array} \right) \quad \dots\dots(4.11)$$

$$[B]_1 = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \ddots & & & & & \\ & B & & & & \\ & & B & & & \\ & & & B & & \\ \hline & & & & B & \\ & & & & & B \\ & 0 & & & & \\ \hline & & & & & \ddots \end{array} \right) \quad \dots\dots(4.12)$$

$$[D]_1 = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \ddots & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & 5D & \\ & & & & 3D & \\ & & & & & D \\ \hline & & & & & \\ & & -D & & & \\ & -3D & & & & \\ & -5D & & & & 0 \\ \hline & & & & & \ddots \end{array} \right) \quad \dots\dots(4.13)$$

$$[A_M]_1 = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \dots & 5^2(2A_0+A_{15}) & 3^2(A_{11}+A_{14}) & (A_{12}+A_{13}) & & \\ \dots & 5^2(A_{11}+A_{14}) & 3^2(2A_0+A_{13}) & (A_{11}+A_{12}) & & \\ \dots & 5^2(A_{12}+A_{13}) & 3^2(A_{11}+A_{12}) & (2A_0+A_{11}) & & \\ \hline \dots & 5^2(A_{23}-A_{22}) & 3^2(A_{22}-A_{21}) & A_{21} & & \\ \dots & 5^2(A_{24}-A_{21}) & 3^2 A_{23} & (A_{22}+A_{21}) & & \\ \dots & 5^2 A_{25} & 3^2(A_{24}+A_{21}) & (A_{23}+A_{22}) & & \\ \hline \dots & (A_{23}-A_{22}) & 3^2(A_{24}-A_{21}) & 5^2 A_{25} & \dots & \\ \dots & (A_{22}-A_{21}) & 3^2 A_{23} & 5^2(A_{24}+A_{21}) & \dots & \\ \dots & A_{21} & 3^2(A_{22}+A_{21}) & 5^2(A_{23}+A_{22}) & \dots & \\ \hline \dots & (2A_0-A_{11}) & 3^2(A_{11}-A_{12}) & 5^2(A_{12}-A_{13}) & \dots & \\ \dots & (A_{11}-A_{12}) & 3^2(2A_0-A_{13}) & 5^2(A_{11}-A_{14}) & \dots & \\ \dots & (A_{12}-A_{13}) & 3^2(A_{11}-A_{14}) & 5^2(2A_0-A_{15}) & \dots & \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \quad \dots\dots(4.14)$$

$$[C^c]_1 = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \dots & (2C_0^c+C_{15}^c) & (C_{11}^c+C_{14}^c) & (C_{12}^c+C_{13}^c) & & \\ \dots & (C_{11}^c+C_{14}^c) & (2C_0^c+C_{13}^c) & (C_{11}^c+C_{12}^c) & & \\ \dots & (C_{12}^c+C_{13}^c) & (C_{11}^c+C_{12}^c) & (2C_0^c+C_{11}^c) & & \\ \hline \dots & (C_{23}^c-C_{22}^c) & (C_{22}^c-C_{21}^c) & C_{21}^c & & \\ \dots & (C_{24}^c-C_{21}^c) & C_{23}^c & (C_{22}^c+C_{21}^c) & & \\ \dots & C_{25}^c & (C_{24}^c+C_{21}^c) & (C_{23}^c+C_{22}^c) & & \\ \hline \dots & (C_{23}^c-C_{22}^c) & (C_{24}^c-C_{21}^c) & C_{25}^c & \dots & \\ \dots & (C_{22}^c-C_{21}^c) & C_{23}^c & (C_{24}^c+C_{21}^c) & \dots & \\ \dots & C_{21}^c & (C_{22}^c+C_{21}^c) & (C_{23}^c+C_{22}^c) & \dots & \\ \hline \dots & (2C_0^c-C_{11}^c) & (C_{11}^c-C_{12}^c) & (C_{12}^c-C_{13}^c) & \dots & \\ \dots & (C_{11}^c-C_{12}^c) & (2C_0^c-C_{13}^c) & (C_{11}^c-C_{14}^c) & \dots & \\ \dots & (C_{12}^c-C_{13}^c) & (C_{11}^c-C_{14}^c) & (2C_0^c-C_{15}^c) & \dots & \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \quad \dots\dots(4.15)$$

$$[C^N]_1 = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \dots & (2C_0^N+C_{15}^N) & (C_{11}^N+C_{14}^N) & (C_{12}^N+C_{13}^N) & & \\ \dots & (C_{11}^N+C_{14}^N) & (2C_0^N+C_{13}^N) & (C_{11}^N+C_{12}^N) & & \\ \dots & (C_{12}^N+C_{13}^N) & (C_{11}^N+C_{12}^N) & (2C_0^N+C_{11}^N) & & \\ \hline \dots & (C_{23}^N-C_{22}^N) & (C_{22}^N-C_{21}^N) & C_{21}^N & & \\ \dots & (C_{24}^N-C_{21}^N) & C_{23}^N & (C_{22}^N+C_{21}^N) & & \\ \dots & C_{25}^N & (C_{24}^N+C_{21}^N) & (C_{23}^N+C_{22}^N) & & \\ \hline \dots & (C_{23}^N-C_{22}^N) & (C_{24}^N-C_{21}^N) & C_{25}^N & \dots & \\ \dots & (C_{22}^N-C_{21}^N) & C_{23}^N & (C_{24}^N+C_{21}^N) & \dots & \\ \dots & C_{21}^N & (C_{22}^N+C_{21}^N) & (C_{23}^N+C_{22}^N) & \dots & \\ \hline \dots & (2C_0^N-C_{11}^N) & (C_{11}^N-C_{12}^N) & (C_{12}^N-C_{13}^N) & \dots & \\ \dots & (C_{11}^N-C_{12}^N) & (2C_0^N-C_{13}^N) & (C_{11}^N-C_{14}^N) & \dots & \\ \dots & (C_{12}^N-C_{13}^N) & (C_{11}^N-C_{14}^N) & (2C_0^N-C_{15}^N) & \dots & \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \quad \dots\dots(4.16)$$

$$[A]_2 = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \ddots & & & & & \\ & 6^2 A & & & & \\ & 4^2 A & & & & \\ & & 2^2 A & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ \hline & & & & 2^2 A & \\ & & & & & 4^2 A \\ & & & & & & 6^2 A \\ \hline & & & & & & \ddots \end{array} \right) \quad \dots\dots(4.17)$$

$$[B]_2 = \begin{pmatrix} \vdots & & & & \\ & B & & & \\ & & B & & \\ & & & B & \\ & & & & \frac{1}{2}B \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \vdots \end{pmatrix} \quad \dots\dots (4.18)$$

$$[D]_2 = \begin{pmatrix} \vdots & & & & & & \\ & & & & & & 6D \\ & 0 & & & & & 4D \\ & & & & & & 2D \\ & & & & 0 & & \\ & & & -2D & & & \\ & & & -4D & & & 0 \\ & & & -6D & & & \\ & & & & & & \vdots \end{pmatrix} \quad \dots\dots (4.19)$$

$$[A_M]_2 = \begin{pmatrix} \vdots & & & & & & \\ \dots & 6^2(A_0 + A_{16}) & 4^2(A_{11} + A_{15}) & 2^2(A_{12} + A_{14}) & & & \\ \dots & 6^2(A_{11} + A_{15}) & 4^2(2A_0 + A_{14}) & 2^2(A_{11} + A_{13}) & & & \\ \dots & 6^2(A_{12} + A_{14}) & 4^2(A_{11} + A_{13}) & 2^2(2A_0 + A_{12}) & & & \\ \dots & 6^2 A_{13} & 4^2 A_{12} & 2^2 A_{11} & & & \\ \dots & 6^2(A_{24} - A_{22}) & 4^2(A_{23} - A_{21}) & 2^2 A_{22} & & & \\ \dots & 6^2(A_{25} - A_{21}) & 4^2 A_{24} & 2^2(A_{23} + A_{21}) & & & \\ \dots & 6^2 A_{26} & 4^2(A_{25} + A_{21}) & 2^2(A_{24} + A_{22}) & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & 2^2(A_{24} - A_{22}) & 4^2(A_{25} - A_{21}) & 6^2 A_{26} & & & \\ \vdots & 2^2(A_{23} - A_{21}) & 4^2 A_{24} & 6^2(A_{25} + A_{21}) & & & \\ \vdots & 2^2 A_{22} & 4^2(A_{23} + A_{21}) & 6^2(A_{24} + A_{22}) & & & \\ \vdots & 2^2 A_{21} & 4^2 A_{22} & 6^2 A_{23} & & & \\ \vdots & 2^2(2A_0 - A_{12}) & 4^2(A_{11} - A_{13}) & 6^2(A_{12} - A_{14}) & & & \\ \vdots & 2^2(A_{11} - A_{13}) & 4^2(2A_0 - A_{14}) & 6^2(A_{11} - A_{15}) & & & \\ \vdots & 2^2(A_{12} - A_{14}) & 4^2(A_{11} - A_{15}) & 6^2(2A_0 - A_{16}) & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \quad \dots\dots (4.20)$$

$$[C^c]_2 = \begin{pmatrix} \vdots & & & & & & \\ \dots & (2C_0^c + C_{16}^c) & (C_{11}^c + C_{15}^c) & (C_{12}^c + C_{14}^c) & & & \\ \dots & (C_{11}^c + C_{15}^c) & (2C_0^c + C_{14}^c) & (C_{11}^c + C_{13}^c) & & & \\ \dots & (C_{12}^c + C_{14}^c) & (C_{11}^c + C_{13}^c) & (2C_0^c + C_{12}^c) & & & \\ \dots & C_{13}^c & C_{12}^c & C_{11}^c & & & \\ \dots & (C_{24}^c - C_{22}^c) & (C_{23}^c - C_{21}^c) & C_{22}^c & & & \\ \dots & (C_{25}^c - C_{21}^c) & C_{24}^c & (C_{23}^c + C_{21}^c) & & & \\ \dots & C_{26}^c & (C_{25}^c + C_{21}^c) & (C_{24}^c + C_{22}^c) & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$[C^c]_2 = \begin{pmatrix} \vdots & & & & & & \\ \dots & (C_{24}^c - C_{22}^c) & (C_{25}^c - C_{21}^c) & C_{26}^c & & & \\ \dots & (C_{23}^c - C_{21}^c) & C_{24}^c & (C_{25}^c + C_{21}^c) & & & \\ \dots & C_{22}^c & (C_{23}^c + C_{21}^c) & (C_{24}^c + C_{22}^c) & & & \\ \dots & C_0^c & C_{21}^c & C_{22}^c & C_{23}^c & & \\ \dots & C_{21}^c & (2C_0^c - C_{12}^c) & (C_{11}^c - C_{13}^c) & (C_{12}^c - C_{14}^c) & & \\ \dots & C_{22}^c & (C_{11}^c - C_{13}^c) & (2C_0^c - C_{14}^c) & (C_{11}^c - C_{15}^c) & & \\ \dots & C_{23}^c & (C_{12}^c - C_{14}^c) & (C_{11}^c - C_{15}^c) & (2C_0^c - C_{16}^c) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \quad \dots\dots (4.21)$$

$$[C^N]_2 = \begin{pmatrix} \vdots & & & & & & \\ \dots & (2C_0^N + C_{16}^N) & (C_{11}^N + C_{15}^N) & (C_{12}^N + C_{14}^N) & & & \\ \dots & (C_{11}^N + C_{15}^N) & (2C_0^N + C_{14}^N) & (C_{11}^N + C_{13}^N) & & & \\ \dots & (C_{12}^N + C_{14}^N) & (C_{11}^N + C_{13}^N) & (2C_0^N + C_{12}^N) & & & \\ \dots & C_{13}^N & C_{12}^N & C_{11}^N & & & \\ \dots & (C_{24}^N - C_{22}^N) & (C_{23}^N - C_{21}^N) & C_{22}^N & & & \\ \dots & (C_{25}^N - C_{21}^N) & C_{24}^N & (C_{23}^N + C_{21}^N) & & & \\ \dots & C_{26}^N & (C_{25}^N + C_{21}^N) & (C_{24}^N + C_{22}^N) & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$[C^N]_2 = \begin{pmatrix} \vdots & & & & & & \\ \dots & (C_{24}^N - C_{22}^N) & (C_{25}^N - C_{21}^N) & C_{26}^N & & & \\ \dots & (C_{23}^N - C_{21}^N) & C_{24}^N & (C_{25}^N + C_{21}^N) & & & \\ \dots & C_{22}^N & (C_{23}^N + C_{21}^N) & (C_{24}^N + C_{22}^N) & & & \\ \dots & C_0^N & C_{21}^N & C_{22}^N & C_{23}^N & & \\ \dots & C_{21}^N & (2C_0^N - C_{12}^N) & (C_{11}^N - C_{13}^N) & (C_{12}^N - C_{14}^N) & & \\ \dots & C_{22}^N & (C_{11}^N - C_{13}^N) & (2C_0^N - C_{14}^N) & (C_{11}^N - C_{15}^N) & & \\ \dots & C_{23}^N & (C_{12}^N - C_{14}^N) & (C_{11}^N - C_{15}^N) & (2C_0^N - C_{16}^N) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \quad \dots\dots (4.22)$$

式(4.9)および(4.10)が単純パラメトリックス共振領域の境界振動方程式である。この式より、不安定領域の境界における走行速度  $V$ , 荷重振幅  $P$ , 荷重振動数  $\omega$ , 荷重間隔  $a$  および荷重質量を決めることができる。

5. 単純梁の動的安定性

5.1 安定図

単純梁の動的不安定領域を上述の方法にしたがって求める。単純梁では、式(3.1)の座標関数  $u_{sk}, v_{sk}$  および  $\theta_k$  は次式で表わされる。

$$u_{sk} = v_{sk} = \theta_k = \sin k\pi z/l \quad \dots\dots (5.1)$$

Fig. 5 に示す  $\pi$  断面で、次に示す断面寸法および幾何定数をもつ単純梁を対象とする。

$$t/H = 0.02, b/H = 1.5, H/l = 0.05, x_s/H = 0, y_s/H = 0.685686, e_x/H = e_{ix}/H = 0, e_y/H = e_{iy}/H = 0.295686,$$



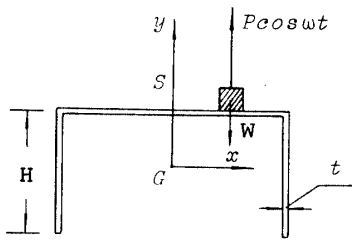


Fig. 5 Cross-section of a simple beam.

$$I_{yy}/I_{xx} = 0.270934, AH^2/I_{ps} = 1.01949, \{EI_0^2(\pi/l)^4 + GK(\pi/l)^2\} / \{H^2EI_{xx}(\pi/l)^4\} = 0.111881.$$

計算に当たって、せん断中心に  $q_y$  が作用する場合を想定したので、初期断面力中  $Q_y^0$  と  $M_x^0$  のみを考慮した。また振動解(3.1)の座標関数は一次の固有関数のみを取り、境界振動数方程式(4.9)の計算では、Hill方程式の解(4.7)の第2項 ( $\zeta=1, 3$ ) までを取り、境界振動数方程式(4.10)の計算では、解(4.8)の第2項 ( $\zeta=2, 4$ ) を取った。初期応力  $M_x^{0N}$  および  $M_z^{0N}$  のフーリエ級数(2.7), (2.8)は30項までを用い、式(4.1)~(4.5)の級数は4項 ( $p=1\sim 4$ ) までを用いた。

以下、荷重振動数、荷重間隔(梁上の荷重数)および荷重質量の影響を示す。図中、縦軸は無次元荷重  $P_* = P / \{EI_0^2(\pi/l)^4 + GK(\pi/l)^2\}$  を、横軸は荷重移動振動数  $\omega_0$  を平均荷重作用の第1固有値  $\Omega_1$  の2倍で除した無次元振動数  $\omega_* = \omega_0 / 2\Omega_1$  を表わす。ここで、 $\Omega_1$  は運動方程式

$$(A + A_0)d^2\delta/dt^2 + (B + WC_0^c + PC_0^N)\delta = 0 \quad \dots\dots (5.2)$$

の第1固有値で、第2および第3固有値をそれぞれ  $\Omega_2$  および  $\Omega_3$  とする。第1次モードはねじり振動が卓越し、第2および第3次モードはそれぞれ鉛直および水平振動が卓越する。

減衰定数  $h$  は、各振動モードに対して一定である場合 ( $h = h_u = h_v = h_\theta$ ) を想定し、本研究では  $h = 0.01, 0.05$  および  $0.10$  の場合について解析した。減衰定数と減衰係数の関係は次のとおりである。

$$\eta_u = 2mh_u\omega_u, \eta_v = 2mh_v\omega_v, \eta_\theta = 2\mu I_{ps}h_\theta\omega_\theta \quad \dots\dots (5.3)$$

ここで

$h_u, h_v$  : 水平および鉛直振動の卓越するモードに対する減衰定数

$h_\theta$  : ねじり振動の卓越するモードに対する減衰定数

$\omega_u, \omega_v$  : 水平および鉛直振動の卓越する固有円振

動数

$\omega_\theta$  : ねじり振動の卓越する固有円振動数

(荷重振動数の影響)

荷重質量を無視し、無次元荷重間隔  $a/l = 1.05$  の場合の単純共振の係数励振不安定領域を Fig. 6 に示す。図には、荷重振動数  $\omega$  が  $0, \omega_0, 2\omega_0$  および  $5\omega_0$  の場合の領域を示す。図中、斜線部が不安定領域である。この図より明らかなように、 $\omega_0 = 2\Omega_1$  の近傍での領域が広く、不安定振動が起りやすいことがわかる。また荷重振動数  $\omega$  の増加にともなって領域は狭くなり、安定化することがわかる。

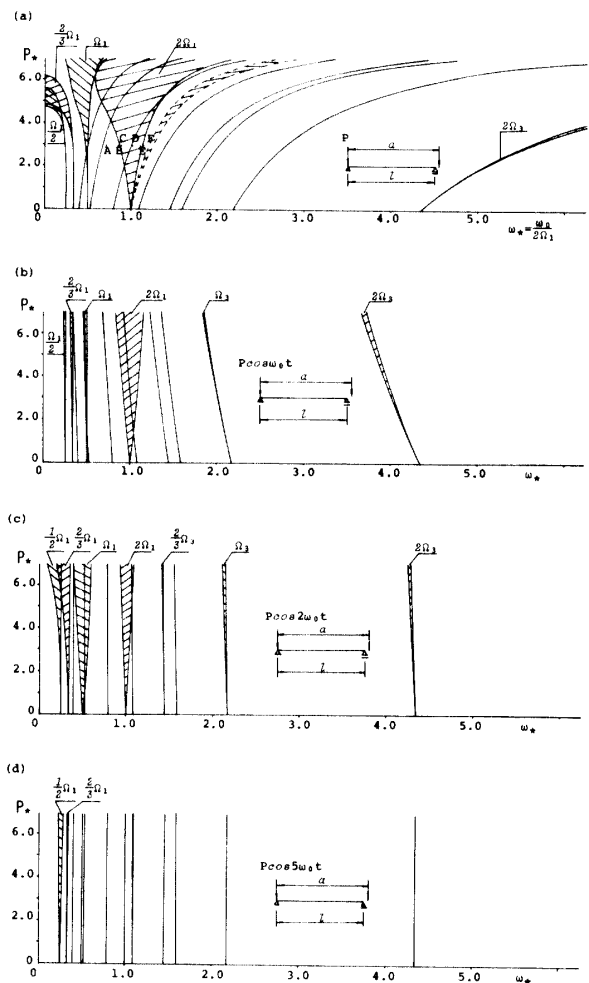


Fig. 6 Regions of simple parametric instability of beam under travelling harmonic follower load systems with various values of  $\omega$  when load interval  $a/l = 1.05$  and load mass is neglected. (a)  $\omega = 0$ ; (b)  $\omega = \omega_0$ ; (c)  $\omega = 2\omega_0$ ; (d)  $\omega = 5\omega_0$ .

(梁上の荷重数の影響)

荷重質量を無視し、荷重振動数  $\omega$  が荷重移動振動

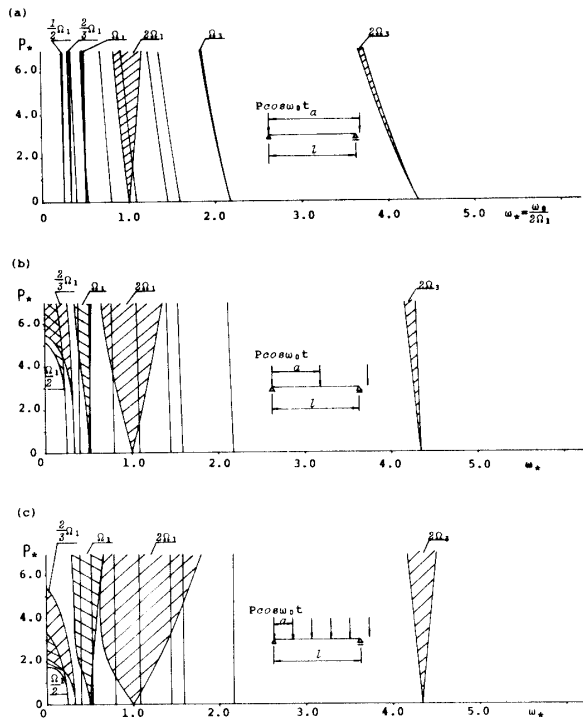


Fig. 7 Regions of simple parametric instability of beam under travelling harmonic follower load systems with various values of load interval when  $\omega = \omega_0$  and load mass is neglected.

(a)  $a/l = 1.05$ ; (b)  $a/l = 0.55$ ; (c)  $a/l = 0.22$ .

数  $\omega_0$  に等しい場合の、梁に荷重される荷重数の変化にともなう領域の変化状態を Fig. 7 に示す。図中、 $a/l = 1.05$  は梁上の集中荷重が 1 個の場合で、 $a/l = 0.55$  および  $0.22$  はそれぞれ 2 個および 5 個の場合である。図より明らかなように、荷重数の増加にともなって不安定領域は大きく拡大される。

(荷重質量の影響)

荷重振動数  $\omega = 0$  で、 $a/l = 1.05$  (梁上の集中荷重数が 1 個) の場合、荷重の質量の増加にともなう不安定領域の拡大の状況を Fig. 8 に示す。図より、荷重の質量を考慮すること、また質量が大きくなることにより不安定領域は拡大し、不安定化することが明らかである。

(減衰の影響)

Fig. 8 には、同時に減衰による不安定領域の変化状態も示した。図中、実線は減衰定数  $h = 0$  の場合、破線は  $h = 0.01$ 、一点鎖線は  $h = 0.05$ 、二点鎖線は  $h = 0.1$  の場合の境界線である。この図より、減衰定数  $h$  が増加するにともなって不安定領域は狭小化し、安定領域が広がることわかる。

(初期応力の影響)

Fig. 6 (a) の  $\omega_0/2\Omega_1 = 1$  近傍の不安定領域中に、

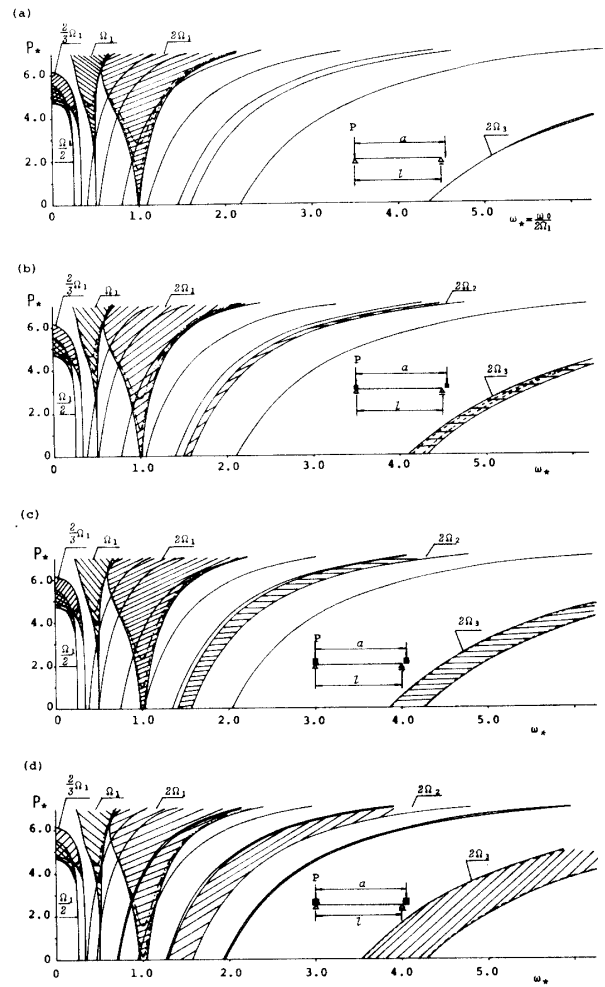


Fig. 8 Damped and undamped stable regions of simple parametric instability of beam under travelling constant follower load systems with various values of load mass when load interval  $a/l = 1.05$ .

(a)  $M_0 = 0$  and  $J_0 = 0$ ; (b)  $M_0/lm = 0.10345$  and  $J_0/\mu I_{ps}l = 0.43945 \times 10^{-3}$ ; (c)  $M_0/lm = 0.25863$  and  $J_0/\mu I_{ps}l = 0.10986 \times 10^{-2}$ ; (d)  $M_0/lm = 0.58192$  and  $J_0/\mu I_{ps}l = 0.55618 \times 10^{-1}$ . —,  $h = 0.0$ ; ----,  $h = 0.01$ ; - · - · -,  $h = 0.05$ ; - - - - -,  $h = 0.1$ .

梁の変形が小さく初期応力を無視した場合の領域を破線で示した。図より明らかなように、梁の変形が大きく初期応力の影響が入ると不安定領域が拡大化し、不安定化することがわかる。

### 5.2 振動挙動

以上、Bolotin の方法による係数励振不安定振動領域を示したが、次に、この領域内および境界近傍の振動挙動を明らかにする。応答計算に Runge-Kutta-Gill 法を適用し、式 (5.2) を数値解析することにより、振動変位の時間的経過を明らかにした。積分に当って、

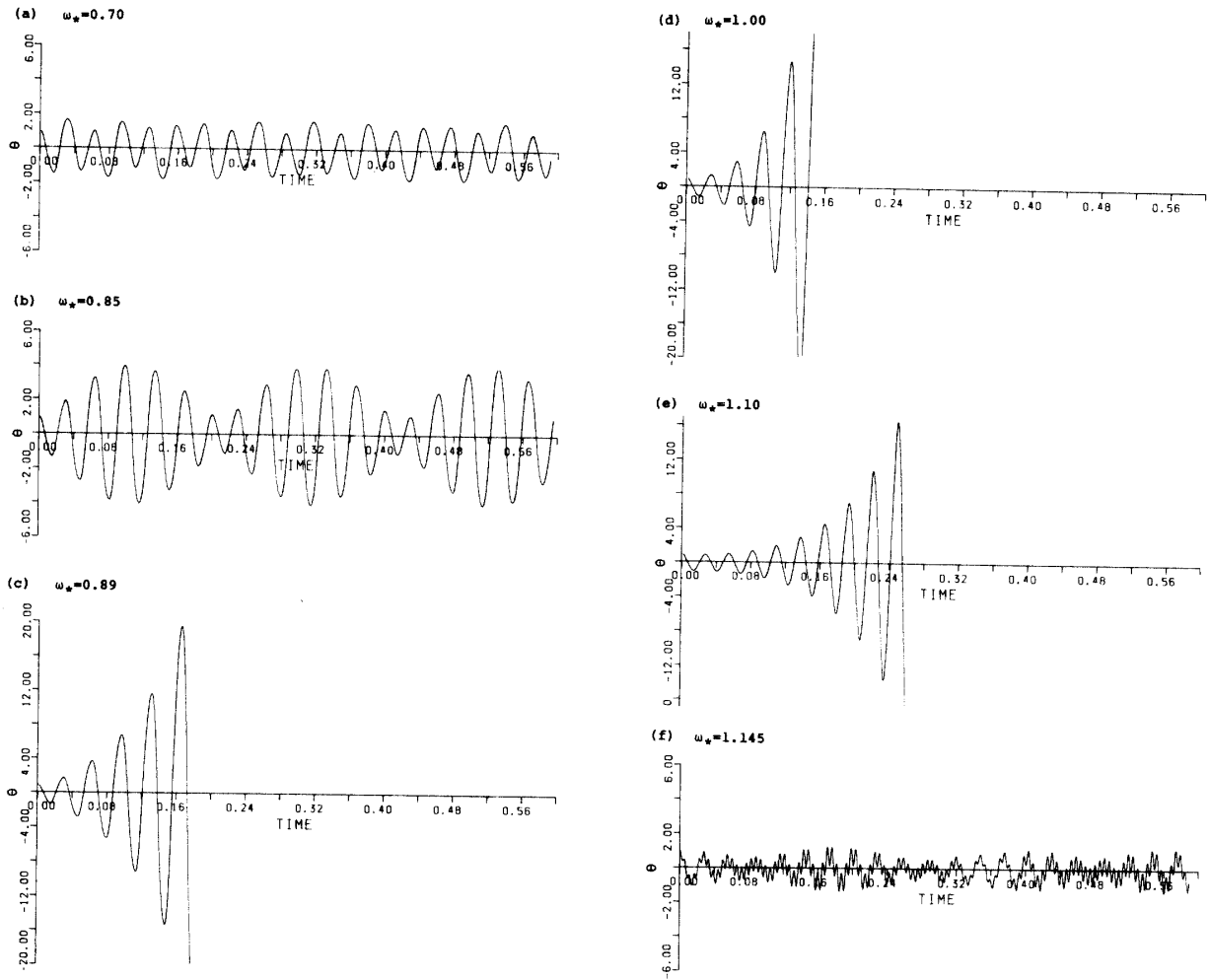


Fig. 9 Dynamic response of a simple beam under travelling follower load system when load interval  $a/l=1.05$ ,  $\omega=0$ ,  $P_*=3.0$  and load mass is neglected. (a)  $\omega_*=0.70$ ; (b)  $\omega_*=0.85$ ; (c)  $\omega_*=0.89$ ; (d)  $\omega_*=1.00$ ; (e)  $\omega_*=1.10$ ; (f)  $\omega_*=1.145$ .

時間きざみは最小固有周期の0.4%を用いた。

解析は、上記単純梁上を無次元荷重間隔  $a/l=1.05$ 、荷重振動数  $\omega=0$  の場合の Fig. 6 (a) において、無次元荷重  $P_*=3.0$  の場合の  $\omega_0/2\Omega_1=1.0$  近傍の不安定領域内外の点 A, B, C, D, E, F について求めた。各点はそれぞれ、安定領域点 A ( $\omega_*=0.70$ ), B ( $\omega_*=0.85$ ), 不安定点 D ( $\omega_*=1.00$ ), E ( $\omega_*=1.0$ ), および安定点 F ( $\omega_*=1.145$ ) で、スパン中央のねじり角の挙動を荷重移動周期  $T_p=a/V$  の20倍以上の時間内について求めた。最初に1.0の水平変位を生じさせておき、それが時間の経過とともにどのように推移するかを各点について図示したのが Fig. 9 である。図中；縦軸はねじり角、横軸は時間である。各図から明らかのように、Bolotin 法による係数励振不安定領域と数値積分による応答解析は一致し、Bolotin 法による単純パラメトリック共振領域の算定が適確であることが明らかとなった。

## 6. 結 び

鉛直の連行走行従動荷重を受ける梁の動的弾性安定性を明らかにするに当たり、梁の変形が比較的大きい場合について、弾性安定問題の基礎方程式が Hill 方程式になり、係数励振不安定振動が起ることを示した。また梁系の動的不安定性の解析に有用な単純パラメトリック共振の境界振動数方程式を Bolotin の方法を用いて求め、提示した。適用例として、単純梁の単純共振不安定領域を明らかにした。さらに、数値解析 (Runge-Kutta-Gill 法) することによって振動挙動を求めることにより、領域の確認を行った。その他、荷重振動数、梁上の荷重数、荷重質量、減衰および初期応力の影響を示した。

本研究の数値計算は、柴田直幸君 (小野田市) およ

び岡崎貴一君（川田工業）の協力を得、山口大学情報処理センターの Acos-800 により行った。また、本研究の一部は、文部省科学研究費（一般研究 C）の補助を受けた。ここに記して感謝します。

#### 参 考 文 献

- 1) Inglis, C. e.: A Mathematical Treatise on Vibration in Railway Bridges, Cambridge, The University Press, (1934).
- 2) Fryba, L.: Vibration of Solids and Structures under Moving Loads, Groningen, Noordhoff international Publishing, (1980).
- 3) Bolotin, V. V.: The Dynamic Stability of Elastic Systems, San Francisco, Holden-Day, (1964).
- 4) 會田忠義・小松茂生：走行従動荷重を受ける梁の動的応答，山口大学工学部研究報告，**32**, 109~118 (1981).
- 5) Aida, T.: Dynamic Stability of Thin Walled Beams under Traveling Follower Load Systems, Journal of Sound and Vibration, **86**, No. 3, (1983).
- 6) Aida, T., Nakayama, T. and Hirai, T.: Dynamic Stability of Beams under Traveling Horizontal Transverse Follower Load Systems, Theoretical and Applied Mechanics, **32**. (1983)

(昭和 58 年 4 月 15 日 受理)