$$\lambda-\eta)\cdot d\eta\Big\}\cdot d\lambda-1/8\int_0^x\int_0^y\xi\left[\int_0^{\eta-i\xi}\Phi(-i\lambda,\ \eta-i\xi-\lambda)\cdot d\lambda\right]\cdot d\xi\cdot d\eta+1/8\int_0^x\int_0^y\xi\left[\int_0^{\eta+i\xi}\Phi(-i\lambda,\ \eta+i\xi-\lambda)\cdot d\lambda\right]d\xi\cdot d\eta+1/8\int_0^x\int_0^y\xi\left[\int_0^{\eta+i\xi}\Phi(i\lambda,\ \eta+i\xi-\lambda)\cdot d\lambda\right]\cdot d\xi\cdot d\eta$$

$$-\frac{1}{8}\int_0^x\int_0^y\xi\left[\int_0^{\eta+i\xi}\Phi(i\lambda,\eta+i\xi-\lambda)\cdot d\lambda\right]\cdot d\xi\cdot d\eta\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

w_2 以下は (38), (39), (40) 式と同じ形の方程式を解けばよく (41) 式の Φ の形が変るだけである。

(38)式は弾性学などで、よく現はれる重 Poisson 方程式であるが L^2 変換を用いれば極めて簡単に解が求まる。又 L^2 変換は境界条件が複雑で、その数が多い場合とか、三次元以上の高次の偏微分方程式や、聯立偏微分方程式を解く場合に有効である。終りに此の研究は２回に渡つて交付された文部省科学研究費による研究の一部である。

注

(1) 村川勝彌; 昭和29年12月13日、日本機械学会 熱講演会（第594回講演会）及び、これと合同して行はれた伝熱工学研究会において発表。熱伝達については、そのときの前刷を参照。

(2) 村川勝彌; 日本機械学会論文集18巻67号（昭和27年）43ページの(6)式

英文題目

An Application of L^2—Transformation in Heat Transfer (1st Report), Katsuhisa MURAKAWA.

熱傳達における L^2 變換の應用（第２報）

村　川　勝　彌

1. 緒　言

前報に続いて、著者が５年前から扱つて来た二重管内の助走区間の熱伝達研究の一部として、二重管入口における流体の速度分布を一般的に半径方向の函数と考へた場合の速度分布を求めるに当つて従来は二重管入口の条件を完全に満足させる解は、ないようであるが、ここでは L^2 変換を応用し、従来の困難を打開することが、できたので、以下に L^2 変換の応用について述べる。

2. 流体力學の基礎式

運動方程式；

$$C_r\cdot\frac{\partial C_r}{\partial r}+C_Z\cdot\frac{\partial C_r}{\partial Z}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\sigma r}+\nu\left(\nabla^2 C_r-\frac{C_r}{r^2}\right)\ (1)$$

$$C_r\cdot\frac{\partial C_Z}{\partial r}+C_Z\cdot\frac{\partial C_Z}{\partial Z}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial Z}+\nu\cdot\nabla^2 C_Z\cdots\cdots(2)$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial Z^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

連続の式：

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot C_r)+\frac{\partial C_Z}{\partial Z}=0\cdots\cdots\cdots(4)$$

境界条件：

$$(C_r)_{r=r_1}=0\cdots\cdots\cdots(5),\qquad (C_r)_{r=r_2}=0\cdots\cdots\cdots(6),$$

$$(C_r)_{z=0}=0\cdots\cdots\cdots(7),\qquad (C_Z)_{r=r_1}=0\cdots\cdots\cdots(8),$$

$$(C_Z)_{r=r_2}=0\cdots\cdots\cdots(9),\qquad (C_Z)_{z=0}=F(r)\cdots\cdots\cdots(10)$$

(1), (2) 式から圧力 P の項を消去し、(4)式を満足ずる流れ函数 Ψ を用ひ

$\Psi=\Psi_0+\lambda\cdot\Psi_1+\lambda^2\cdot\Psi_2+\cdots\cdots$, L ＝ 線型項

N＝非線型項, $L(\Psi)=\lambda\cdot N(\Psi)$,

$$\left[\frac{\partial^4\Psi_0}{\partial r^4}+2\frac{\partial^4\Psi_0}{\partial r^2\partial Z^2}+\frac{\partial^4\Psi_0}{\partial Z^4}\right]+\mu\cdot\{\cdots\cdots\cdots\}=0,$$

$\Psi_0=\Phi_0+\mu\cdot\Psi_1+\mu^2\cdot\Psi_2+\cdots\cdots\cdots,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,$

$\cdots\cdots\cdots\cdots,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,$

（最後に $\lambda=1$, $\mu=1$ とおく） とおき

$\Phi=\overline{w}\cdot(r_2-r_1)^2\cdot\phi_0,\ x=(r-r_1)/(r_2-r_1)$,

$z=Z/(r_2-r_1)$ なる置換を行へば

(1)〜(10)式は次の(11)〜(17) 式となる。

$$\frac{\partial^4\phi_0}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\phi_0}{\partial x^2\partial z^2}+\frac{\partial^4\phi_0}{\partial z^4}=0\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial z}\right)_{x=0}=0\cdots\cdots\cdots(12),\ \left(\frac{\partial\phi_0}{\partial z}\right)_{x=1}=0\cdots\cdots\cdots(13),$$

$\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \cdots\cdots\cdots (14)$, $\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \cdots\cdots (15)$,

$\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x}\right)_{x=1} = 0 \cdots\cdots\cdots (16)$, $\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x}\right)_{z=0} = f(x) \cdots\cdots\cdots (17)$

次に　$\phi_0 = u + z \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \cdots\cdots\cdots (18)$

$u = (1-x)^2 \cdot w \cdots\cdots (19)$, $w = \int_0^x y \cdot dx \cdots (20)$

$,(y)_{z=0} = \eta(x) \cdots\cdots\cdots (21)$ とおけば

$$\eta(x) = F(x) + \int_0^x 2/(1-x) \cdot \eta(\xi) \cdot d\xi \cdots\cdots\cdots (22)$$

（第二種 Volterra 積分方程式）

ただし $F(x) = f(x)/(1-x)^2$,

$G(x) = (22)$式の解

3. L^2 變換の應用

(19), (20) 式の w の第 0 次近似 w_0 を

$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} = 0$ から求めることにすれば積分微分方程式 (Integrodifferentialgleichung) が現れ y の第 0 次近似 y_0 は

$\frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial z^2} = 0 \cdots\cdots (23)$, $(y_0)_{x=0} = 0 \cdots\cdots (24)$,

$(y_0)_{z=0} = G(x) \cdots\cdots\cdots (25)$, $\left(\frac{\partial y_0}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \cdots\cdots\cdots (26)$

より L^2変換を応用して

$y_0 = 1/2 \cdot G(x - i \cdot z) + 1/2 \cdot G(x + i \cdot z) \cdots (27)$

となる。(27) 式の y_0はL^2 変換の理論により (23)～(26) 式を満足することも容易に証明できるので (27)の y_0 が解であることが分る。同様にして y の第 1 次近似 y_1 以下を求めることができる。次に(18)式のvはv＝0となることが計算によつて求まる。故に (11)式の ϕ_0 が求まる。次に

$$\Phi_1 = \overline{w} \cdot (r_2 - r_1)^2 \cdot \phi_1 \cdots\cdots\cdots (28)$$

とおけば

$$\frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial z^4} = F_0(x, z) \cdots\cdots\cdots\cdots (29)$$

（重 Poisson 方程式）

$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z}\right)_{x=0} = 0 \cdots\cdots\cdots (30)$, $\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z}\right)_{x=1} = 0 \cdots\cdots\cdots (31)$,

$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \cdots\cdots\cdots (32)$, $\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \cdots\cdots\cdots (33)$,

$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right)_{x=1} = 0 \cdots\cdots\cdots (34)$, $\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right)_{z=0} = 0 \cdots\cdots\cdots (35)$,

となるから $\phi_1 = (1-x)^2 \cdot H$ とおきHの第0次近似 H_0 は (29) 式において $\phi_1 = H_0$ とおくことにより、また物理的な意味を考へ L^2 変換によつて

$$H_0(x, y) = 1/4i \int_0^x \int_0^y \int_0^\xi \lambda \cdot F_0(\xi - \lambda, \eta + i\lambda) \cdot d\lambda \cdot d\xi \cdot d\eta - 1/4i \int_0^x \int_0^y \int_0^\xi \lambda \cdot F_0(\xi - \lambda, \eta - i\lambda) \cdot d\lambda \cdot d\xi \cdot d\eta + x^2/2 \int_0^y (y - \lambda) \left\{ \int_0^\lambda F_0(-i\eta, \lambda - \eta) \cdot d\eta \right\} \cdot d\lambda + x^2/2 \int_0^y (y - \lambda) \left\{ \int_0^\lambda F_0(i\eta, \lambda - \eta) \cdot \right\} d\eta \cdot d\lambda - 1/8 \int_0^x \int_0^y \xi \left\{ \int_0^{\eta - i\xi} F_0(-i\lambda, \eta - i\xi - \lambda) \cdot d\lambda \right\} \cdot d\xi \cdot d\eta + 1/8 \int_0^x \int_0^y \xi \left\{ \int_0^{\eta + i\xi} F_0(-i\lambda, \eta + i\xi - \lambda) \cdot d\lambda \right\} \cdot d\xi \cdot d\eta + 1/8 \int_0^x \int_0^y \xi \left\{ \int_0^{\eta - i\xi} F_0(i\lambda, \eta - i\xi - \lambda) \right\} d\lambda \cdot d\xi \cdot d\eta - 1/8 \int_0^x \int_0^y \xi \left\{ \int_0^{\eta + i\xi} F_0(i\lambda, \eta + i\xi - \lambda) \cdot d\lambda \right\} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdots\cdots (36)$$

第 1 次近似H_1以下も全く同様にして解くことができる。以上によつて ϕ_0, ϕ_1, ………, Φ_0, Ψ_1, ………, したがつて流れ函数Ψが求まるから速度 C_z, C_r が解決できる。(29) 式の重 Poisson 方程式の境界条件が複雑な函数である場合とか境界条件の箇数の多い場合には従来の変分法による Ritz の方法や wolf の数値解法などによつても 1,000 回以上の操作を要し解は、なかなか困難となるであろうが、L^2 変換によれば極めて容易に、しかも機械的に求められる。L^2 変換は一般に変数 x, y, z, ……… の多いときに有力な方法である。特に境界条件が (17), (25), (26), (30)～(35) 式のごとく複雑な函数で、しかも条件の数が多くなれば従

来の方法では解決できなかつたものである。境界条件が複雑な函数で、あたへられ、しかも変数の多い場合の境界値問題の解決には L^2 変換は工学上、有力な方法であると考へる。数値計算の際は (22)式の第二種 Volterra 積分方程式の数値解法を行へば、(27)式が数値的に簡単に求まるので更に便利である。

この研究は文部省科学研究費による研究の一部である。

熱傳達における Riccati's Generalised Equation の数値解法

村　川　勝　彌

1. 緒　言

工業上、熱交換装置の一型式として二重管が使用されているが、その二重管は例へば、熱拡散による分離を行うときの熱円筒型[1]たくま式ボイラーの二重管、冷凍装置の低温用凝縮器[2]冷却器[3]、石油の精製[4]、化学工場における冷却器としての二重管、管型空気予熱器[5]、Air Jacket としてシリンダーの保温、Velox boiler の蒸発管[6]、最近盛んになつた原子力工業における熱交換装置[7]として、或は原子炉[8]における伝熱管として、又とくに液体金属の二重管[9]熱交換器として、各方面において近年ようやく盛んに使用され始めた。二重円管と関聯して熱処理炉や、ボイラー炉壁の二重壁や、二重窓の伝熱も同様に論ぜられ、最近はガスタービンの羽根表面の伝熱[10]、及び、フランシス水車の羽根車とカバーライナーとのすきま、船用プロペラのプロペラ軸と、カバーとのすきまに介在する水の振動について、同心円筒[11]にはさまれた流体の振動問題として扱つたり、タービンエンジン用環状燃焼器[12]の問題や、タービン翼列まわりのポテンシヤル流[13]を研究する際にタービン翼列まわりの領域を二同心円間の円環状領域に写像して考へたり、垂直管中の気液混合物の上向流動の[14]研究に二重管を利用しているが熱伝達以外の問題についても問題を単純化して分析する時にも有益な方法である。

工業上、熱交換器として使用される上述のごとき二重管では多くの場合、管の入口から直ちに熱伝達が始まる場合が極めて多い。すなわち助走区間の熱伝達の研究が最近に至つて注目され始めた所以である。しかし理論解析に際して温度分布を求めるエネルギ式中の助走区間の速度分布は少くとも半径方向と軸方向との二次元として扱はねばならず方程式も拋物型偏微分方程式となり純数学者の手による研究も現在の所、他の楕円型や双曲型の場合などは進んでいない様である。著者は二重管内の助走区間の熱伝達の研究において拋物型を Riccati's Generalised Equation $\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y^2+Q(x)\cdot y=R(x)$ に帰着した。この式において $P=0$ のときは一次形に、$R=0$ ならば、ベルヌーイの方程式になるが、P も R も0でない場合には此の方程式を解くことを或函数を積分することに帰着せしめることは一般にはできない。けれども一つの解が分るときはベルヌーイの方程式に帰することができるが著者の問題の場合は P, Q, R が共に複雑な函数となつて一つの解を求めることは困難であり此の解を得ることは一般にはできないので、これを非線型 Volterra 積分方程式に、そして線型第二種 Volterra 積分方程式に帰着し数値解法によつて解決する方法を採つた。次に、その要点を述べる。

2. Riccati's Generalised Equation の数値解法

非線型 (non-linear) 微分方程式の一種である Riccati's Generalised Equation

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y^2+Q(x)\cdot y=R(x)\cdots\cdots(1)$$

は

$$y(x)=f(x)+\int_0^x k(\xi)\cdot y(\xi)\cdot d\xi+\int_0^x H(\xi)\cdot y^2(\xi)\cdot d\xi\cdots\cdots\cdots(2)$$