

小河川の流出予測について

生 嶋 章*

On Runoff Prediction of Small River

Akira IKUSHIMA

Abstract

In this report, rainfall and streamflow system which is considered as a stationary stochastic process is applied to Wiener's prediction theory for storm runoff of short period. Present result shows that correspondency between the observed discharge and the predicted is not seen so well at peaked discharge. However, a technique of information theory can be expected to be applied for storm runoff of short period.

1. 序 論

水不足が社会、経済的問題となって以来水資源開発が強い要求となっていることは周知のとおりである。したがって、水文計画上、流出の長期予測の解明が強く望まれ、従来その解析は既往の洪水解析法を拡張したものに過ぎなかった。しかし、長期の予測では流域に種々の要素が流出現象に作用し一層複雑になってくる。そこで最近、統計的、確率論的な立場より研究が行なわれ、かなりの成果を得ている。たとえば、日野⁵⁾、高棹³⁾、管原⁴⁾等の研究をあげることができよう。特に日野⁵⁾はJ. Amorocho⁶⁾、S. L. S. Jacoby⁷⁾等の成し得なかった Wiener の非線型確率過程論の非線型核を導出し、好結果を得を得ている。本報では、前述の諸氏によって長期予測に用いられたような統計的、情報論的手法を著者は流出期間の短い洪水流出に適用し解析を行なった。

2. 理 論

Wiener の予測理論を適用して単位図を求めるのが目的である。

降雨一流出の関係は

$$Q_1(t+\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, \alpha) i(t-\tau) d\tau \quad (1)$$

と表わされる。ここに、 $Q_1(t+\alpha)$ は時刻 $t+\alpha$ における流出量、 $h(\tau, \alpha)$ は単位インパルス応答関数であり、 $\alpha=0$ のとき単位図となる。また、 $i(t)$ は時刻 t における降雨量である。

いま、式(1)の $Q_1(t+\alpha)$ を予測流出量とし、実際の流出量を $Q_2(t+\alpha)$ としておく。そこで、予測流出量 $Q_1(t+\alpha)$ と実際の流出量 $Q_2(t+\alpha)$ とを最小二乗の意味で最小となるような $h(\tau, \alpha)$ を求めるというのが Wiener の予測理論である。

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, \alpha) i(t-\tau) d\tau - Q_2(t+\alpha) \right\}^2 dt \quad (2)$$

式(2)の $\overline{\varepsilon^2(t)}$ を最小にする必要十分条件は、変分原理より、Wiener-Hopf の方程式

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma, \alpha) \varphi_{11}(\tau-\sigma) d\sigma - \varphi_{12}(\tau) = 0 \quad (\tau \geq 0) \quad (3)$$

となる。ここに、自己相関数、相互相関関数は、

$$\varphi_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T i(t) i(t+\tau) d\tau \quad (4)$$

$$\varphi_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T i(t) Q_2(t+\tau) d\tau \quad (5)$$

で定義される。

式(5)より

$$\begin{aligned} \varphi_{12}(\tau) &= \overline{i(t) Q_2(t+\tau)} = \overline{i(t) Q_{2,0}(t+\tau+\alpha)} \\ &= \varphi_{12,0}(\tau+\alpha) \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、 $\varphi_{12,0}(\tau)$ は $\alpha=0$ における降雨と流出の相互相関関数である。したがって、式(3)は

$$\varphi_{12,0}(\tau+\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma, \alpha) \varphi_{11}(\tau-\sigma) d\sigma \quad (7)$$

となる。

この方程式を解く方法としていくつかあげることが

* 土木工学科

できる。しかし、今回は対象としている洪水流出の流出期間が短いので、長期間流出量の予測に適用された場合のように式(3)を差分形にして $h(\sigma, \alpha)$ を求めるのが困難になる。そこで本報では、解析的な方法で議論していくことにする。

自己相関関数は単調減少していると考えられるので、近似的に次式であらわされる。

$$\phi_{11}(\tau) = a \exp(-c |\tau|) \quad (8)$$

ここに、 a, c は定数。

また、一般に相互相関関数は次式で近以できる。

$$\phi_{12,1}(\tau) = A_1 \exp\{a_1(\tau - \beta)\} \quad (\tau < \beta) \quad (9)$$

$$\phi_{12,2}(\tau) = A_2 \exp\{-a_2(\tau - \beta)\} \quad (\beta \leq \tau) \quad (10)$$

ここに、 A_1, A_2, a_1, a_2 は定数

式(8)より自己スペクトル密度は

$$\begin{aligned} \phi_{11}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a e^{-c|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{ac}{\pi} \frac{1}{C_2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (11)$$

となり、因数分解すれば

$$\phi_{11}^+(\omega) = \sqrt{\frac{ac}{\pi}} \frac{1}{c + i\omega} \quad (12)$$

$$\phi_{11}^-(\omega) = \sqrt{\frac{ac}{\pi}} \frac{1}{c - i\omega} \quad (13)$$

である。また、相互スペクトル密度は

$$\phi_{12}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{12}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (14)$$

これに式(6)を代入すれば

$$\begin{aligned} \phi_{12}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} e^{i\alpha\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{12,0}(\tau + \alpha) e^{-i\omega(\tau + \alpha)} d(\tau + \alpha) \\ &= e^{i\alpha\omega} \phi_{12,0}(\omega) \end{aligned} \quad (15)$$

ところで、Wiener-Hoph 方程式の解析解は

$$\text{Hopt}(\lambda, d) = \frac{1}{2\pi\phi_{11}^+(\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_{12}(\omega)}{\phi_{11}^-(\omega)} e^{i\omega\tau} d\omega \quad (16)$$

であるから、この式に式(5)を代入すると、次式になる。

$$\text{Hopt}(\lambda) = \frac{e^{i\alpha\lambda}}{2\pi\phi_{11}^+(\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau \quad (17)$$

ここに、

$$\psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_{12,0}(\omega)}{\phi_{11}^-(\omega)} e^{i\omega\tau} d\omega \quad (18)$$

ところで、

$$\phi_{12,0}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{12,0}(\omega) e^{-i\omega t} dt \quad (19)$$

である。ここに、

$$\begin{aligned} \phi_{12,0}(\omega) &= A_1 \exp\{a_1(\tau - \beta)\} \\ &+ A_2 \exp\{-a_2(\tau - \beta)\} \end{aligned} \quad (20)$$

式(20)を式(19)に代入すれば、

$$\phi_{12,0}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{A_1}{a_1 - i\omega} e^{-i\beta\omega} + \frac{A_2}{a_2 + i\omega} e^{-i\beta\omega} \right] \quad (21)$$

となる。この式を式(18)に代入して整理すると、

$$\psi(\tau) \begin{cases} = \sqrt{\frac{\pi}{ap}} A_1 (p - a_1) e^{(\tau - \beta)a_1} & (\tau < \beta) \\ = \sqrt{\frac{\pi}{ap}} A_2 (p + a_2) e^{-(\tau - \beta)a_2} & (\tau \geq \beta) \end{cases} \quad (22)$$

となる。式(17)から

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau \quad (23)$$

とおく、これに式(22)を代入して計算すると、

$\alpha \geq \beta$ の場合

$$I(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{ap}} A_2 (p + a_2) e^{a_2\beta} \frac{e^{-(a_2 + i\lambda)\alpha}}{a_2 + i\lambda} \quad (24)$$

$\alpha < \beta$ の場合

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \sqrt{\frac{\pi}{ap}} \left[A_2 (p + a_2) \frac{e^{-i\lambda\beta}}{a_2 + i\lambda} - A_1 (p - a_1) \frac{e^{-i\lambda\beta}}{a_1 - i\lambda} \right. \\ &\quad \left. + A_1 (p - a_1) \frac{e^{a_1(\alpha - \beta)} \cdot e^{-i\lambda\alpha}}{a_1 - i\lambda} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

となる。式(17)、(22)、(23)より

$$\text{Hopt}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{ap}} (p + i\lambda) e^{i\lambda\alpha} I(\lambda) \quad (26)$$

したがって、最適応答関数は

$$\text{hopt}(t, \alpha) = \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{ap}} \cdot \frac{1}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} (p + s) e^{(t+s)I(s)} ds \quad (27)$$

である。この式に式(24)、式(25)を代入して計算すればつぎのようになる。

$\alpha \geq \beta$ の場合

$$\text{hopt}(t, \alpha) = \frac{1}{2\pi ap} A_2 (p^2 - a_2^2) e^{-a_2(t + \alpha - \beta)} \quad (28)$$

$\alpha < \beta$ の場合

$$\begin{aligned} \text{hopt}(t, \alpha) &= \frac{1}{4\pi a p i} \left[\int_{-i\infty}^{i\infty} A_2 (p + a_2) (p + s) \frac{e^{(t + \alpha - \beta)s}}{a_2 + s} ds \right. \\ &\quad \left. + A_1 (p - a_1) \left\{ \int_{-i\infty}^{i\infty} (p + s) \frac{e^{a_1(\alpha - \beta)s} e^{ts}}{a_1 - s} ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{-i\infty}^{i\infty} (p + s) \frac{e^{(t + \alpha\beta)s}}{a_1 - s} ds \right\} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

この式を3区間に分けて考える。

(i) $t < 0$ のとき、

$$\text{hopt}(t, \alpha) = 0 \quad (30)$$

(ii) $0 < t < \beta - \alpha$ のとき,

$$\begin{aligned} \text{hopt}(t, \alpha) &= \frac{1}{2ap} A_1 (p^2 - a_1^2) e^{(t+\alpha-\beta)a_1} \\ &= \frac{1}{2ap} \varphi_{12,1}(t+\alpha) \end{aligned} \quad (31)$$

(iii) $t \geq \beta - \alpha$ のとき,

$$\begin{aligned} \text{hopt}(t, \alpha) &= \frac{1}{2ap} A_2 (p^2 - a_2^2) e^{-(t+\alpha-\beta)a_2} \\ &= \frac{1}{2ap} \varphi_{12,2}(t+\alpha) \end{aligned} \quad (32)$$

式(28), (30), (31), (32)より最適応答関数はつぎのようになる。

$$\text{hopt}(t, \alpha) \begin{cases} = 0 & (t < 0) \\ = \frac{1}{2ap} (p^2 - a_1^2) \varphi_{12,1}(t+\alpha) & (0 \leq t < \beta - \alpha) \\ = \frac{1}{2ap} (p^2 - a_2^2) \varphi_{12,2}(t+\alpha) & \left(\begin{array}{l} 0 < \beta - \alpha < t \\ \text{or} \\ \beta - \alpha < 0 \leq t \end{array} \right) \end{cases} \quad (33)$$

長期間流出量の最適応答関数は相互相関そのものでなく、相互相関関数を構成する各関数要素を加重したものの和であり、相互相関関数は次式で表わされるように、長期流出と短期流出の和となると考えられる。

$$\varphi_{12,0}(\tau) \begin{cases} = A_{11} e^{a_{11}(\tau-\beta)} + A_{12} e^{a_{12}(\tau-\beta)} & (\tau < \beta) \\ = A_{21} e^{-a_{21}(\tau-\beta)} + A_{22} e^{-a_{22}(\tau-\beta)} & (\tau \geq \beta) \end{cases}$$

たとえば、日野⁸⁾、藤田⁹⁾らはこの考えで研究をすすめた。しかし、流出期間の短い降雨一流出の解析では、あらかじめ有効降雨の分離、直接流出の分離を行なえば、式(33)で十分である。

3. 解析および結果

前述の理論を津田川に適用してみた。津田川は島根県の面積12.9km²の小河川である。得られた降雨量および河川水位のデータが僅少で1968年の7月~12月より10月3日について解析を行なった。

式(8), (9), (10)は観測値より試算すれば次式で近似できた。

$$\varphi_{11}(\tau) = 4.3e^{-1.08|\tau|} \quad (8)'$$

$$\varphi_{12,1}(\tau) = 4.24e^{0.58(\tau-1)} \quad (9)'$$

$$\varphi_{12,2}(\tau) = 4.24e^{-0.233(\tau-1)} \quad (10)'$$

また、式(33)は式(8), (9), (10)と式(9)', (10)'より

$$\text{hopt}(\tau) \begin{cases} = 0.311e^{0.58(\tau-1)} & (0 \leq \tau < 1) \\ = 0.417e^{-0.233(\tau-1)} & (1 \leq \tau) \end{cases} \quad (34)$$

となる。ここで、予測時間 α は0とした。つまり上式はユニットハイドログラフに対応する。

式(34)を計算すれば Fig. 1 になった。

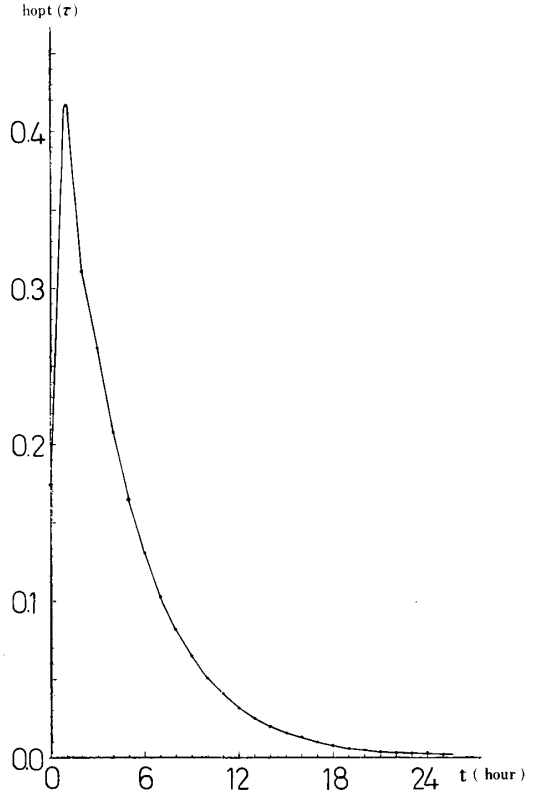


Fig.1 Unit hydrograph

式(34)と式(1)より流出量 $Q_1(t)$ を求め、実測量 $Q_2(t)$ とを比較したのが Fig. 2 である。

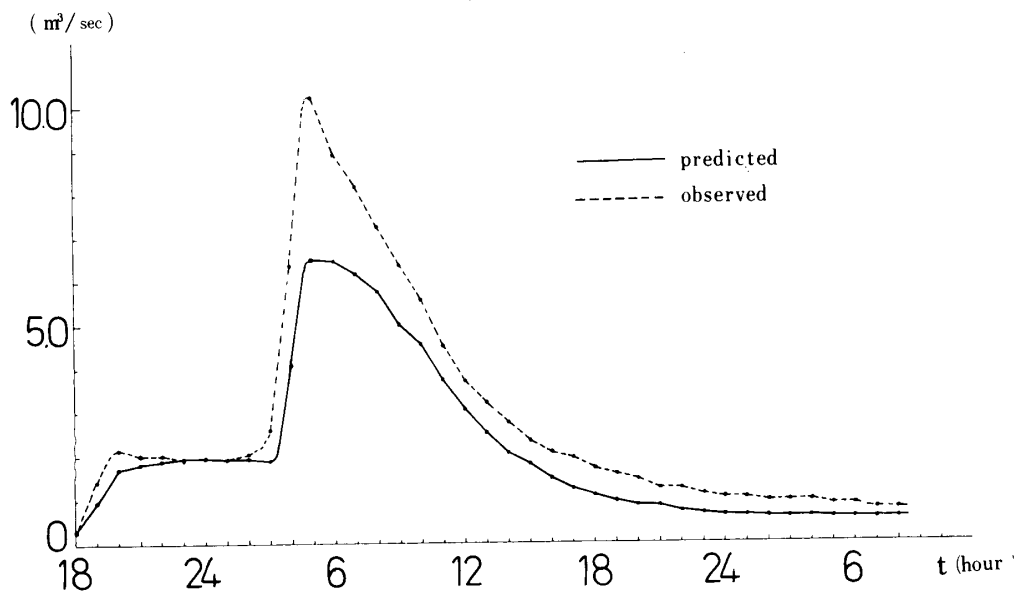


Fig.2 The Comparison of the hourly observed and predicted discharge

4. 考 察

本報はピーク時の流出量と予測値のきれいな一致を得なかったが、情報論的手法が以上のように短期間流出についても適用され得ることがわかった。また結果があまり良好でないのは流出現象の非線型性に起因するものであろう。したがって、今後非線型性の効果を含んだ理論に改良する必要がある。なお、最近藤田¹⁰⁾は流出期の短い降雨一流出系について情報論的手法にて研究を行ない、入出力の測定誤差、データ処理の誤差を検討する場合の取扱いに有益なる示唆を与えていることは注目に値し、予測向上の指針になるであろう。

最後に、終始御鞭撻いただいた藤原輝男教授に謝意を表したい。

参 考 文 献

- 1), 8) 日野幹雄：東京工業大学土木工学科研究報告, 4, 12 (1967)
- 2), 9) 藤田陸博, 山岡 勲：土木学会, 第23回年次講演会講演概要, 153 (1968)
- 3) 高棟球, 池淵周一：京都防災研究所年報, 12—13, 273 (1969)
- 4) 菅原正己：水資源の変動様相に関する調査, 第6報 (水文諸量のスペクトル解析) 科学技術庁, 資源局, 255 (1965)
- 5) 日野幹雄：東京工業大学研究報告, 8, 97 (1970)
- 6) J. Amororocho : J. Geophy. Res., 68, 2237 (1963)
- 7) S. L. S. Jacoby : J. Geophy. Res., 71, 4881 (1966)
- 10) 藤田陸博：第15回水理講演会講演集, 土木学会, 61 (1971)
- 11) Y. E. Lee : Stationary Theory of Communication, John Wiley & Sons Inc., (1960) p.426
- 12) 森田 清：情報と予測, 共立 (1971) p. 141
- 13) 藤原輝男, 太田 豊：山口大学農学部学術報告, 20, 1369 (1969)

(昭和46年11月15日受理)