

減衰および強制振動の影響を考慮した 骨組構造物の動的弾性安定解析

會 田 忠 義*・窪 田 彰**

Analysis of Dynamic Elastic Stability of Framed Structures Considering
the Effect of Damping and Forced Vibration

Tadayoshi AIDA and Akira KUBOTA

Abstract

In this paper authors deal with the dynamic instability of the framed structures in two cases, in which the effect of damping is considered and it is supposed that the frequency of loads is close to the natural frequencies of the structures, and show the method of analysis of them and the effect of damping and forced vibration. In former case, it is supposed that the damping force proportional to a derivative of the displacement with respect to time is considered and damping matrix can be diagonalized by modal matrix.

The boundary values of the regions of instability of columns and arches are estimated by applying the proposed method, which agree with them of column simply supported at both sides.

1. まえがき

係数励振不安定振動では減衰の影響は比較的大きいため、これらの影響を考慮すべきであり、減衰を考慮した場合、不安定領域が縮小されることが知られている¹⁾。また、周期性外力の振動数が構造物の固有振動数に近い場合は周期性外力による振動変位が大きくなりこれが動的安定性に影響を及ぼすが、これらの2つの振動数が十分に離れている場合には振動変位は小さく、これらの影響を無視してよいことなども知られている¹⁾。

著者らは文献2)において、減衰力を無視し、外力の振動数と構造物の固有振動数が十分に離れている基本的な場合の単純パラメトリック共振による不安定問題の研究結果を発表したが、本研究は減衰力を考慮し外力の振動数と構造物の固有振動数が接近している場合の単純パラメトリック共振による不安定性の解析を行なったものである。

解析に当たっての仮定および解析法は文献2)と同様である。特に、減衰力については速度に比例するものだけを考慮し、さらに、減衰マトリックスはモーダルマ

トリックスにより対角化され得る場合に限定した。

本文の最後に本研究の方法により柱および放物線アーチについて解析した結果を示した。

2. 減衰の影響を考慮した場合の運動方程式、境界振動数および臨界荷重

仮定にしたがい、速度に比例した減衰力のみを考慮し微小振動時の減衰マトリックスが有限振幅時の運動方程式にもそのまま適用されるとすると、運動方程式は次式で表わされる。

$$W \frac{d^2 d}{dt^2} + D \frac{dd}{dt} + P_0 K_3 d + \bar{P} \sin \omega t K_2 d + K_1 d = 0 \dots (1)$$

一般に、減衰マトリックス D は容易に求めることはできないが、特殊な場合として、モーダルアナリシスの手法を用い、自由振動の各次のモードに対する減衰定数 h が既知である場合、次のようにして求められる。

今、式(2)の固有円振動数を $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$,

$$W \frac{d^2 d}{dt^2} + K_1 d = 0 \dots (2)$$

それぞれに対応する正規化された固有ベクトルを Φ_1

* 土木工学科 ** 兵庫県土木部

Φ_2, \dots, Φ_m とするとき, D が式(3)のようにモーダルマトリックス $[\Phi]$ により対角化され得るとする.

$$[\Phi]^T D [\Phi] = \begin{pmatrix} 2h_1\omega_1 & & & \\ & 2h_2\omega_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & 2h_m\omega_m \end{pmatrix} = [2h\omega] \dots (3)$$

ここで, h_1, h_2, \dots, h_m はそれぞれ1次, 2次, \dots m 次モードに対する減衰定数である. すると D は減衰定数を用いて次式で表わされる.

$$D = W[\Phi][2h\omega][\Phi]^T W \dots (4)$$

運動方程式(1)の動的主不安定領域の境界振動数は次の境界振動数方程式より近似的に求められる.

$$\begin{vmatrix} K_1 + P_0 K_3 - \frac{1}{4} \omega^2 W & \frac{1}{2} \bar{P} K_2 - \frac{1}{2} \omega D \\ \frac{1}{2} \bar{P} K_2 + \frac{1}{2} \omega D & K_1 + P_0 K_3 - \frac{1}{4} \omega^2 W \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

動的第2不安定領域の境界振動数は次の境界振動数方程式より近似的に求められる.

$$\begin{vmatrix} K_1 + P_0 K_3 & \bar{P} K_2 & 0 \\ \frac{1}{2} \bar{P} K_2 & K_1 + P_0 K_3 - \omega^2 W & -\omega D \\ 0 & \omega D & K_1 + P_0 K_3 - \omega^2 W \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

一方, $\bar{P} \sin \omega t$ (\bar{P} = 一定, ω = 一定) が作用しているときの動的不安定領域の臨界荷重 (P_0) の大きさ P_0 を求める場合は次式によればよい.

動的主不安定領域の臨界荷重に対して,

$$\begin{vmatrix} \left(K_1 - \frac{1}{4} \omega^2 W & \frac{1}{2} \bar{P} K_2 - \frac{1}{2} \omega D \right)^{-1} \begin{pmatrix} K_3 & 0 \\ 0 & K_3 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2} \bar{P} K_2 + \frac{1}{2} \omega D & K_1 - \frac{1}{4} \omega^2 W \\ + \frac{1}{P_0} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

動的第2不安定領域の臨界荷重に対して

$$\begin{vmatrix} \left(K_1 & \bar{P} K_2 & 0 \right)^{-1} \begin{pmatrix} K_3 & 0 & 0 \\ 0 & K_3 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2} \bar{P} K_2 & K_1 - \omega^2 W & -\omega D \\ 0 & \omega D & K_1 - \omega^2 W \\ + \frac{1}{P_0} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

3. 強制振動の影響を考慮した場合の運動方程式と境界振動数

周期性外力の円振動数 ω が骨組構造物の固有円振動数に近い場合, 強制振動による変位および部材力は非周期性外力としての P による値に比べてかなり大きくなる. この場合の有限振巾時の運動方程式は次式で表わされる.

$$W_i \frac{d^2 \bar{d}_i}{dt^2} = - \sum_{j=1}^m T_{ij} (f_i + \bar{f}_i, f_j + \bar{f}_j, \alpha_{ij} + \bar{\alpha}_{ij}) \times N'_{ij} (d_{0i} + \bar{d}_i, d_{0j} + \bar{d}_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) - P_{0i} - \bar{P}_i \sin \omega t \quad (9)$$

$$\text{ここで, } f_i = \{\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i\}^T \\ f_j = \{\bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{w}_j\}^T$$

この状態より非周期性外力あるいは周期性外力の振巾または振動数が構造物固有の安定の限界をわずかに越え不安定領域に入り, 振動振巾が大きくなった場合を想定する. この場合の変位の増加量を Δd_i とするとき, 節点の運動方程式は近似的に次式で表わされる.

$$W_i \frac{d^2}{dt^2} (\bar{d}_i + \Delta \bar{d}_i) = - \sum_{j=1}^m T_{ij} (f_i + \bar{f}_i + \Delta \bar{f}_i, f_j + \bar{f}_j + \Delta \bar{f}_j, \alpha_{ij} + \bar{\alpha}_{ij} + \Delta \bar{\alpha}_{ij}) N'_{ij} (d_{0i} + \bar{d}_i + \Delta \bar{d}_i, d_{0j} + \bar{d}_j + \Delta \bar{d}_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) - P_{0i} - \bar{P}_i \sin \omega t \quad (10)$$

上式の右辺の第1項の T'_{ij} および N'_{ij} を展開して, $\Delta \bar{d}$ の2次以上の項を無視する. そして式(9)の関係をを用いて整理し, $\Delta \bar{d}_i$ を新たに d_i とおくと, 式(10)は次式となる.

$$W_i \frac{d^2 d_i}{dt^2} = - \sum_{j=1}^m T_{ij} (f_i + \bar{f}_i, f_j + \bar{f}_j, \alpha_{ij} + \bar{\alpha}_{ij}) \times \left[\frac{\partial N'_{ij}}{\partial u_i} u_i + \frac{\partial N'_{ij}}{\partial v_i} v_i + \frac{\partial N'_{ij}}{\partial w_i} w_i + \frac{\partial N'_{ij}}{\partial \theta_{xi}} \theta_{xi} + \frac{\partial N'_{ij}}{\partial \theta_{yi}} \theta_{yi} + \frac{\partial N'_{ij}}{\partial \theta_{zi}} \theta_{zi} + \frac{\partial N'_{ij}}{\partial u_j} u_j + \frac{\partial N'_{ij}}{\partial v_j} v_j + \frac{\partial N'_{ij}}{\partial w_j} w_j + \frac{\partial N'_{ij}}{\partial \theta_{xj}} \theta_{xj} + \frac{\partial N'_{ij}}{\partial \theta_{yj}} \theta_{yj} + \frac{\partial N'_{ij}}{\partial \theta_{zj}} \theta_{zj} \right]_{d=d_0+\bar{d}} - \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} u_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_i} v_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial z_i} w_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} u_j + \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j} v_j + \frac{\partial T_{ij}}{\partial z_j} w_j + \frac{\partial T_{ij}}{\partial \alpha_{ij}} \beta_{ij} \right]_{f=f+\bar{f}, \alpha=\alpha+\bar{\alpha}} \times N'_{ij} (d_{0i} + \bar{d}_i, d_{0j} + \bar{d}_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) \quad (11)$$

ここで, $\bar{\alpha}_{ij} = \bar{\theta}_{xi}\lambda_{ij} + \bar{\theta}_{yi}\mu_{ij} + \bar{\theta}_{zi}\nu_{ij}$

したがって, 次式に整理される.

$$\begin{aligned} W_i \frac{d^2 d_i}{dt^2} = & - \sum_{j=1}^m T_{ij}(f_i + \bar{f}_i, f_j + \bar{f}_j, \alpha_{ij} + \bar{\alpha}_{ij}) \\ & \{S_{iij} T^{-1}(f_i, f_j, \alpha_{ij}) d_i + S_{ijj} \times T_{ij}^{-1}(f_i, f_j, \alpha_{ij}) d_j\} \\ & \sum_{j=1}^m \{H_{iij}(f_i + \bar{f}_i, f_j + \bar{f}_j, \alpha_{ij} + \bar{\alpha}_{ij}, N'_{0ij} + \bar{N}'_{ij}) d_i \\ & + H_{jij}(f_i + \bar{f}_i, f_j + \bar{f}_j, \alpha_{ij} + \bar{\alpha}_{ij}, N'_{0ij} + \bar{N}'_{ij}) d_j\} \end{aligned} \quad \dots\dots (12)$$

式中, \bar{d} および \bar{N}'_{ij} は強制振動時の値であるため, 式(9)より求めなければならないが, 式(9)は非線形であるため直ちに求められない. ここでは近似値として次式を構造物の各式を節点に適用したとき得られる一連の運動方程式より求める.

$$\begin{aligned} W_i \frac{d^2 \bar{d}_i}{dt^2} = & - \sum_{j=1}^m T_{ij}(f_i, f_j, \alpha_{ij}) N'_{ij}(\bar{d}_i, \bar{d}_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) \\ & - \bar{P}_i \sin \omega t \end{aligned} \quad \dots\dots (13)$$

周期性外力の基準荷重載荷時の材端力ベクトルの振巾 \bar{N}'_{ij} および節点変位ベクトルの振巾 \bar{d}_i は周期性外力の円振動数 ω の関数となるので, 次式となる.

$$N'_{ij} = \bar{P} \sin \omega t \tilde{N}'_{ij}(\omega), \bar{d}_i = \bar{P} \sin \omega t \tilde{d}_i(\omega) \quad \dots\dots (14)$$

本研究では, さらに, $\bar{d}_i = \bar{P} \tilde{d}_i(\omega)$ を近似的な取り扱いにより, 節点 i の強制振動の影響を考慮した有限振巾時の運動方程式を次式で表わした.

$$\begin{aligned} W_i \frac{d^2 d_i}{dt^2} = & - \sum_{j=1}^m T_{ij}(f_i + \bar{f}_i, f_j + \bar{f}_j, \alpha_{ij} + \bar{\alpha}_{ij}) \\ & \times \{S_{iij} T_{ij}^{-1}(f_i, f_j, \alpha_{ij}) d_i + S_{ijj} T_{ij}^{-1}(f_i, f_j, \alpha_{ij}) d_j\} \\ & - P_0 \sum_{i=1}^m \{H_{iij}(f_i + \bar{f}_i, f_j + \bar{f}_j, \alpha_{ij} + \bar{\alpha}_{ij}, \tilde{N}'_{0ij}(\omega)) d_i \\ & + H_{jij}(f_i + \bar{f}_i, f_j + \bar{f}_j, \alpha_{ij} + \bar{\alpha}_{ij}, \tilde{N}'_{0ij}(\omega)) d_j\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \bar{P} \sin \omega t \sum_{j=1}^m \{H_{jij}(f_i + \bar{f}_i, f_j + \bar{f}_j, \alpha_{ij} + \bar{\alpha}_{ij}, \tilde{N}'_{ij}(\omega)) d_i \\ & + H_{jij}(f_i + \bar{f}_i, f_j + \bar{f}_j, \alpha_{ij} + \bar{\alpha}_{ij}, \tilde{N}'_{ij}(\omega)) d_j\} \quad \dots\dots (15) \end{aligned}$$

したがって, 上式を構造物の各節点に適用することにより一連の運動方程式が得られ, それらを行列表示すると次式となる.

$$\begin{aligned} W \frac{d^2 d}{dt^2} + P_0 K_3(\omega) d + \bar{P} \sin \omega t K_2(\omega) d \\ + K_1(\omega) d = 0 \quad \dots\dots (16) \end{aligned}$$

式(16)の動的主不安定領域の境界振動数方程式は,

$$|K_1(\omega) \pm \frac{1}{2} \bar{P} K_2(\omega) + P_0 K_3(\omega) - \frac{1}{4} \omega W| = 0 \quad \dots\dots (17)$$

一方, 動的第2不安定領域の境界振動数方程式は,

$$|K_1(\omega) + P_0 K_3(\omega) - \omega^2 W| = 0 \quad \dots\dots (18)$$

$$\begin{vmatrix} K_1(\omega) + P_0 K_3(\omega) & \bar{P} K_2(\omega) \\ \frac{1}{2} \bar{P} K_2(\omega) & K_1(\omega) + P_0 K_3(\omega) - \omega^2 W \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

4. 適用例

文献2)の適用例に示す柱および放物線アーチについて, 減衰の影響を考慮した場合の動的不安定領域を示すとともに, とくに両端単純支持柱について強制振動の影響を近似的に考慮した場合の動的不安定領域を示した. 減衰を考慮する場合は, 非周期性外力が作用しない状態の自由振動の各次のモードに対して減衰定数 h が0.05および0.10の2通りについて求めた.

4.1 柱

$\bar{P} = 18246 \text{ kg}$ が作用したときの振動数の変化とともなう非周期性外力の大きさ P_0 の臨界値を求め, これらの結果を荷重振動数 $\omega/2\Omega$ と励振パラメーター μ で表わし, Table 1, Table 2 および Table 3 に示した.

Table 1 Boundary values of the regions of dynamic instability considering the effect of damping for column of case I

		Upper bound		Lower bound	
		μ	$\omega/2\Omega$	μ	$\omega/2\Omega$
$h=0.05$	Principal	1.164	1.114 (1.092)	0.686	0.649 (0.641)
		0.802	1.203 (1.180)	0.628	0.710 (0.701)
		0.586	1.114 (1.092)	0.525	0.811 (0.801)
		—	—	0.482	0.855 (0.845)
		—	—	0.445	0.896 (0.888)
	Second	2.076	0.484 (0.475)	0.699	0.094 (0.092)
		1.056	0.461 (0.452)	0.676	0.184 (0.182)
		—	—	0.643	0.269 (0.267)
		—	—	—	—
		—	—	—	—

Table 2 Boundary values of the regions of dynamic instability considering the effect of damping for column of case II

		Upper bound		Lower bound	
		μ	$\omega/2\Omega$	μ	$\omega/2\Omega$
$h=0.05$	Principal	0.975	1.344 (1.328)	0.473	0.781 (0.772)
		0.563	1.192 (1.178)	0.385	0.845 (0.836)
		0.375	1.112 (1.099)	0.317	0.894 (0.885)
		0.268	1.057 (1.046)	0.264	0.933 (0.924)
		—	—	0.225	0.969 (0.960)
	Second	1.035	0.484 (0.477)	0.666	0.185 (0.181)
		—	—	0.568	0.341 (0.338)

Table 3 Boundary values of the regions of dynamic instability considering the effect of damping for column of case III

		Upper bound		Lower bound			
		μ	$\omega/2\Omega$	μ	$\omega/2\Omega$		
$h=0.05$	Principal	0.789	1.300 (1.303)	0.662	0.595 (0.597)		
		0.478	1.180 (1.183)	0.414	0.784 (0.787)		
		0.329	1.118 (1.112)	0.330	0.840 (0.842)		
		0.187	1.054 (1.057)	0.217	0.909 (0.912)		
		0.121	1.018 (0.121)	0.112	0.978 (0.981)		
	Second	0.994	0.486 (0.487)	0.654	0.197 (0.198)		
		—	—	0.525	0.353 (0.355)		
		$h=0.1$	Principal	1.150	1.306 (1.310)	0.841	0.447 (0.449)
				0.554	1.089 (1.092)	0.704	0.613 (0.615)
				—	—	0.576	0.740 (0.742)
—	—			0.472	0.837 (0.840)		
Second	—		—	0.400	0.925 (0.929)		
	0.793	0.433 (0.435)	0.668	0.191 (0.200)			
—	—	0.626	0.386 (0.387)				

Table 4 Boundary values of the regions of dynamic instability considering the effect of forced vibration for column of case III

Upper bound		Lower bound	
μ	$\omega/2\Omega$	μ	$\omega/2\Omega$
0.132	1.066 (1.070)	0.103	0.940 (0.942)
0.263	1.124 (1.130)	0.206	0.884 (0.887)
0.522	1.133 (1.240)	0.314	0.820 (0.824)
0.873	1.367 (1.375)	0.506	0.694 (0.699)
2.027	1.735 (1.748)	0.798	0.435 (0.447)

Case I ……両端固定の柱

Case II ……一端固定他端ヒンジの柱

Case III ……両端ヒンジの柱

ただし、Case I および Case II において、 $h=0.10$ の場合、減衰効果が大きく、後述の式(20)および(21)により境界振動数を求めることが不可能な場合が生ずるため、ここでは表示していない。

単純支持柱 (Case III) の強制振動の影響を近似的に考慮した場合の動的・主不安定領域の境界値を Table 4 に示した。

Table 1, Table 2 および Table 3 中の $\omega/2\Omega$ の欄の括弧内の数値は連続体の力学より求められた両端単純

支持柱の境界振動数の近似値式(20)および式(21)より計算した結果である。

主不安定領域…

$$\frac{\omega}{2\Omega} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}D^2 \pm \sqrt{\mu^2 - D^2 + \frac{1}{4}D^4}} \quad \dots\dots (20)$$

第2不安定領域

$$\frac{\omega}{2\Omega} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \mu^2 \pm \sqrt{\mu^4 - D^2(1 - \mu^2)}} \quad \dots\dots (21)$$

ここで、
$$D = \frac{2\varepsilon}{\omega_1 \sqrt{1 - \frac{P_0}{P_*}}} \quad \varepsilon = h\omega_1$$

また、Table 4 中の $\omega/2\Omega$ の欄の括弧内の数値は強制振動の影響を考慮した場合の連続体の力学より求められた両端単純支持柱の境界振動数の近似値式(22)より計算した値である。

$$\left(\frac{\omega}{2\Omega}\right)^2 = \frac{1}{2\beta} \{1 + \beta \pm \sqrt{(1-\beta)^2 \mp 4\mu\beta}\} \quad \dots\dots (22)$$

ここで、 $\beta = \left(\frac{2\Omega}{\omega_L}\right)^2$

ω_L : 柱の縦振動の固有円振動数

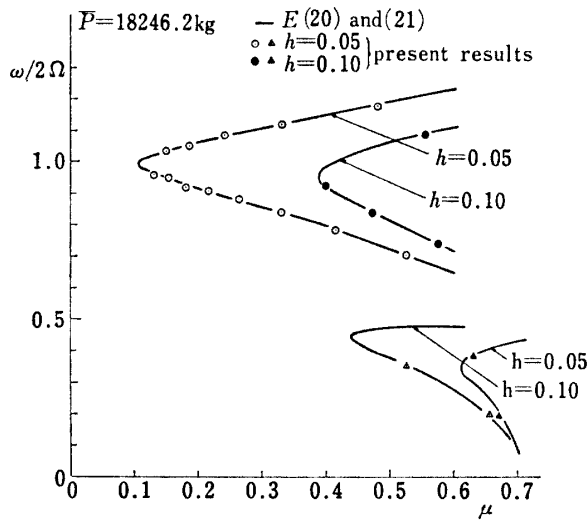


Fig. 1 Regions of dynamic instability considering the effect of damping for column of case III

以上の結果中、Case III について $\omega/2\Omega \sim \mu$ 平面に不安定領域を描くと、Fig. 1 の通りである。

Table 1, Table 2 および Table 3 より明らかなように、計算値は式(20)および式(21)による近似値と1%の差異を生ずるだけである。したがって、動的不安定領域を $\omega/2\Omega \sim \mu$ 平面で表わす場合、柱の境界条件に関係なく、領域の境界値を両端単純支持柱の近似式(20)および(21)により計算してよいといえる。また、強制振動の影響を考慮した場合、Table 4 より明らかなように $\mu=2$ 以内の範囲では式(22)の計算値とほとんど変わらない結果が得られた。

4.2 アーチ

4.2.1 面内変形アーチ

不安定領域の境界値の計算手順は柱の場合と同じである。Case I (両端固定アーチ)、Case II (一端定固他端ヒンジアーチ) および Case III (両端ヒンジアーチ) の結果を $\omega/2\Omega \sim \mu$ で表わし、Table 5, Table 6 および Table 7 に示した。

Table 5, Table 6 および Table 7 中の $\omega/2\Omega$ の欄の括弧内の数値は両端単純支持柱の境界振動数の近似式(20)および(21)より算出した結果である。これらの結果より明らかなように、アーチの計算値は境界条件に関係なく、式(20)および(21)による近似値と1%程度の差異を生ずるだけで、動的不安定領域を $\omega/2\Omega \sim \mu$

Table 5 Boundary values of the regions of dynamic in plane instability considering the effect of damping for arch of case I

		Upper bound		Lower bound	
		μ	$\omega/2\Omega$	μ	$\omega/2\Omega$
$h=0.05$	Principal	0.610	1.262 (1.255)	0.588	0.656 (0.649)
		0.509	1.219 (1.215)	0.488	0.730 (0.723)
		0.433	1.187 (1.184)	0.370	0.808 (0.802)
		0.327	1.140 (1.140)	0.261	0.873 (0.869)
		0.257	1.107 (1.109)	0.176	0.917 (0.918)
	Second	1.754	0.503 (0.497)	0.698	0.079 (0.081)
		1.111	0.501 (0.495)	0.638	0.226 (0.219)
		0.762	0.498 (0.493)	0.585	0.291 (0.286)
		0.551	0.493 (0.490)	0.446	0.389 (0.386)
		0.412	0.487 (0.485)	0.357	0.454 (0.450)
$h=0.10$	Principal	2.577	1.830 (1.812)	0.717	0.563 (0.556)
		1.572	1.548 (1.536)	0.605	0.665 (0.658)
		1.106	1.399 (1.389)	0.507	0.744 (0.735)
		0.840	1.306 (1.298)	0.423	0.803 (0.796)
		0.667	1.241 (1.234)	0.327	0.869 (0.862)
	Second	1.689	0.494 (0.488)	0.667	0.156 (0.154)
		1.044	0.485 (0.480)	0.643	0.228 (0.224)
		0.687	0.472 (0.480)	0.597	0.294 (0.291)
		—	—	0.549	0.352 (0.348)
		—	—	0.506	0.405 (0.399)

Table 6 Boundary values of the regions of dynamic in plane instability considering the effect of damping for arch of case II

		Upper bound		Lower bound	
		μ	$\omega/2\Omega$	μ	$\omega/2\Omega$
$h=0.05$	Principal	1.789	1.666 (1.659)	0.480	0.730 (0.726)
		1.228	1.487 (1.483)	0.437	0.760 (0.755)
		0.921	1.379 (1.377)	0.397	0.785 (0.782)
		0.725	1.306 (1.305)	0.362	0.807 (0.804)
		—	—	0.302	0.842 (0.841)
	Second	1.091	0.501 (0.497)	0.581	0.292 (0.289)
		0.752	0.499 (0.496)	0.521	0.346 (0.343)
		0.545	0.495 (0.494)	0.458	0.389 (0.387)
		0.414	0.491 (0.491)	0.398	0.423 (0.421)
		0.315	0.484 (0.486)	0.299	0.472 (0.469)
$h=0.1$	Principal	2.661	1.879 (1.863)	0.492	0.739 (0.740)
		1.605	1.579 (1.571)	0.449	0.770 (0.764)
		1.121	1.421 (1.417)	0.408	0.796 (0.792)
		0.852	1.327 (1.325)	0.374	0.820 (0.815)
		0.676	1.261 (1.259)	0.312	0.857 (0.854)
	Second	1.682	0.497 (0.492)	0.699	0.080 (0.081)
		1.050	0.491 (0.487)	0.637	0.229 (0.228)
		0.707	0.484 (0.481)	0.588	0.294 (0.292)
		0.480	0.465 (0.464)	0.534	0.350 (0.348)
		0.445	0.447 (0.452)	0.481	0.399 (0.395)

Table 7 Boundary values of the regions of dynamic in plane instability considering the effect of damping for arch of case III

		Upper bound		Lower bound	
		μ	$\omega/2\Omega$	μ	$\omega/2\Omega$
$h=0.05$	Principal	0.675	1.284 (1.282)	0.509	0.710 (0.707)
		0.513	1.221 (1.219)	0.384	0.793 (0.792)
		0.404	1.174 (1.174)	0.295	0.849 (0.848)
		0.331	1.144 (1.143)	0.205	0.901 (0.900)
		0.202	1.087 (1.086)	0.149	0.932 (0.932)
	Second	1.374	0.500 (0.497)	0.690	0.118 (0.110)
		0.759	0.495 (0.494)	0.635	0.227 (0.223)
		0.476	0.490 (0.490)	0.565	0.318 (0.315)
		—	—	0.464	0.387 (0.386)
		—	—	0.377	0.436 (0.436)
$h=0.1$	Principal	0.857	1.315 (1.312)	0.682	0.582 (0.587)
		0.608	1.219 (1.220)	0.523	0.719 (0.719)
		0.466	1.164 (1.163)	0.400	0.809 (0.807)
		0.370	1.123 (1.123)	0.273	0.890 (0.891)
		0.253	1.072 (1.071)	0.195	0.942 (0.942)
	Second	1.317	0.489 (0.487)	0.691	0.118 (0.113)
		0.694	0.474 (0.473)	0.642	0.228 (0.223)
		—	—	0.571	0.322 (0.318)
		—	—	0.498	0.401 (0.395)
		—	—	—	—

平面で表わす場合，式(20)および(21)を用いて領域の境界値を表わしてよいといえる。

4.2.2 面外変形アーチ

柱と同様の手順により P_0 を求める，しかる後に，その結果を $\omega/2\Omega \sim \mu$ で表わし，Table 8 に示した。

この場合も， $\omega/2\Omega$ の欄の括弧内の数値は式(20)および(21)により算出した値である。

Table 8 より明らかなように面内変形アーチと同様，不安定領域の境界値を式(20)および(21)で算出してよいといえる。

Table 8 Boundary values of the regions of dynamic out of plane instability considering the effect of damping for arch of case I

		Upper bound		Lower bound	
		μ	$\omega/2\Omega$	μ	$\omega/2\Omega$
$h=0.05$	Principal	0.433	1.177 (1.172)	0.479	0.743 (0.737)
		0.263	1.101 (1.099)	0.341	0.835 (0.830)
		0.181	1.065 (1.062)	0.248	0.891 (0.888)
		0.130	1.031 (1.036)	0.144	0.949 (0.948)
		0.098	1.008 (1.018)	0.093	0.980 (0.982)
	Second	1.949	0.500 (0.495)	0.600	0.277 (0.274)
		0.436	0.473 (0.479)	0.408	0.457 (0.449)
$h=0.1$	Principal	0.697	1.195 (1.186)	0.905	0.340 (0.337)
		—	—	0.703	0.600 (0.599)
		—	—	0.517	0.771 (0.769)
		—	—	0.384	0.887 (0.882)
	Second	1.835	0.485 (0.479)	0.625	0.283 (0.278)
		0.657	0.435 (0.429)	0.603	0.417 (0.408)

5. 結 び

減衰力を考慮した場合および周期力の周期と構造物の固有周期が比較的接近し、強制振動の影響を考慮しなければならない場合について骨組構造物の動的弾性安定性の一解法を示した。

減衰力については、速度に比例するものだけを考慮し、減衰マトリックスはモーダルマトリックスにより対角化される場合を取り扱った。解析結果、この場合も、文献2)と同様、本研究の適用例のように非周期性外力の基準荷重作用状態と周期性外力の基準荷重作用状態が等しい場合、構造物の動的不安定領域の境界値を求める場合、柱やアーチの区別なく、また、境界条件の相異に関係なく、両端単純支持柱の境界値の近似式(20)および(21)を用いて算出しても大差ないことがわかった。

一方、強制振動の影響を考慮する場合、外力の周期

と構造物の固有周期が一致し振動変位が無限大となる状態を除き、強制振動変位の振巾が節点座標に比べて小さい場合を想定した。その結果、 μ が2より小さい範囲では式(22)より算出した結果とほとんど変わらないことがわかった。

本研究の数値計算は九州大学大型計算機センターのFACOM 230-60 および75を用いて行なった。

本研究に当り、山口大学工学部 清水茂俊教授より貴重な助言を賜わり、鳥取大学工学部 杉山吉彦助教授から数多くの貴重な研究成果をいただいたことをここに付記し謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) V. V. Bolotin: The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day Inc., San Francisco (1964)
- 2) 會田忠義・窪田彰・佐伯博三: 周期力を受ける骨組構造物の弾性安定解析, 土木学会論文報告集.