

来の方法では解決できなかつたものである。境界条件が複雑な函数で、あたへられ、しかも変数の多い場合の境界値問題の解決には L^2 変換は工学上、有力な方法であると考へる。数値計算の際は (22) 式の第二種 Volterra 積分方程式

の数値解法を行へば、(27) 式が数値的に簡単に求まるので更に便利である。

この研究は文部省科学研究費による研究の一部である。

熱伝達における Riccati's Generalised Equation の数値解法

村 川 勝 彌

1. 緒 言

工業上、熱交換装置の一型式として二重管が使用されているが、その二重管は例へば、熱拡散による分離を行うときの熱円筒型⁽¹⁾たくま式ボイラーの二重管、冷凍装置の低温用凝縮器⁽²⁾冷却器⁽³⁾、石油の精製⁽⁴⁾、化学工場における冷却器としての二重管、管型空気予熱器⁽⁵⁾、Air Jacket としてシリンダーの保温、Velox boiler の蒸発管⁽⁶⁾、最近盛んになつた原子力工業における熱交換装置⁽⁷⁾として、或は原子炉⁽⁸⁾における伝熱管として、又とくに液体金属の二重管⁽⁹⁾熱交換器として、各方面において近年ようやく盛んに使用され始めた。二重円管と関聯して熱処理炉や、ボイラー炉壁の二重壁や、二重窓の伝熱も同様に論ぜられ、最近ではガスタービンの羽根表面の伝熱⁽¹⁰⁾、及び、フランス水車の羽根車とカバーライナーとのすきま、船用プロペラのプロペラ軸と、カバーとのすきまに介在する水の振動について、同心円筒⁽¹¹⁾にはさまれた流体の振動問題として扱つたり、タービンエンジン用環状燃焼器⁽¹²⁾の問題や、タービン翼列まわりのポテンシャル流⁽³⁾を研究する際にタービン翼列まわりの領域を二同心円間の円環状領域に写像して考へたり、垂直管中の気液混合物の上向流動の⁽¹⁴⁾研究に二重管を利用しているが熱伝達以外の問題についても問題を単純化して分析する時にも有益な方法である。

工業上、熱交換器として使用される上述のごとき二重管では多くの場合、管の入口から直ちに熱伝達が始まる場合が極めて多い。すなわち助走区間の熱伝達の研究が最近に至つて注目さ

れ始めた所以である。しかし理論解析に際して温度分布を求めるエネルギー中の助走区間の速度分布は少くとも半径方向と軸方向との二次元として扱はねばならず方程式も拋物型偏微分方程式となり純数学者の手による研究も現在の所、他の楕円型や双曲型の場合などは進んでいない様である。著者は二重管内の助走区間の熱伝達の研究において拋物型を Riccati's Generalised Equation $\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y^2 + Q(x) \cdot y = R(x)$ に帰着した。この式において $P=0$ のときは一次形に、 $R=0$ ならば、ベルヌーイの方程式になるが、 P も R も 0 でない場合には此の方程式を解くことを或函数を積分することに帰着せしめることは一般にはできない。けれども一つの解が分るときはベルヌーイの方程式に帰着することができるが著者の問題の場合は P, Q, R が共に複雑な函数となつて一つの解を求めることは困難であり此の解を得ることは一般にはできないので、これを非線型 Volterra 積分方程式に、そして線型第二種 Volterra 積分方程式に帰着し数値解法によつて解決する方法を採つた。次に、その要点を述べる。

2. Riccati's Generalised Equation の数値解法

非線型 (non-linear) 微分方程式の一種である Riccati's Generalised Equation

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y^2 + Q(x) \cdot y = R(x) \dots\dots (1)$$

は

$$y(x) = f(x) + \int_0^x k(\xi) \cdot y(\xi) \cdot d\xi + \int_0^x H(\xi) \cdot y^2(\xi) \cdot d\xi \dots\dots (2)$$

(非線型 Volterra 積分方程式)

と書けるから

$$y_0(x) = f(x) + \int_0^x k(\xi) \cdot y_0(\xi) \cdot d\xi \dots (3)$$

$$y_1(x) = f_1(x) + \int_0^x k(\xi) \cdot y_1(\xi) \cdot d\xi \dots (4)$$

$$y_2(x) = f_2(x) + \int_0^x k(\xi) \cdot y_2(\xi) \cdot d\xi \dots (5)$$

.....,

より $y = y_0 + y_1 + y_2 + \dots$ (6)

が解となる。(3), (4), (5).....式は線型第二種 Volterra 積分方程式であるから Gregory の数値積分公式, Prasad の方法と階差を用い数値解法によつて求めることができる。

次に(2)式 of 非線型 Volterra 積分方程式の一般形

$$y(x) = f(x) + \int_0^x F[x, \xi, y(\xi)] \cdot d\xi \dots (7)$$

において [I] $f(0) = 0$ で Lipschitz の条件を満足するときは

$$\bar{y}_0(x) = f(x), \bar{y}_1(x) = f(x) + \int_0^x F[x, \xi, y_0(\xi)] \cdot d\xi, \dots$$

....., として解 y_n が求まるが工学上の問題においては $f(x)$ は一般には必ずしも、この条件を常に満足するとは考へられない。[II] $f(0) \neq 0$, $F[x, \xi, y(\xi)]$ が、必ず y の1次の項を持ち、しかも積分可能な函数であるときは(3)~(5)式の形の第二種 Volterra 積分方程式を数値解法によつて解けば(3)~(6)式の形の解として一般形(7)式の $y(x)$ を求めることができる。

3. 数値計算例

例題として次式を数値解法によつて解けば第1表のようになる。

$$\frac{dy}{dx} = 2x + x^3 \cdot y - x \cdot y^2, \quad (y)_{x=0} = 0$$

第1表 厳密解と y_0 との比較

x	厳密解	y_0	誤差
0.0	0.00	0.0000000000	0.0000000000
0.1	0.01	0.0100001875	0.0000001875

0.2	0.04	0.0400120032	0.0000120032
0.3	0.09	0.0900959482	0.0000959482
0.4	0.16	0.1605898234	0.0006898234
0.5	0.25	0.2526279729	0.0026279729

上の表から分る様に x が小さい間は y_0 だけ計算すればすむが、 x が大きくなれば y_1, y_2, \dots の計算も必要となる。

(1)式を一般的に解くことは出来ないが(2)~(6)式の積分方程式の数値解法によれば、簡単に、しかも機械的に、解くことが出来る。此の方法は近頃、実用上、重要視されて来た非線型微分方程式の解法に対する一つの指針を与へるものである。

次に Volterra 型においては多元函数 (x, y) に対しても同様に扱へるし、又ある種の高次積分方程式を解くには Volterra の可換群の理論もあつて極めて便利である。

積分方程式に関して東京大学理学部教授日高孝次博士ならびに山口大学教育学部教授山本武夫博士より御懇切なる御援助を賜り、心から感謝の意を捧げる。数値計算は川原、梶、濃明、山根、内山、岡の諸君の御協力をえたことを感謝する。この研究は文部省科学研究費による研究の一部である。

注

- (1) 武田栄一、日本数学物理学会誌、14巻(1940) 昭和15年 159, 特に Nier や Watson の研究; 原子力工業, vol. 1., No. 4., Jul. 1955. P. 45~P. 46. (垂直二重管による U^{235} の分離); 原子力工業, vol. 1., No. 5, Aug. 1955. P. 50~P. 51.
- (2) 長岡順吉; 日本機械学会誌、58巻433号(昭和30年2月号) 144. 及び William H. McAdams, Heat Transmission, second edition, 1942, 27 1. 及び栗野、葛岡、伝熱工学、110, 116 ページ 117ページ。
- (3) W. H. McAdams; Heat Transmission, 2nd edition, 1942, 232~233 ページ、及び水科篤郎 化学機械、16巻10号 1952年10月号 338 ページ及び(2)の伝熱工学 P. 112, Duriron 製熱交換器 及び H. Schlichting, Z, a, M, M. Bd. 31,

- Ht. 3, (1951), 及びシャック、応用伝熱127ページ。
- (4) Mech. Eng. Dec, 1954. vol, 76. No. 12. 10 22ページ。
- (5) 菅原菅雄, 蒸気ボイラー及び蒸気原動機, 108 ページ
- (6) 菅原菅雄, 蒸気罐, 下巻106ページ第10, 35図(入口部分は3重管)
- (7) Mech. Eng. 1953~5, vol. 75, No. 5, 363 ~ 368 ページ; 日本機械学会, 伝熱に関する講習会前刷(昭和30年5月)40ページ, 原子力発電の伝熱問題, 43ページ(Na-蒸気熱交換器は二重管式)47ページ(全溶接二重管式の熱交換器が使用される); 原子力工業, vol. 1, No. 5, Aug. 1 955, 12ページ(二重管式熱交換器)
- (8) Mech. Eng. 1955. Feb. vol. 77, No. 2, 124 ページ (Uranium Reactor); 原子力工業,

- vol. 1, No. 3, Jun. 1955. 21 ページ、
重水炉(鉛重な二重管); 日本機械学会, 伝熱に関する講習会前刷(昭和30年5月)40 ページ、原子力の伝熱問題, 50ページ(第4図, 第6図a, b)
- (9) 日本機械学会誌, 昭和27年6月, 15ページ(Lyon)
- (10) Eng., vol. 173, No. 4484, Jan. 4. 1952. 22 ページ
- (11) 日本機械学会誌昭和30年8月 611ページ
- (12) (11)の 625ページ
- (13) 日本機械学会誌昭和30年5月 338ページ
- (14) Trans. A. S. M. E. 1954. 10.

英文題目

Method of Numerical Solution of Riccati's Generalised Equation in Heat Transfer, Katsuhisa MURAKAWA.

PS コンクリートはりの設計計算について

加 賀 美 一 二 三

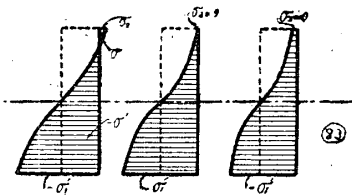
緒 言

前報⁽⁵⁾にてコンクリートの圧縮応力分布に放物線を用いたプレテンションはりの設計計算法について述べたのであるが, 本文 I においてはプレテンションはりに一般はり断面の放物線式⁽¹⁰⁾を用いた場合について記述し, II において同様放物線式によるポストテンションはりの設計計算法について述べたものである。

I プレテンションはりの場合

1 PSコンクリートはりの図心位置

図-1 維応力の分布



前報⁽⁵⁾の図-1 についての(1)式と同じ。

2 はり断面の算定

図-1 において維応力⁽¹⁰⁾σ, σ'は

$$\sigma, \sigma' = \frac{P}{A} \mp \frac{M}{\int n \sqrt{\frac{v}{y}} vdf} n \sqrt{\frac{v}{y}}$$

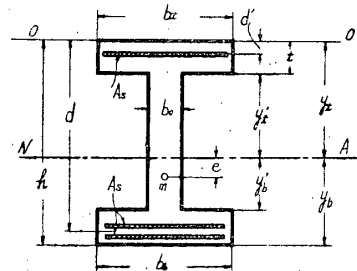
この場合の縁維応力 σ₂, σ₁' は

$$\sigma_2, \sigma_1' = \frac{P}{A} \mp \frac{M}{\int n \sqrt{\frac{v}{y}} vdf}$$

プレストレス導入時;

前項の縁維応力第2項の分母を図-2 について求めると

図-2 はり断面の関係



$$\int n \sqrt{\frac{v}{y}} vdf = \nu' (y_t A_t - y_t' A_t') + \nu (y_b A_b - y_b' A_b')$$

ここに, A_t = b_t y_t, A_t' = (b_t - b_e) y_t', A_b = b_b y_b, A_b' = (b_b - b_e) y_b', cm², ν, ν' = 前報⁽³⁾の記号と同じ, 0.375 及び 0.454

しかるときは

$$\sigma_2 = \frac{P}{A} - \frac{P'e}{\nu' A_u + \nu A_l} \geq \sigma_{tp} \quad (a)$$