

$$H_2(\lambda, \mu, z) = \frac{\mu - 1}{\lambda + r_1/(r_2 - r_1)} \left[\frac{f_2(z) - f_1(z)}{\mu + r_1/(r_2 - r_1)} - \frac{\sigma_2}{2} w_0(\mu) \left\{ \mu \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} - \mu \frac{\partial f_1(z)}{\partial z} + \frac{\partial f_1(z)}{\partial z} \right\} \right] \\ - \frac{\sigma_2}{2} w_0(\lambda) \lambda (\mu - 1) \left[\frac{\frac{\partial f_2(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial f_1(z)}{\partial z}}{\mu + r_1/(r_2 - r_1)} - \frac{\sigma_2}{2} w_0(\mu) \left\{ \mu \frac{\partial^2 f_2(z)}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^2 f_1(z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f_1(z)}{\partial z^2} \right\} \right] + \dots$$

4. Nusselt 数 Nu_1 :

$$Nu_1 = -2 \frac{\int_0^1 \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} \cdot dz}{\int_0^1 f_1(z) \cdot dz} \quad (9)$$

5. 数値計算例: $r_2/r_1 = 55\text{mm}/35\text{mm} = 1.571428$ $L = 1300\text{mm}$

λ, ν, a は内管表面温度 (tw_1 °C) の平均温度に相当する値を取った。実験は垂直同心二重管の下から水が加熱される場合について行った。 $f_1(z), f_2(z)$ の実験曲線は z の三次式以上の高次式となる。しかし近似的に

$$(i) f_1(z) \doteq 0.8z, \quad f_2(z) \doteq 0.11z$$

で代用したときは

$$Nu_1 = 2.198 - 0.02017\sigma_2 \quad (10)$$

$$(ii) f_1(z) \doteq 1.01z^2 + 0.0416z, \quad f_2(z) \doteq 0.11z$$

で代用したときは (数値積分は Simpson 1/3 則を用ふ)

$$Nu_1 = 2.156 + 0.02898\sigma_2 - 0.0000559\sigma_2^2 \quad (11)$$

これを図示すれば Fig. 1 のごとくなる。

6. 結 言

実験と理論とが厳密には完全に一致していないのは自由対流の影響、温度の変化による物理常数の変化の影響を理論式では考慮していない

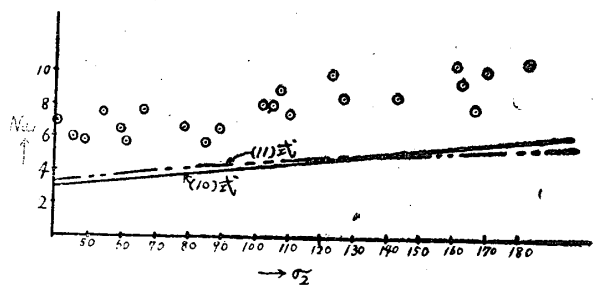


Fig. 1. 錆のある二重管内、流層、熱伝達

からである。各寸法と $f_1(z), f_2(z)$ とをあたへれば計算によつて推定することができる。終りに臨み終始御懇切な御援助を賜はつた松山英太郎博士に深甚の謝意を表す。なほ実験資材入手については田中工学部長、実験装置製作に当つては横山氏の御協力を得たことを感謝す。実験、数値計算については倉重、坂口、齊藤、波佐間の諸君の労を多とす。此の研究は文部省科学研究費の一部によるものである。

内圧又は剪断力を受ける圓孔を有する直交異方性板の應力について

野 村 恭 雄

I 緒 言

この論文は筆者の圓孔を有する直交異方性板の孔縁補強についての一連の論文⁽¹⁾の先驅をなすもので、圓孔が自由縁の場合はいろんな方法⁽²⁾で解けているにも拘らず、圓孔内に内圧のある場合や剪断力の働く場合については解かれていないのが見当らないようである。そこでここではこの問題⁽³⁾をとり上げ佐藤氏の超複素函数を用いて解いてみた。但し板は無限板である。

II 基礎方程式及びその解

基礎方程式

$$\lambda_1^2 \lambda_2^2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

但し $E_x/E_y \equiv \lambda_1^2 \lambda_2^2$, $E_x/G_{xy} - 2\nu_x \equiv \lambda_1^2 + \lambda_2^2$, E_x, E_y は板の繊維及びそれに直角方向のヤング率、 G_{xy} は剛性率、 ν_x は繊維方向のポアソン比

(1)式の一般解

$$x(x, y) = \frac{-1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\lambda_1^2} F_1(z_1) - \frac{1}{\lambda_2^2} F_2(z_2) \right] \quad (2)$$

但し R は Real のいみで $z_j = x + i\lambda_j y$, $j = (1, 2)$

そうすると応力は次の式で与えられる。

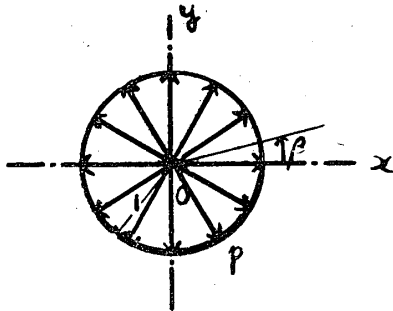
$$\left. \begin{aligned} \widehat{xx} &= \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \operatorname{Re} [F_1''(z_1) - F_2''(z_2)] \\ \widehat{yy} &= \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = \frac{-1}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{Re} \left[\frac{F_1''(z_1)}{\lambda_1^2} - \frac{F_2''(z_2)}{\lambda_2^2} \right] \\ \widehat{xy} &= -\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \operatorname{Im} \left[\frac{F_1''(z_1)}{\lambda_1} - \frac{F_2''(z_2)}{\lambda_2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\text{ここで } z_j = x + i\lambda_j y = \frac{1}{2} \{ (1 + \lambda_j) \zeta^j + (1 - \lambda_j) \zeta^{-j} \} \quad (4)$$

但し $\zeta_j = e^{a_j + i\beta_j}$, ($j = 1, 2$)

なる変換を考えると、之により (x, y) 面の円の
の外側の領域を ζ_j 面の単位円の外側に写像する
と境界上 ($a_j = 0$) では $\zeta_j = e^{i\beta}$ となる。

III. 円孔内に一定内圧 $-p$ の働く場合 (第1図)



第1図

1. 境界条件

(1) 孔縁 ($a_j = 0$) に於て一定内圧 $-p$ が働く

$$\left. \begin{aligned} \text{即ち } \int p_x ds &= -p \sin \beta + C_1 = \frac{\partial x}{\partial y} \\ &= \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \operatorname{Im} \left[\frac{F_1'(z_1)}{\lambda_1} - \frac{F_2'(z_2)}{\lambda_2} \right] \\ \int p_y ds &= p \cos \beta + C_2 = -\frac{\partial x}{\partial x} \\ &= \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \operatorname{Re} \left[\frac{F_1'(z_1)}{\lambda_1^2} - \frac{F_2'(z_2)}{\lambda_2^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{xx} &= T - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\lambda_1^2 \{ T + p(1 - \lambda_2) \} \frac{\delta_1}{A_1} - \lambda_2^2 \{ T + (1 - \lambda_1) \} \frac{\delta_2}{A_2} \right] \\ \widehat{yy} &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\{ T + p(1 - \lambda_2) \} \frac{\delta_1}{A_1} - \{ T + p(1 - \lambda_1) \} \frac{\delta_2}{A_2} \right] \\ \widehat{xy} &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\lambda_1 \{ T + p(1 - \lambda_2) \} \frac{\delta_1'}{A_1} - \lambda_2 \{ T + p(1 - \lambda_1) \} \frac{\delta_2'}{A_2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

故に周辺応力 σ は $\sigma = \widehat{xx} + \widehat{yy} - (-p)$

$$= T - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\{ T + p(1 - \lambda_2) \} (\lambda_1^2 - 1) \frac{\delta_1}{A_1} - \{ T + p(1 - \lambda_1) \} (\lambda_2^2 - 1) \frac{\delta_2}{A_2} \right] + p \quad (11)$$

(2) 無限遠 ($a_j = \infty$) に於て

(i) 引張り T のみ働く即ち

$$\widehat{xx} = T, \quad \widehat{yy} = \widehat{xy} = 0 \quad (6)$$

(ii) 剪断力 S のみ働く即ち

$$\widehat{xy} = S, \quad \widehat{xx} = \widehat{yy} = 0 \quad (7)$$

2. 応力函数

$$F_j'(z_j) = A_j^{(0)} z_j + \frac{A_j^{(1)}}{\zeta_j} \quad (j = 1, 2) \quad (8)$$

但し $A_j^{(0)}$ は境界条件(6)の時 は実数、(7)の時
は虚数、 $A_j^{(1)} = a_j^{(1)} + ib_j^{(1)}$

そうすると

$$F_j''(z_j) = A_j^{(0)} - \frac{2A_j^{(1)}}{(1 + \lambda_j) \zeta_j^2 - (1 - \lambda_j)} \quad (9)$$

3. 無限遠で引張り T のみ働く場合

先づ境界条件(6)より $A_j^{(0)}$ を求めると

$$A_1^{(0)} = \lambda_1^2 T, \quad A_2^{(0)} = \lambda_2^2 T$$

(5)式より

$$a_1^{(1)} = \lambda_1^2 (\lambda_1 + \lambda_2) \{ T + p(1 - \lambda_2) \},$$

$$a_2^{(1)} = \lambda_2^2 (\lambda_1 + \lambda_2) \{ T + p(1 - \lambda_1) \}$$

$$b_1^{(1)} = b_2^{(1)} = 0$$

従つて之を(9)式に入れて(3)式より応力を求め
ると

従つて内圧のない時には

$$\sigma = T \left[1 + \frac{\lambda_1^2 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{\delta_1}{A_1} + \frac{\lambda_2^2 - 1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\delta_2}{A_2} \right] \dots (12)$$

となつて池田博士の結果と一致する。

又等方性の場合には

$$\sigma = T(1 - 2\cos 2\beta) \quad (13)$$

$$\text{但し } A_j = (1 + \lambda_j^2) - (1 - \lambda_j^2)\cos 2\beta$$

$$\delta_j^* = (1 + \lambda_j)\cos 2\beta - (1 - \lambda_j)$$

$$\delta_j' = (1 + \lambda_j)\sin 2\beta \quad (j=1, 2)$$

4. 無限遠で剪断力 S の働く場合

$$\left. \begin{aligned} \widehat{xx} &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\left\{ \lambda_1^2(1 + \lambda_2) \frac{\delta_1'}{A_1} - \lambda_2^2(1 + \lambda_1) \frac{\delta_2'}{A_2} \right\} S - \left\{ \lambda_1^2(1 - \lambda_2) \frac{\delta_1}{A_1} - \lambda_2^2(1 - \lambda_1) \frac{\delta_2}{A_2} \right\} P \right] \\ \widehat{yy} &= \frac{-1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\left\{ (1 + \lambda_2) \frac{\delta_1'}{A_1} - (1 + \lambda_1) \frac{\delta_2'}{A_2} \right\} S - \left\{ (1 - \lambda_2) \frac{\delta_1}{A_1} - (1 - \lambda_1) \frac{\delta_2}{A_2} \right\} P \right] \\ \widehat{xy} &= S \left[1 + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ \lambda_1(1 + \lambda_2) \frac{\delta_1'}{A_1} - \lambda_2(1 + \lambda_1) \frac{\delta_2'}{A_2} \right\} \right] - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ \lambda_1(1 - \lambda_2) \frac{\delta_1'}{A_1} + \lambda_2(1 - \lambda_1) \frac{\delta_2'}{A_2} \right\} P \end{aligned} \right\} (14)$$

従つて周辺応力 σ は

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\left\{ (1 + \lambda_2)(\lambda_1^2 - 1) \frac{\delta_1'}{A_1} - (1 + \lambda_1)(\lambda_2^2 - 1) \frac{\delta_2'}{A_2} \right\} S + \left\{ (1 - \lambda_2)(\lambda_1^2 - 1) \frac{\delta_1}{A_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1 - \lambda_1)(\lambda_2^2 - 1) \frac{\delta_2}{A_2} \right\} P \right] + P \end{aligned} \quad (15)$$

故に内圧のない時には

$$\sigma = -\frac{2(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(\lambda_1 + \lambda_2)\sin 2\beta}{A_1 \cdot A_2} \quad (16)$$

となつて池田博士の結果と一致する。従つて等方性の場合には

$$\sigma = -4S\sin 2\beta \quad (17)$$

III 孔縁に剪断力 S の働く場合 (第 2 図)

1. 境界条件

(1) 孔縁 ($\alpha_j = 0$) で剪断力が働く 即ち

$$\left. \begin{aligned} \int^P S_x ds &= S\cos\beta + C_3 = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \operatorname{Im} \left[\frac{F_1'(z_1)}{\lambda_1} - \frac{F_2'(z_2)}{\lambda} \right] \\ \int^P S_y ds &= S\sin\beta + C_4 = -\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \operatorname{Re} \left[\frac{F_1'(z_1)}{\lambda_1^2} - \frac{F_2'(z_2)}{\lambda_2^2} \right] \end{aligned} \right\} (18)$$

(2) 無限遠 ($\alpha_j = \infty$) において

$$\widehat{xy} = S', \quad \widehat{xx} = \widehat{yy} = 0 \quad (20)$$

(i) 引張り T のみ働く 即ち

$$\widehat{xx} = T, \quad \widehat{yy} = \widehat{xy} = 0 \quad (19)$$

(ii) 剪断力 S のみ働く 即ち

2. 応力函数

■ と全く同様において常数を求める。

3. 無限遠で引張り T のみ働く場合

前と同様に計算すると

$$\left. \begin{aligned} \widehat{xx} &= T - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{\lambda_1^2}{A_1} \{ T \cdot \delta_1 - S(1 - \lambda_1) \delta_1' \} - \frac{\lambda_2^2}{A_2} \{ T \cdot \delta_2 - S(1 - \lambda_2) \cdot \delta_2' \} \right] \\ \widehat{yy} &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{1}{A_1} \{ T \cdot \delta_1 - S(1 - \lambda_1) \delta_1' \} - \frac{1}{A_2} \{ T \cdot \delta_2 - S(1 - \lambda_2) \cdot \delta_2' \} \right] \\ \widehat{xy} &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{\lambda_1}{A_1} \{ T \cdot \delta_1' + S(1 - \lambda_1) \delta_1 \} - \frac{\lambda_2}{A_2} \{ T \cdot \delta_2' + S(1 - \lambda_2) \cdot \delta_2 \} \right] \end{aligned} \right\} (21)$$

この時は $A_j^{(0)}$ は虚数となる。即ち (7) より

$$A_1^{(0)} = -i \frac{\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2} S,$$

$$A_2^{(0)} = +i \frac{\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2} S$$

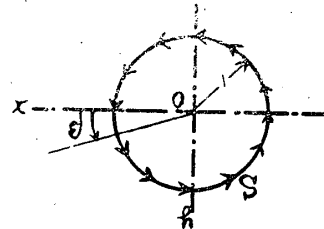
又 (5) 式より

$$a_1^{(1)} = \lambda_1^2(\lambda_1 + \lambda_2)(1 - \lambda_2)P$$

$$a_2^{(1)} = \lambda_2^2(\lambda_1 + \lambda_2)(1 - \lambda_1)P$$

$$b_1^{(1)} = \lambda_1^2(\lambda_1 + \lambda_2)(1 + \lambda_2)S$$

$$b_2^{(1)} = \lambda_2^2(\lambda_1 + \lambda_2)(1 + \lambda_1)S \quad \text{従つて}$$



第 2 図

従つて周辺応力 σ は

$$\sigma = T - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{\lambda_1^2 - 1}{A_1} \{T \cdot \delta_1 - S(1 - \lambda_1)\delta_1'\} - \frac{\lambda_2^2 - 1}{A_2} \{T \cdot \delta_2 - S(1 - \lambda_2)\delta_2'\} \right] \quad (22)$$

故に孔縁に剪断力の働かないときには

$$\sigma = T \left[1 + \frac{\lambda_1^2 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{\delta_1}{A_1} + \frac{\lambda_2^2 - 1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\delta_2}{A_2} \right] \quad (23)$$

となつて(12)式と一致する。

4. 無限遠で剪断力 S' の働くとき

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}x &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{\lambda_1^2}{A_1} \delta_1' \{S(1 - \lambda_2) + S'(1 + \lambda_2)\} - \frac{\lambda_2^2}{A_2} \delta_2' \{S(1 - \lambda_1) + S'(1 + \lambda_1)\} \right] \\ \bar{y}y &= \frac{-1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{\delta_1'}{A_1} \{S(1 - \lambda_2) + S'(1 + \lambda_2)\} - \frac{\delta_2'}{A_2} \{S(1 - \lambda_1) + S'(1 + \lambda_1)\} \right] \\ \bar{x}y &= S' + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{\lambda_1}{A_1} \delta_1' \{S(1 - \lambda_2) + S'(1 + \lambda_2)\} + \frac{\lambda_2}{A_2} \delta_2' \{S(1 - \lambda_1) + S'(1 + \lambda_1)\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

従つて周辺応力 σ は

$$\sigma = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{(\lambda_1^2 - 1)\delta_1'}{A_1} \{S(1 - \lambda_2) + S'(1 + \lambda_2)\} - \frac{(\lambda_2^2 - 1)\delta_2'}{A_2} \{S(1 - \lambda_1) + S'(1 + \lambda_1)\} \right] \quad (29)$$

故に孔縁に剪断力の働かないときには

$$\sigma = -\frac{2(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(\lambda_1 + \lambda_2)\sin 2\beta}{A_1 \cdot A_2} \quad (30)$$

となつて(16)式と一致する。

V 数値計算

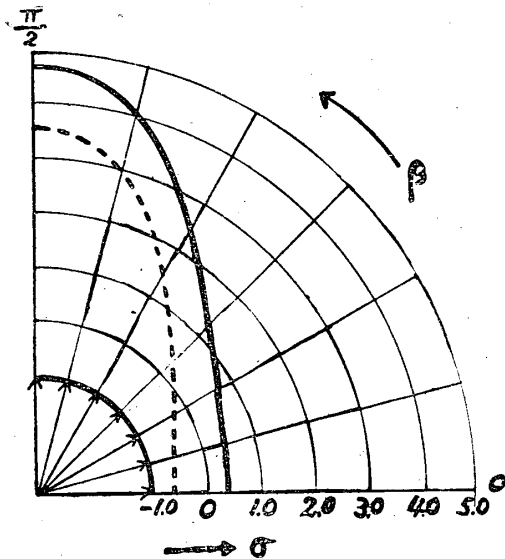
以上の周辺応力の大きさを明らかにするために
柏の板に円孔をもつ場合を数値計算する。

即ち Stamer⁽⁶⁾の結果によると柏では

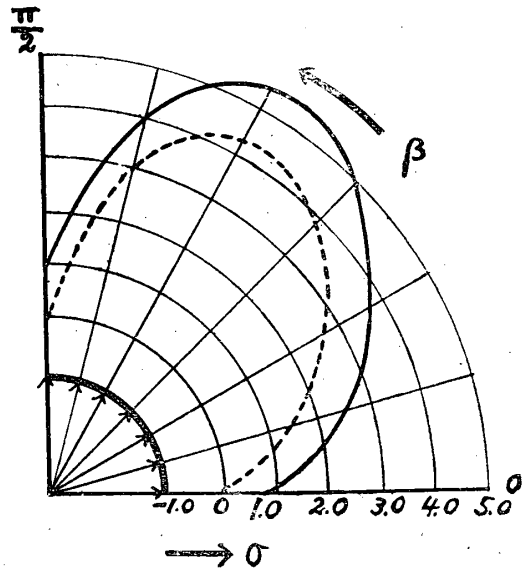
$$E_1 = 58200 \text{ kg/cm}^2, \quad E_2 = 21900 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\nu_x = 0.33, \quad \nu_y = 0.12$$

で繊維方向が x 軸と一致する場合



第3図 円孔に内圧をうけて無限遠で引張られる場合

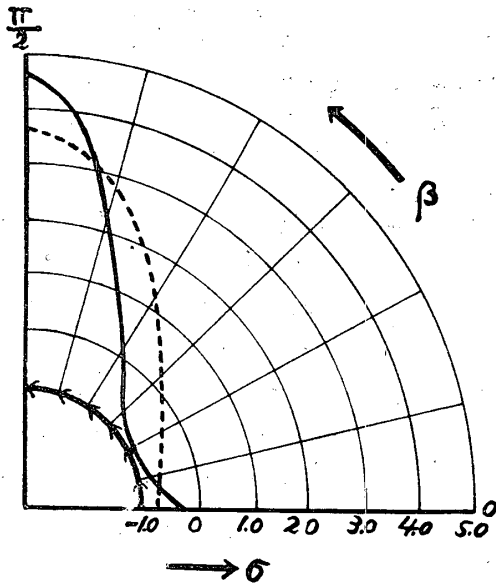


第4図 円孔に内圧をうけて無限遠で剪断力の働く場合

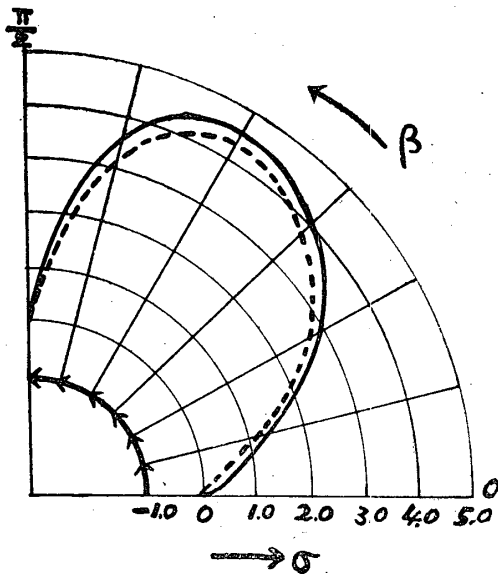
VI 結論

以上のことから、直交異方性板の円孔が

1. 内圧をうける場合の周辺応力は自由縁の場合のそれに内圧の大きさを加えた程度の値の応力を、殆ど相似的に示し(無限遠で引張りあるいは剪断をうける何れの場合も)従つて内



第5図 円孔で剪断力が働き無限遠で引張りをうける場合



第6図 円孔で剪断力が働き無限遠で剪断をうける場合

圧の大きい程周辺応力が増すことはいうまでもない。

2. 剪断力をうける場合は

- (i) 無限遠で引張りをうけるときには、周辺応力は自由縁の場合と大分異つた傾向を示して孔縁には負の応力が多く表わられてい

る。そうして最大周辺応力は自由縁の場合より遙に大きい値を示している。即ち円孔に剪断力が働き、無限遠で引張りをうけるときは、円孔縁は自由縁の場合より非常に危険であるといえる。

- (ii) 無限遠で剪断をうける場合には、自由縁の場合の周辺応力と余り変わらないようである。

ここでは内圧と剪断力とを別々に扱つたが、これを重畳して同時に扱えば木板などの円孔にボルトをさしこんだ場合の如く円孔内に内圧（しかしこの値は小さい）と孔縁に剪断力（これが殆ど主である）の働く場合が二次元的に解けることになる。

註：(1) 筆者：円孔を有する直交異方性板の孔縁の補強について

第1報 十字棒で強化した場合、

昭和28-6-12 日本機械学会宇部地方講演会で発表。機械学会。論文集91号

第2報 力ばめしたリングをはめた場合

昭和28-1-3 日本機械学会京阪神臨時大会で発表

尚続報として第3報いわゆる孔縁材としてのリングをはめた場合、第4報

2重強化節をあてた場合。未発表

- (2) 例えば 池田健：直交異方性板の応力について、日本科学文化協会誌2巻3号（昭22-8）

池田健：航研報告259号（昭18-7）

大久保肇：機械学会誌45巻 P.589

その他 鷲津久一郎、森口繁一、佐藤常三氏らの超複素函数使用のものあり（後註参照）

- (3) 佐藤常三：平面応力の新解析法（生活社刊）

(4),(5) 前掲 (2), 池田健

(6) J. Stamer und H. Sieglerschmidt, Z. VDI., 77巻 (1933) P.503